गणित

कक्षा ७

नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

गणित

कक्षा ७

लेखक

शालिकराम भुसाल

महेश्वर न्यौपाने

डिल्लीराज भुसाल

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

Curriculum Development Centre

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

ISBN:

© प्रकाशकमा

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०७१

पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट अभिलेखबद्ध गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

Curriculum Development Centre

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्य पुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीमा राष्ट्र, राष्ट्रिय एकता र लोकतान्त्रिक संस्कारको भावना पैदा गराई नैतिकता, अनुशासन र स्वावलम्बन जस्ता सामाजिक एवम् चारित्रिक गुण तथा आधारभूत भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, पेसा, व्यवसाय, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण र स्वास्थ्य सम्बन्धी आधारभूत ज्ञान र जीवनोपयोगी सिपको विकास गराउनु जरुरी छ । त्यसै गरी उनीहरूमा कला र सौन्दर्यप्रति अभिरुचि जगाउनु, मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श र वैशिष्ट्यहरूको संरक्षण, संवर्धन गराउनु, सिर्जनशील सिपको विकास गराउनु र विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, अपाङ्गता, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रप्रति समभाव जगाई समावेशी समाजको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउनु र मानव अधिकार तथा सामाजिक मूल्य मान्यताप्रति सचेत भई जिम्मेवारीपूर्ण आचरण विकास गराउनु पनि आजको आवश्यकता बनेको छ । यही आवश्यकता पूर्तिका लागि शिक्षा सम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तरक्रियाका निष्कर्षबाट विकास गरिएको आधारभूत शिक्षा पाठ्यक्रम (कक्षा ६-८), २०६९ अनुसार देशका विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषणका आधारमा देशभर पठन पाठन गर्ने उद्देश्यले यो पाठ्य पुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्य पुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक दिवाकर ढुङ्गेल तथा डा. मीनबहादुर श्रेष्ठ, डा. लेखनाथ शर्मा, डा. बालकृष्ण रञ्जित, डण्डपाणि शर्मा, हेमराज पोखरेल, वैकुण्ठ खनाल, वरुण वैद्य, विजय बानिया, गोमा श्रेष्ठ, जीवराज आचार्य, रमेशप्रसाद अवस्थी, राजेन्द्र देवकोटा र मैना अधिकारीको विशेष योगदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन हरिप्रसाद निरौला, कला सम्पादन श्रीहरि श्रेष्ठ तथा लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । यस पाठ्य पुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्य पुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यसबाट विद्यार्थीलाई पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मद्दत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । यस पाठ्य पुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । पाठ्य पुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.सं. २०७१

Curriculum Development Centre

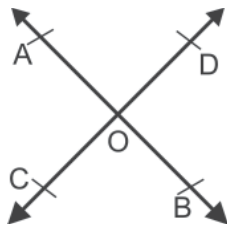
विषय सूची

Curriculum Development Centre

एकाइ 1 रेखा र कोण (Line and Angle)

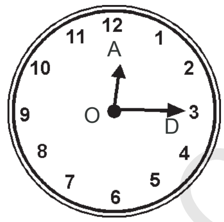
1.1 प्रतिच्छेदित र समानान्तर रेखाहरू (Intersecting and parallel lines)

तल दिइएका उदाहरणहरू छलफल गर :



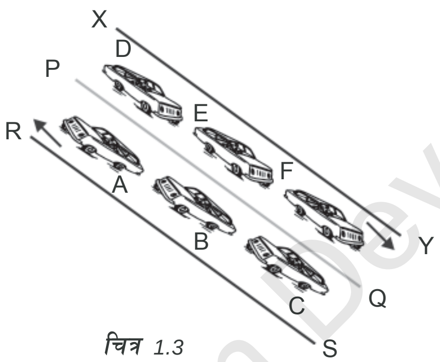
चित्र नं. 1.1

रेखाहरू AB र CD ले एकअर्कालाई बिन्दु O मा भेट्छन् । के AB र CD ले एकअर्कालाई एकैपटक बिन्दु O बाहेक अन्य बिन्दुमा पनि भेट्छन् होला ?



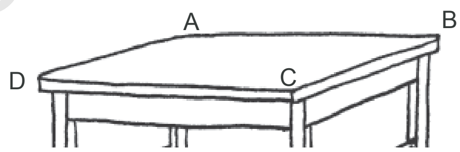
चित्र नं. 1.2

घडीको लामो सुई (minute hand) OD र छोटो सुई (hour hand) OA ले बिन्दु O मा एकअर्कालाई भेटेका छन् । के त्यही समयमा OA र OD ले अर्को बिन्दुमा पनि भेट्न सक्छन् ?



चित्र 1.3

दिइएको चित्रमा गाडीहरू A, B र C गुडिरहेको सडकको किनारा RS र गाडीहरू D, E र F गुडिरहेको सडकको किनारा XY बिचको दुरी समान छ कि छैन ?



चित्र 1.4

दिइएको चित्रमा मेचका दुई जोडी किनाराहरू क्रमशः (AD, BC) र (AB, DC) हुन् । के AD र BC एकआपसमा प्रतिच्छेदन हुन्छन् होला ? के AB र DC एकआपसमा प्रतिच्छेदन हुन्छन् होला ?

1. **प्रतिच्छेदित रेखाहरू** : आपसमा काटिने दुई ओटा रेखाहरूलाई प्रतिच्छेदित रेखाहरू भनिन्छ । माथिको चित्र 1.1 मा रेखाहरू AB र DC बिन्दु O मा प्रतिच्छेदित छन् । त्यसैगरी चित्र नं. 1.2 मा लामो सुई OD र छोटो सुई OA पनि बिन्दु O मा प्रतिच्छेदित छन् ।

2. **समानान्तर रेखाहरू** : एउटै समतल सतहका रेखाहरूलाई दुवैतिर जति लम्ब्याउँदा पनि आपसमा प्रतिच्छेदन हुँदैनन् भने त्यस्ता रेखाहरू समानान्तर हुन्छन् । चित्र नं. 1.3 मा सडकका छेउहरू (XY र RS) एकआपसमा समानान्तर छन् । यसलाई गणितीय चिह्न "//" द्वारा जनाइन्छ । त्यसैले चित्र नं. 1.4 मा AD//BC र AB//DC लेख्न सकिन्छ ।

Curriculum Development Centre

केही उदाहरणहरू

(i) तिम्रो अभ्यास पुस्तिकाका सम्मुख किनाराहरू समानान्तर छन् ।

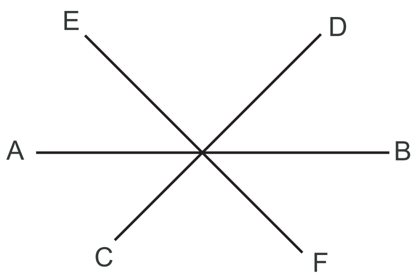
(ii) रुलरका सम्मुख किनाराहरू समानान्तर छन् ।

(iii) कालोपाटीका सम्मुख किनाराहरू समानान्तर हुन्छन् ।

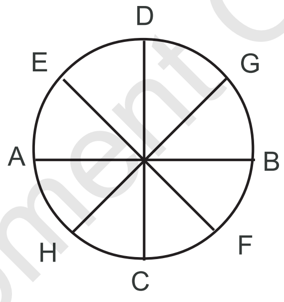
(iv) समानान्तर रेखाहरू जनाउने अन्य उदाहरणहरू कक्षाकोठाबाट सङ्कलन गर ।

अभ्यास 1.1

1. तल दिइएका प्रत्येक चित्रहरूबाट 2–2 जोडा प्रतिच्छेदित रेखाखण्डहरू लेख ।

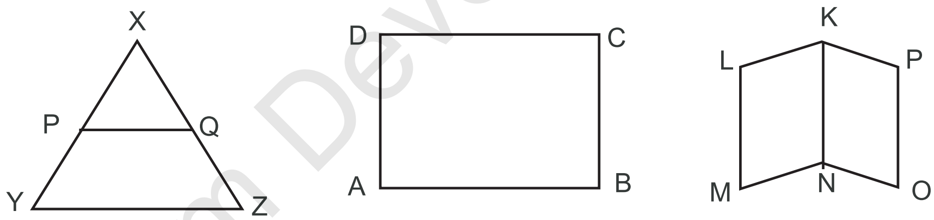


(a)

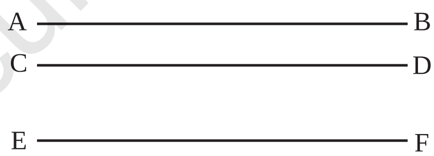


(b)

2. तल दिइएका चित्रहरूमा समानान्तर रेखाखण्डहरूको जोडा लेख ।



3. यदि AB//CD, CD//EF भए के AB//EF हुन्छ ? लेख ।



4. तल दिइएका मध्ये कुन-कुन भनाइहरू ठिक छन् लेख :

(a) दुई ओटा रेखाहरूलाई दुवैतिर बढाउँदा पनि एकआपसमा भेट्दैनन् भने ती रेखाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

(b) दुई ओटा समानान्तर रेखाखण्डहरू बिचको दुरी एकसमान हुन्छ ।

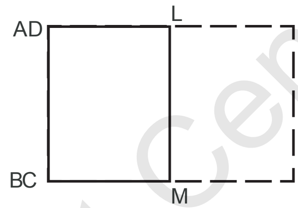
(c) दुई ओटा समानान्तर रेखाखण्डहरू प्रतिच्छेदित हुन्छन् ।

Curriculum Development Centre

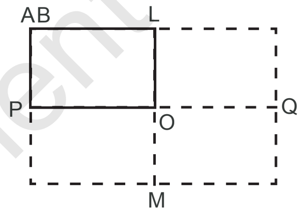
1.2 लम्ब रेखा (Perpendicular lines)

(i) चित्रमा देखाए जस्तै एउटा आयताकार कागजको टुक्रा ABCD लिउँ र D लाई A मा तथा C लाई B मा पर्ने गरी पट्याऊ ।

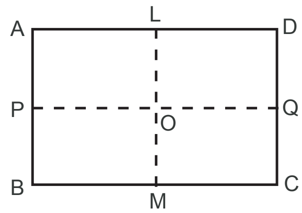
(ii) B लाई A मा तथा C लाई D मा पर्ने गरी कागज पट्याऊ ।



(iii) चित्रमा देखाएजस्तै L, M, P, O र Q नामकरण गर ।



(iv) पट्याएको कागज खोल । रेखाखण्डहरू LM र PQ को प्रतिच्छेदन, बिन्दु O मा भएको छ । के बिन्दु O मा बनेको प्रत्येक कोणको नाप 90^0 हुन्छ ? प्रोटेक्टरको सहायताले नापेर पत्ता लगाऊ ।



आपसमा समकोण भई प्रतिच्छेदन भएका रेखाहरूलाई लम्बरेखाहरू भनिन्छ । माथिको क्रियाकलापबाट प्राप्त रेखाखण्डहरू LM र PQ एकआपसमा लम्ब छन् ।

द्रष्टव्य : दुई ओटा रेखाहरू (lines), किरणहरू (rays), रेखाखण्डहरू (line segments) एकआपसमा लम्ब हुन सक्छन् । दुई ओटा रेखाखण्डहरू लम्ब हुनु भनेकै रेखाहरू पनि लम्ब हुनु हो । "$\perp$" चिह्नले दुई ओटा रेखाहरू अथवा रेखाखण्डहरू लम्ब छन् भन्ने देखाउँछ । माथिको चित्रमा $LM \perp PQ$ हुन्छ । आयताकार कागज ABCD का कुन कुन भुजाहरू आपसमा लम्ब होलान् ? नापेर जाँच ।

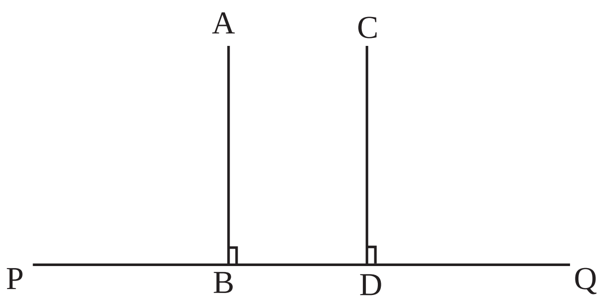
अभ्यास 1.2

1. तिम्रो ज्यामिति बाकसमा भएका सेट स्क्वायरहरूलाई कापीमा फरक फरक ठाउँमा राख र आफैं नामकरण गरी लम्ब रेखाहरूको नाम लेख ।
2. कक्षाकोठा र आफ्नो वरिपरि लम्ब हुन सक्ने रेखाखण्डका कुनै तिन ओटा उदाहरण लेख ।
3. E, F, H, L, N, T, V, X

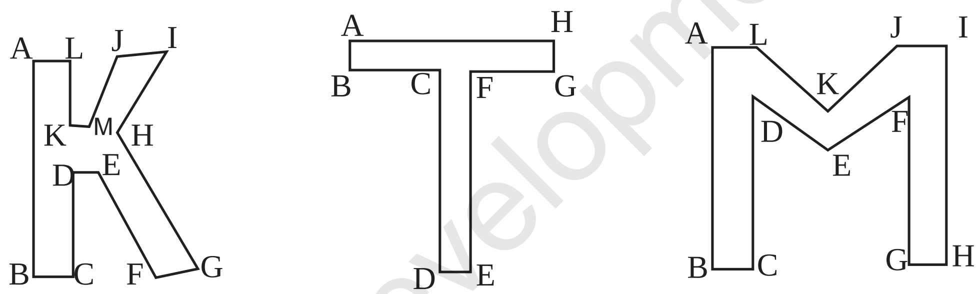
   माथिका कुन कुन अक्षरहरूले लम्ब रेखाखण्ड बनाएका छन् ? लेख ।

Curriculum Development Centre

4. तल दिइएको चित्रमा AB र CD दुवै रेखा PQ मा लम्ब छन् । के AB//CD हुन्छ ?

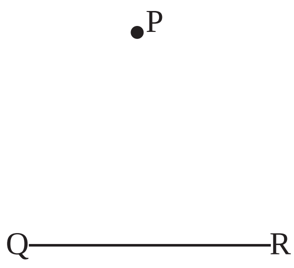


5. तलका प्रत्येक चित्रमा लम्ब हुने र समानान्तर हुने रेखाखण्डहरूका जोडा छुट्याएर लेख ।



6. (a) तलको चित्रमा QR सँग समानान्तर हुने गरी P बाट कति ओटा रेखाहरू खिच्न सकिएला ?

(b) QR मा लम्ब हुने गरी P बाट कति ओटा लम्ब खिच्न सकिएला ?



Curriculum Development Centre

1.3 समानान्तर र लम्बरेखाहरूको रचना (सेटस्क्वायर प्रयोग गरेर)
(Construction of parallel and perpendicular lines using a set-square)

(a) **समानान्तर रेखाहरूको रचना**

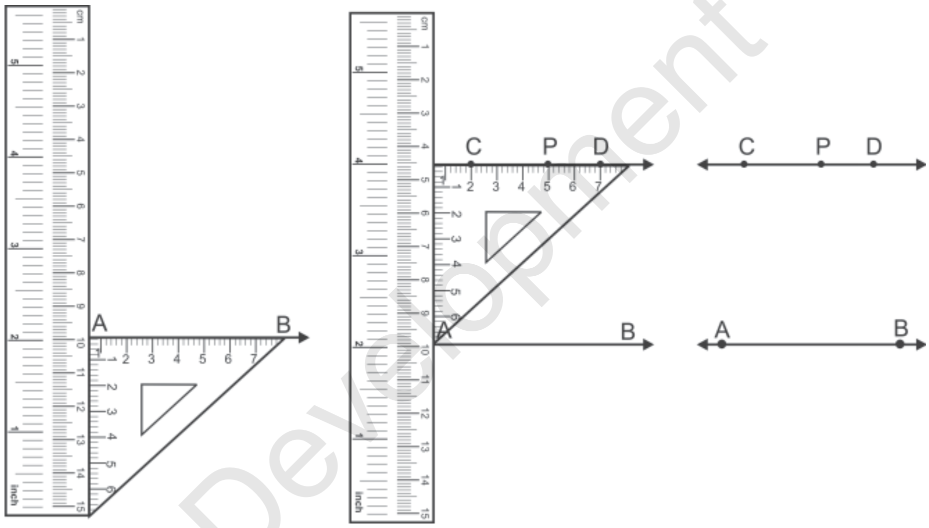
एउटा विन्दु P रेखा AB बाहिर छ । AB सँग समानान्तर हुने र P भएर जाने रेखा CD खिच्ने ।

(i) सेटस्क्वायरको समोकोणी भुजालाई AB सँग मिल्नेगरी राखौँ ।

(ii) रुलरलाई सेट-स्क्वायरको अर्को समकोणी भुजासँग सीधा हुने गरी राखौँ ।

(iii) चित्रमा देखाए जस्तै सेटस्क्वायरलाई रुलर नचल्ने गरी बिन्दु P सम्म लगौँ र CD खिचौँ ।

(iv) सेटस्क्वायरलाई हटाऔँ । यसरी CD//AB को रचना भयो ।



(b) **लम्ब रेखाहरूको रचना**

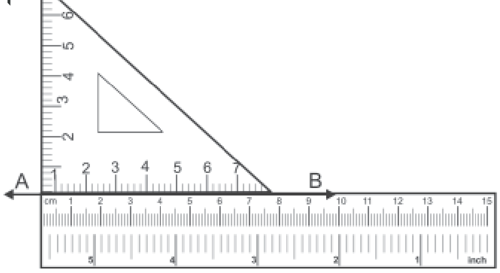
विन्दु P बाट रेखा AB मा लम्ब PQ खिचौँ जहाँ बिन्दु P रेखा AB भन्दा बाहिर छ ।

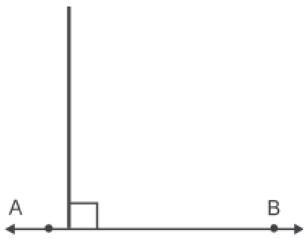
(i) रेखा AB मा पर्ने गरी रुलरलाई राखौँ ।

(ii) सेटस्क्वायरको 90° बनेको भुजालाई रुलरमा मिल्ने गरी राखौँ ।

(iii) सेटस्क्वायरको 90° बनेको अर्को भुजालाई बिन्दु P मा मिलाऔँ ।

(iv) चित्रमा देखाइएजस्तै रेखाखण्ड PQ खिचौँ र सेटस्क्वायरलाई हटाऔँ । यसरी PQ⊥AB रचना भयो ।

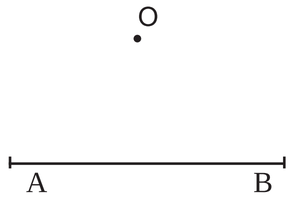


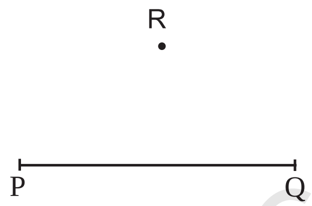


Curriculum Development Centre

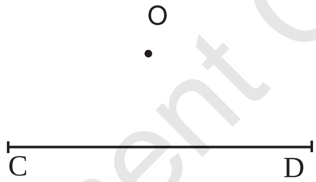
अभ्यास 1.3

1. अभ्यास पुस्तिकामा तल दिइएजस्तै गरी रेखाखण्ड खिची बिन्दु अङ्कन गर र प्रत्येक रेखाखण्डसँग समानान्तर हुने गरी दिइएको बिन्दुबाट जाने रेखाखण्डको रचना गर । (सेटस्क्वाएरको प्रयोग गरेर)

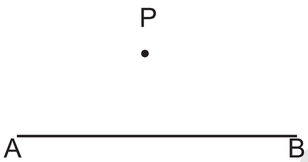
(a)


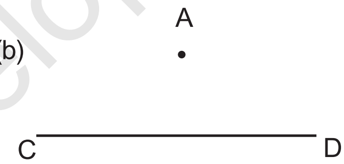
(b)


(c)

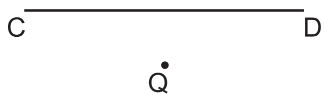

(d)


2. अभ्यास पुस्तिकामा तल दिइएजस्तै आकृति बनाई प्रत्येक रेखाखण्डमा दिइएको बिन्दुबाट जाने लम्बको रचना गर । (सेटस्क्वायरको प्रयोग गरेर)

(a)


(b)


(c)


(d)


3. आफ्नो कापीमा रेखाखण्ड PQ खिच र त्यसको बिन्दु P र Q मा लम्ब हुने गरी 3/3 से.मि. लामा लम्बहरू SP र RQ खिच । RS लाई जोड्दा केको चित्र बन्छ ?

4. P बाट QR सँग समानान्तर हुने गरी एउटा रेखाखण्ड खिच । R बाट PQ सँग समानान्तर हुने गरी अर्को रेखा खिच । यसरी खिचेको दुई ओटा रेखाहरू काटिएको बिन्दुलाई S नामकरण गर । कस्तो आकृति बन्यो ?

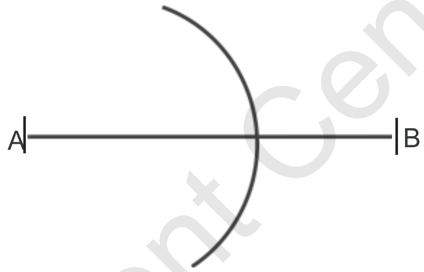
Curriculum Development Centre

1.4 कम्पासको प्रयोगबाट रेखाखण्डको लम्बार्धकको रचना :

(Construction of Perpendicular Bisector of a Line Segment using Compass)

चरण (i): दिइएको नापको रेखाखण्ड AB रुलरको सहायताले खिच ।

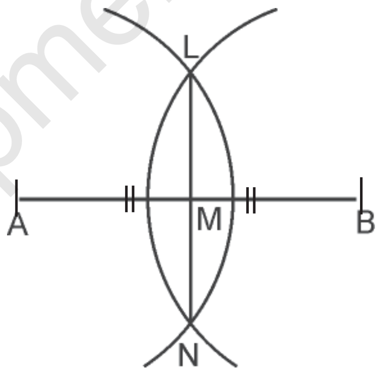
चरण (ii): दिइएको रेखाखण्डको बिन्दु A अथवा B बाट रेखाखण्डको आधाभन्दा बढी लम्बाइको चाप काट, जस्तै : बिन्दु A बाट ।



चरण (iii): A बाट लिइएको चापको लम्बाइ बराबर हुनेगरी बिन्दु B बाट पनि लेऊ । दुवै चापहरूले एकअर्कालाई बिन्दुहरू L र N मा भेट्छन् । रुलरको सहायताले L र N लाई जोड जसले रेखाखण्ड AB लाई M मा भेट्छ ।

∠BML

AM, BM ∠AML र नाप ।



त्यसैले, LN रेखाखण्ड AB को लम्बार्धक हो ।

माथिको चित्रका आधारमा निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर :

- के AM र BM बराबर छन् ?
- के विन्दुहरू A र B बाट खिचिएका चापहरू बिन्दु M मा मात्र भेटेका भए बिन्दुहरू L र N पाउन सम्भव थियो ?
- के AL र BL तथा AN र BN एक आपसमा बराबर हुन्छन् होला ?
  ∠AML, ∠BML, ∠AMN र ∠BMN मा प्रत्येकको नाप कति हुन्छ ? नापेर हेर ।
- के तिम्रो विद्यालयका कक्षा कोठाहरू तथा घरका झ्यालहरूमा लम्बार्धक हुने गरेर काठका वा फलामका छडहरू राखिएका छन् ?

कुनै रेखाखण्डको मध्य बिन्दुबाट 90^0 को कोण बनाएर गएको रेखाखण्डलाई उक्त रेखाखण्डको लम्बार्धक भनिन्छ । माथिका चित्रमा AB को लम्बार्धक LN हो ।

कुनैपनि रेखाखण्डलाई आधा हुने गरी गएको रेखाखण्डलाई अर्धक भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

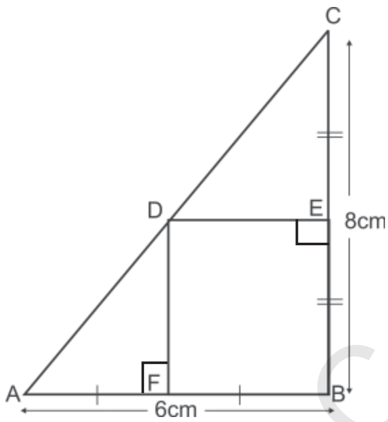
अभ्यास 1.4

1. दिइएको चित्रबाट,

   (a) भुजा BC को लम्बार्धकको नाम लेख ।

   (b) भुजा AB को लम्बार्धकको नाम लेख ।

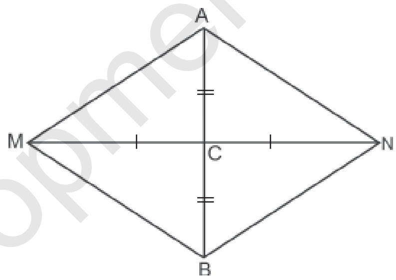
   (c) के AD र CD बराबर छन् ?



2. दिइएको चित्रमा,

   (a) के AB रेखाखण्ड MN को लम्बार्धक हो ?

   (b) के MN रेखाखण्ड AB को पनि लम्बार्धक हो ?



$5\frac{1}{2}$

3. तल दिइएका नापका रेखाखण्डहरू खिच र उक्त रेखाखण्डको लम्बार्धकको रचना गर ।

   (a) AB = 6 से.मि. (b) CD = 8 से.मि.

   (c) PQ = 9 से.मि. (d) EF = 9 से.मि.

   (e) MN = 7.5 से.मि. (f) GM = 8.5 से.मि.

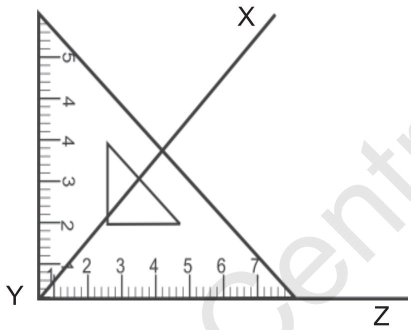
   (g) RS = से.मि. (h) KL = $7\frac{1}{2}$ से.मि.

Curriculum Development Centre

1.5 कोणहरूको प्रकार (Types of Angles)

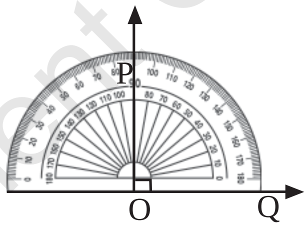
(क) न्यूनकोण (Acute angle)

0^0 भन्दा ठुलो र समकोणभन्दा सानो (90^0 भन्दा सानो) कोणलाई न्यूनकोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle$XYZ समकोणभन्दा सानो भएकाले न्यूनकोण हो ।



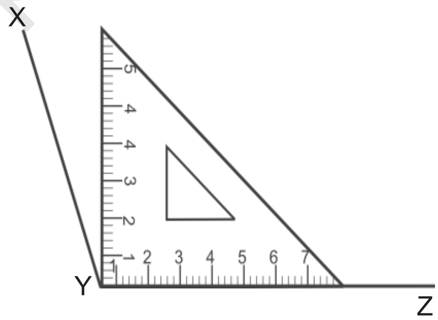
(ख) समकोण (Right angle)

90^0 नाप भएको कोणलाई समकोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle$POQ = 90^0 भएकाले कोण POQ समकोण हो ।



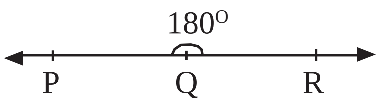
(ग) अधिककोण (Obtuse angle)

90^0 भन्दा ठुलो तर 180^0 भन्दा सानो कोणलाई अधिककोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle$XYZ कोण 90^0 भन्दा ठुलो भएकाले $\angle$XYZ अधिककोण हो ।



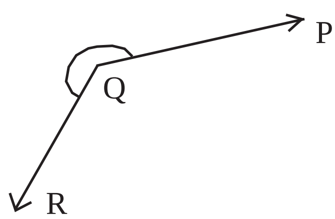
(घ) सरलकोण (Straight angle)

180^0 नाप भएको कोणलाई सरलकोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle$PQR को नाप 180^0 भएकाले यो एउटा सरलकोण हो ।



(ङ) बृहत्कोण (Reflex angle)

180^0 भन्दा ठुलो र 360^0 भन्दा सानो कोणलाई बृहत्कोण भनिन्छ । $\angle$PQR को नाप 180^0 भन्दा ठुलो भएकाले यो एक बृहत्कोण हो ।

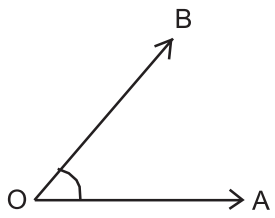


Curriculum Development Centre

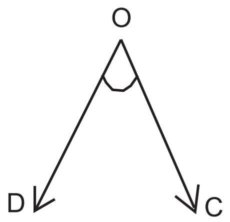
अभ्यास 1.5

1. तल दिइएका प्रत्येक कोणहरू न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण, सरलकोण वा बृहत्कोण के के हुन्, छुट्याऊ र लेख ।

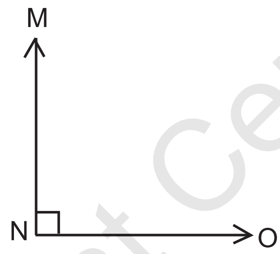
(a)



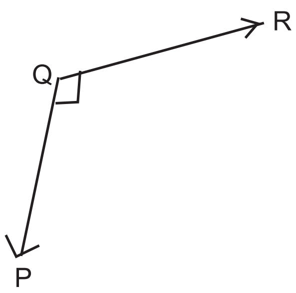
(b)



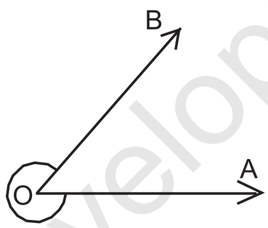
(c)



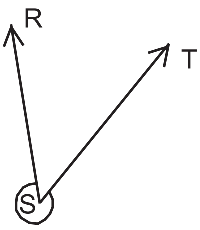
(d)



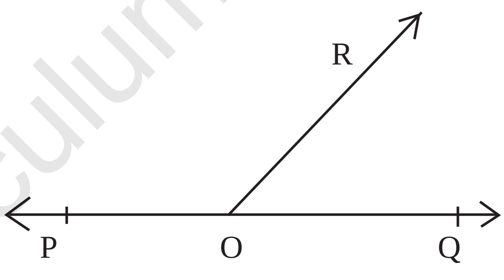
(e)



(f)



2. चित्रमा भएका अधिककोण, न्यूनकोण र सरलकोणको नाम लेख ।



3. तलका भनाइ ठिक वा बेठिक के हुन्, छुट्याऊ :

(क) $\angle X$, 0^0 भन्दा ठुलो र 90^0 भन्दा सानो छ । X न्यूनकोण हो ।

(ख) $\angle Y$, 0^0 भन्दा ठुलो र 90^0 भन्दा सानो छ । Y को एउटामात्र मान हुन्छ ।

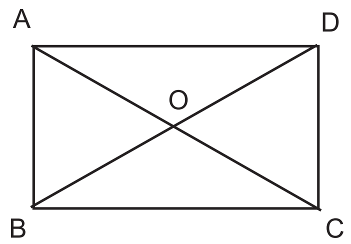
Curriculum Development Centre

(ग) $\angle Z$, 90^0 र 180^0 का बिचमा पर्छ । Z ले अधिककोण जनाउँछ ।

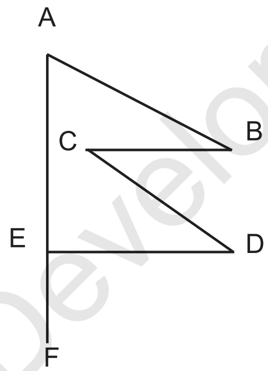
(घ) $\angle P$, 90^0 सँग बराबर छ । P ले समकोण जनाउँछ ।

(ङ) $\angle L$, 180^0 सँग बराबर छ । $\angle L$ अधिककोण हो ।

4. चित्रमा भएका अधिककोणहरूको नाम लेख ।



5. नेपालको झन्डाको रेखाङ्कनमा भएका अधिककोण, न्यूनकोण, समकोण, सरलकोण र बृहत्कोण छुट्याऊ ।



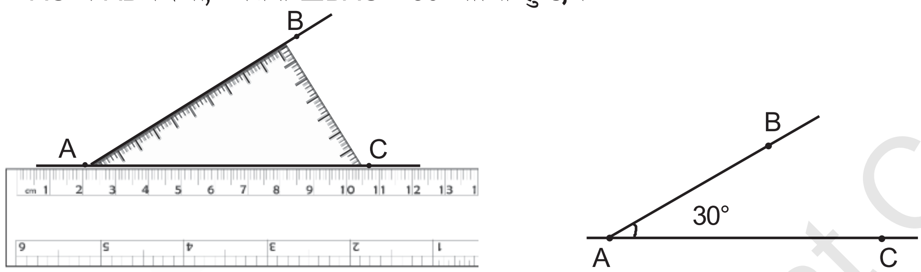
6. दुई ओटा सिन्काहरूको सहयोगबाट न्युनकोण, समकोण, अधिककोण र सरलकोण बनाऊ ।

Curriculum Development Centre

1.6 कोणको रचना र नाप (Construction of Angle of given Measurement)

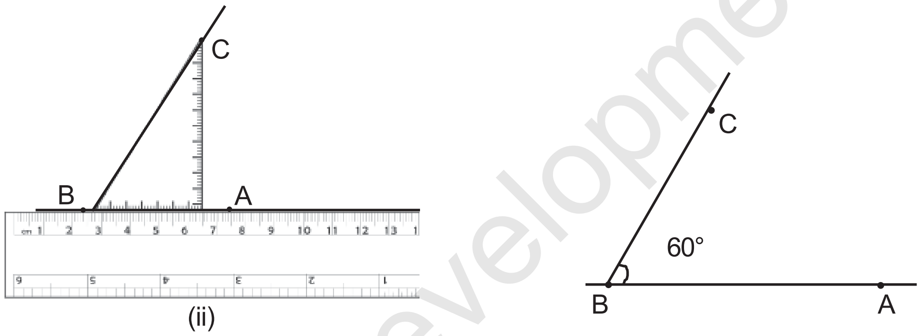
1. सेटस्क्वायरको प्रयोगद्वारा 30°, 45°, 60° र 90° का कोणहरूको रचना

चित्र नं. (i) मा देखाइए जस्तै सेटस्क्वायर (set-square) लाई राखौँ । रुलरको सहायताले रेखा AC र AB खिचौँ, यसरी ∠BAC = 30° प्राप्त हुन्छ ।



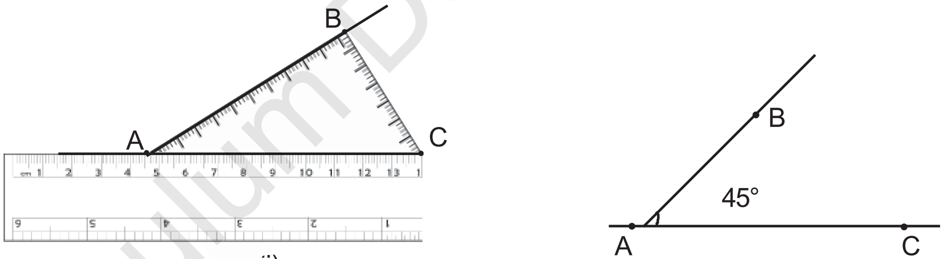
(i)

चित्र नं. (ii) मा (i) को जस्तै क्रियाकलाप दोहोऱ्याऔँ र ∠CBA = 60° को रचना गरौँ ।

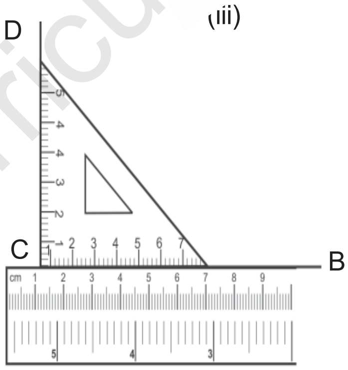


(ii)

चित्र नं. (iii) मा (i) को जस्तै क्रियाकलाप दोहोऱ्याऔँ र ∠BAC = 45° को रचना गरौँ ।

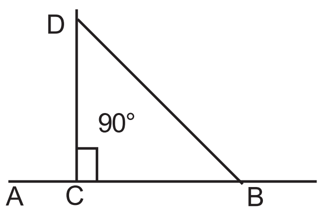


(iii)



(iv)

चित्र नं. (iv) मा (i) को जस्तै क्रियाकलाप दोहोऱ्याऔँ र ∠DCB = 90° को रचना गरौँ ।

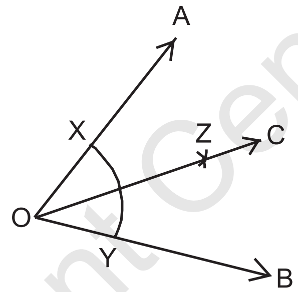


Curriculum Development Centre

2. **कोणको अर्धकको रचना (Construction of bisecter of the Angle)**

O बाट OA र OB काटिने गरी चाप XY खिच । X र Y बाट सोही चाप लिएर Z मा काट । O र Z जोडी C सम्म लम्ब्याऊ ।

चित्रमा $\angle$AOB नाप । त्यसैगरी $\angle$AOC र $\angle$BOC पनि नाप । रेखा OC ले $\angle$AOB लाई बराबर दुई भागमा बाँडेको छ । यसरी एउटा कोणलाई दुई बराबर भागमा बाँड्ने रेखालाई कोणको अर्धक भनिन्छ । चित्रमा $\angle$AOB को अर्धक OC हो । कम्पासको सहायताले कुनै पनि कोणको अर्धक खिच्ने तरिका चित्रमा देखाइएको छ ।

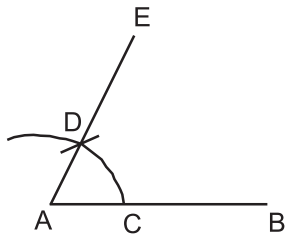


3. **कम्पासको प्रयोगद्वारा कोणको रचना**

60^0 को कोणको रचना

एउटा रेखाखण्ड AB खिच । A मा कम्पासको सहयोगले एउटा चाप खिच । सो चापले रेखा AB को C मा काट्छ । C बाट अघिकै चाप लिई पहिले खिचिएको चापलाई D मा काट । A र D जोडी E सम्म लम्ब्याऊ ।

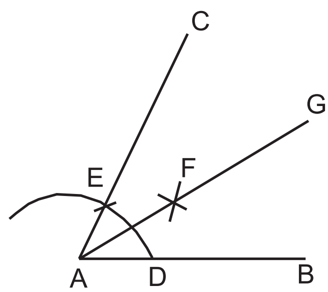
$\angle$EAB = 60^0 हुन्छ ।



30^0 को कोणको रचना

60^0 को कोणको रचना गर । सोही चापले D र E बाट F मा काट्ने । काटिएको बिन्दु F र A जोडी G सम्म लम्ब्याऊ । यहाँ $\angle$CAG = $\angle$GAB =

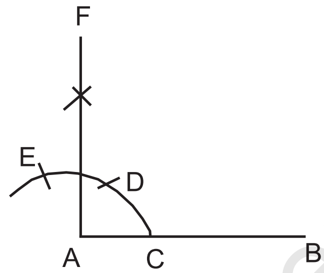
$\frac{1}{2}\times 60^\circ = 30^0$ हुन्छ ।



Curriculum Development Centre

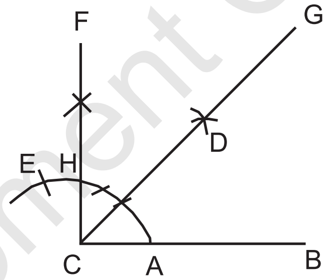
90^0 कोणको रचना

एउटा रेखाखण्ड AB खिच। बिन्दु A बाट कुनै चाप लिई 60° को चिह्न D लगाऊ र फेरि D बाट 60° को चाप E काटी 120^0 कोणको रचना गर। D र E बाट खिचिएका बराबरी चाप काटिएको बिन्दु र A जोडी F सम्म लम्ब्याऊ। यहाँ $\angle FAB = 90^0$ हुन्छ।



45^0 को कोणको रचना

90^0 को कोणको रचना गर। बिन्दुहरू H र A बाट बराबरी चापले काटिएको विन्दु D र C जोडी G सम्म लम्ब्याऊ। यहाँ $\angle BCG = 45^0$ हुन्छ।



अभ्यास 1.6

1. **कम्पास र सेटस्क्वायरको प्रयोग गरी तल दिइएका कोणहरूको रचना गर :**

(a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 45°

2. **रेखाखण्ड AB को विन्दु A मा कम्पासको सहायताले 60° को कोण रचना गर र यसलाई आधा गर।**

3. **एउटा रेखाखण्ड AB को बिन्दु A मा 30° र बिन्दु B मा 90° को कोण बनाऊ। कोणहरू बनाउने रेखाहरू काटिएको बिन्दुलाई C नाम देऊ र कोण C नाप।**

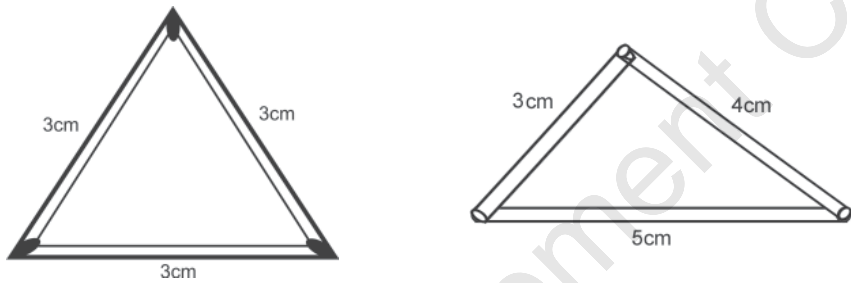
Curriculum Development Centre

एकाइ 2

त्रिभुज, चतुर्भुज र बहुभुज
(Triangle, Quadrilateral and Polygon)

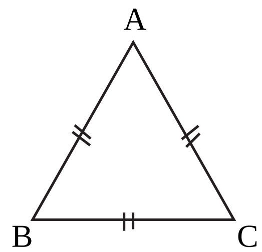
2.1 भुजा र कोणका आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण (Classification of triangles by sides and angles)

बराबर वा फरक फरक नापका तिन ओटा गहुँको छ्वाली वा बाँसको पाइप वा जुस पाइप वा अन्य काठका टुक्रा वा डटपेनका खोक्राहरू लेऊ र विभिन्न प्रकारका त्रिभुजहरू बनाऊ ।



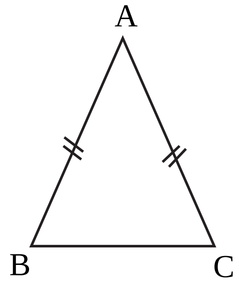
भुजाहरूका आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण

(क) **समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle)**



कुनै त्रिभुजका तिन ओटा भुजाहरूको लम्बाइ बराबर छ भने त्यो त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज भनिन्छ । त्रिभुज ABC मा AB = BC = AC भएकाले यो समबाहु त्रिभुज हो ।

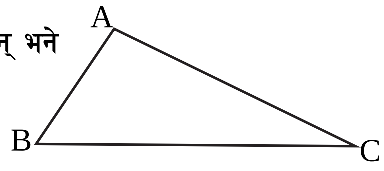
(ख) **समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle)**



त्रिभुजका कुनै दुई ओटा भुजाको लम्बाइ बराबर छ भने त्यस्तो त्रिभुजलाई समद्विबाहु त्रिभुज भनिन्छ । चित्रमा ΔABC मा AB = AC भएकाले यो त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

Curriculum Development Centre

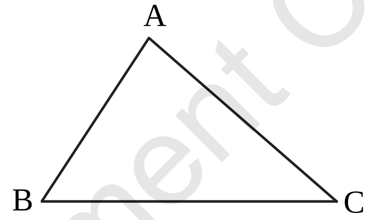
(ग) **विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle)**



कुनै त्रिभुजका तिनै ओटा भुजाहरू फरक फरक नापका छन् भने त्यस्तो त्रिभुजलाई विषमबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।
ΔABC मा कुनै पनि भुजा बराबर छैनन् ।
त्यसैले ΔABC विषमबाहु त्रिभुज हो ।

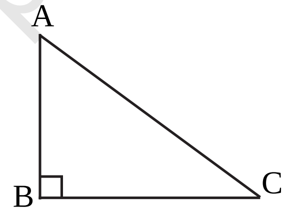
कोणहरूका आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण

(क) **न्यूनकोणी त्रिभुज (Acute-angled triangle)**



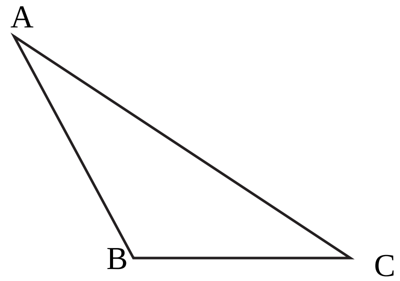
कुनै त्रिभुजका तिन ओटै कोणहरू 90^0 भन्दा साना छन् अर्थात् न्यूनकोण छन् भने त्यस्तो त्रिभुजलाई न्यूनकोणी त्रिभुज भनिन्छ । ΔABC मा $\angle$A, $\angle$B र $\angle$C सबै 90^0 भन्दा साना छन् । त्यसैले ΔABC एउटा न्यूनकोणी त्रिभुज हो ।

(ख) **समकोणी त्रिभुज (Right-angled triangle)**



कुनै त्रिभुजको एउटा कोण समकोण छ भने त्यो त्रिभुज समकोणी त्रिभुज हुन्छ । ΔABC मा $\angle$B = 90^0 भएकाले उक्त त्रिभुज समकोणी त्रिभुज हो ।

(ग) **अधिककोणी त्रिभुज (Obtuse angled triangle)**
त्रिभुजका तिन ओटा कोणमध्ये एउटा कोण 90^O भन्दा ठुलो छ भने त्यो त्रिभुज अधिककोणी त्रिभुज हुन्छ ।



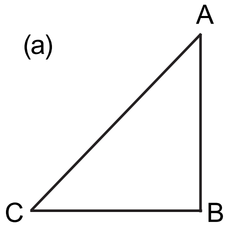
ΔABC मा $\angle$B, 90^0 भन्दा ठुलो भएकाले ΔABC अधिककोणी त्रिभुज हो ।

Curriculum Development Centre

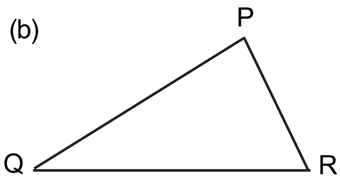
अभ्यास 2.1

1. **तल दिइएका प्रत्येक त्रिभुजका भुजाहरू नाप र भुजाका आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण गर :**

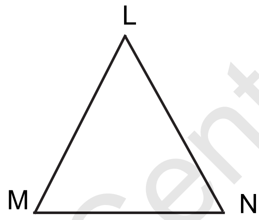
(a)



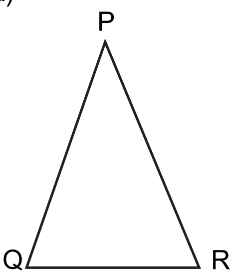
(b)



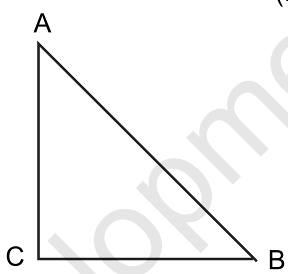
(c)



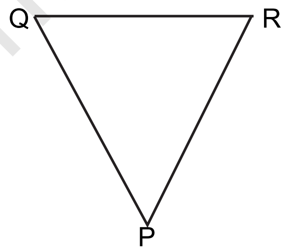
(d)



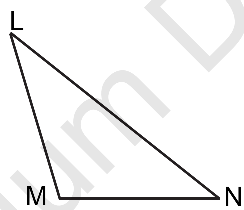
(e)



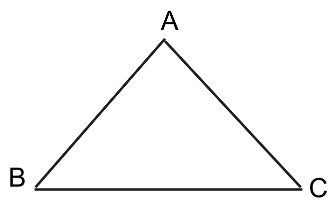
(f)



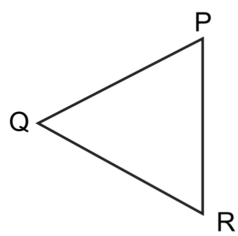
(g)



(h)

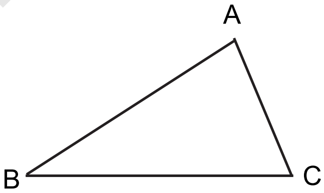


(i)

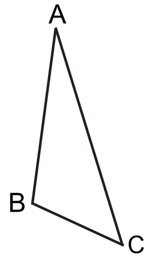


2. **तल दिइएका त्रिभुजलाई कोणका आधारमा वर्गीकरण गर :**

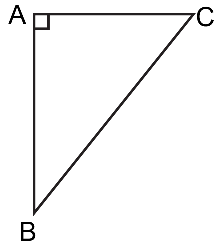
(a)



(b)

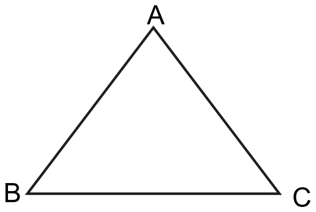


(c)

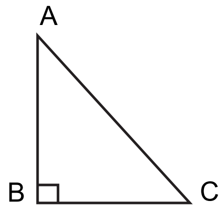


Curriculum Development Centre

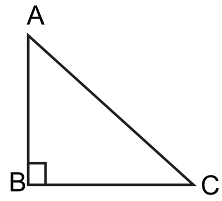
(d)



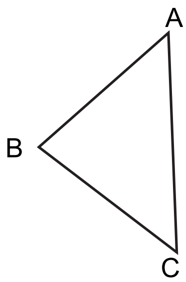
(e)



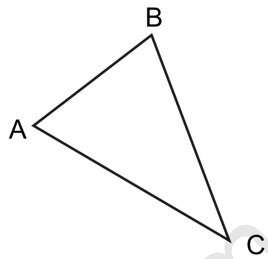
(f)



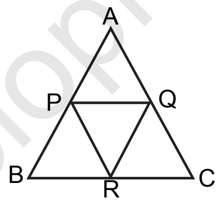
(g)



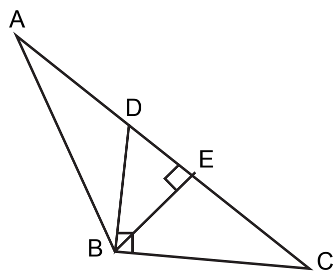
(h)



3. दिइएको चित्रमा कति ओटा त्रिभुजहरू छन् ?



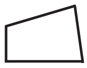
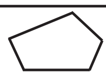
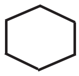
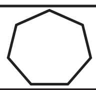
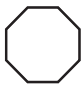
4. दिइएको चित्रबाट एक एक ओटा समकोणी, न्यूनकोणी र अधिककोणी त्रिभुजको नाम लेख ।



Curriculum Development Centre

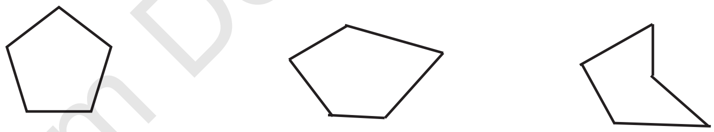
2.2 बहुभुज (Polygons)

तलको तालिकामा केही बहुभुजहरू, तिनीहरूका भुजाको सङ्ख्या र नाम दिएको छ :

चित्र	भुजाको सङ्ख्या	नाम
	3	त्रिभुज (Triangle)
	4	चतुर्भुज (Quadrilateral)
	5	पञ्चभुज (Pentagon)
	6	षड्भुज (Hexagon)
	7	सप्तभुज (Heptagon)
	8	अष्टभुज (Octagon)

तिन वा तिनभन्दा बढी भुजाहरूले बनेको सरल बन्द समतलीय आकृतिलाई बहुभुज भनिन्छ ।

यदि बहुभुजका सबै भुजाहरू बराबर छन् र भित्री कोणहरू पनि बराबर छन् भने त्यस्तो बहुभुजलाई नियमित बहुभुज (Regular Polygon) भनिन्छ । 5 ओटा भुजाले बनेका नियमित र अनियमित बहुभुजको चित्र हेर ।

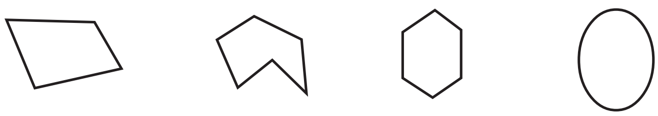


नियमित   अनियमित   अनियमित

द्रष्टव्य : नियमित त्रिभुज भन्नु नै समबाहु त्रिभुज हो । त्यस्तै नियमित चतुर्भुज भन्नु नै वर्ग हो ।

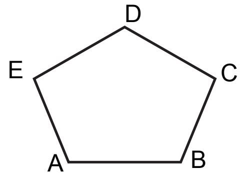
अभ्यास 2.2

1. तल दिइएका चित्रहरूमध्ये कुन बहुभुज होइन ? लेख ।



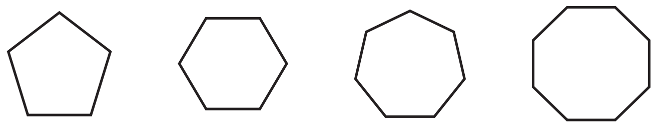
(क)   (ख)   (ग)   (घ)

2. दिइएको बहुभुजको नाम लेख र यसभित्र बन्न सक्ने 2 ओटा त्रिभुज र 2 ओटा चतुर्भुजको नाम लेख ।



Curriculum Development Centre

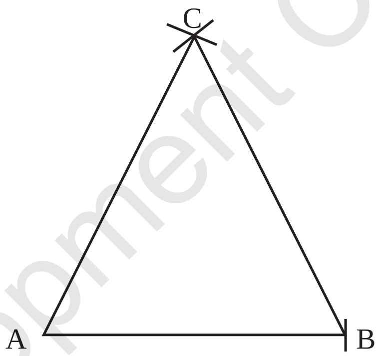
3. तल दिइएका बहुभुजहरूका भुजाहरूको सङ्ख्या र बहुभुजहरूको नाम लेख ।



(क) (ख) (ग) (घ)

4. तिम्रो वरिपरिका बहुभुज आकारको कुनै पाँच ओटा वस्तुहरूको नाम लेख ।

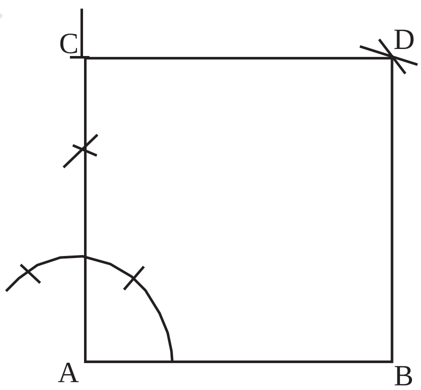
2.3 कम्पास र रुलरको प्रयोगद्वारा समबाहु त्रिभुज र वर्ग (एउटा भुजाको लम्बाइ दिइएमा) को रचना



कम्पास र रुलर प्रयोग गरेर समबाहु त्रिभुजको रचना :

4 से.मि. को एउटा रेखा खण्ड AB खिच । सो रेखा खण्डमा कम्पास मिलाई A बाट माथितिर 4 से.मि. लम्बाइको एउटा चाप खिच । त्यस्तै गरी उत्तिकै चाप B बाट पनि काटेर C बिन्दु नामकरण गर । A र C तथा B र C जोड । ABC एउटा समबाहु त्रिभुज हो ।

कम्पास र रुलर प्रयोग गरेर वर्गको रचना :



4 से.मि. को एउटा रेखाखण्ड AB खिच । A मा 90^0 को कोण रचना गर । AC = 4 से.मि. चिह्न लगाऊ । C बाट कम्पासको मद्दतले 4 से.मि. को चाप खिच । त्यसैगरी B बाट 4 से.मि. को चाप खिची C बाट खिचिएको चापलाई काट । काटिएको बिन्दुलाई D नाम देऊ । C र D तथा B र D जोड । ABDC एउटा वर्ग हो ।

अभ्यास 2.3

1. **निम्न लिखित नापका भुजाहरू भएको समबाहु त्रिभुजको रचना गर :**

(क) भुजा = 3 से.मि. (ख) भुजा = 4.5 से.मि.

(ग) भुजा = 5 से.मि. (घ) भुजा = 6 से.मि.

2. **निम्न लिखित नापका भुजाहरू भएको वर्गको रचना गर :**

(क) भुजा = 3 से.मि. (ख) भुजा = 4 से.मि.

(ग) भुजा = 4.5 से.मि. (घ) भुजा = 6 से.मि.

Curriculum Development Centre

एकाइ 7

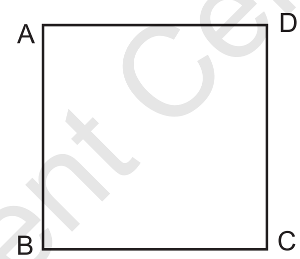
परिमिति र क्षेत्रफल (Perimeter and Area)

7.1. वर्ग र आयतको परिमिति (Perimeter of Square and Rectangle)

वर्ग र वर्गको परिमिति (Square and Perimeter of Square)

क्रियाकलाप 1

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी कक्षामा छलफल गर :



- सँगैको चित्रमा भुजाहरू AB, BC, CD र DA नाप । के सबै भुजाहरू बराबर छन् ?
- त्यस्तै भित्री कोणहरू $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ र $\angle D$ पनि नाप । के प्रत्येक कोणहरू एक समकोण (=90°) को नापका छन् ?
- के चतुर्भुज ABCD एउटा वर्ग हो ? कसरी ? छलफल गर ।
- वर्ग ABCD को वरिपरिको घेराको लम्बाइको नाप कति होला ?

यहाँ, सबै भुजाहरू बराबर छन् । अर्थात् AB = BC = CD = DA = 3cm छन् । मानौं, वर्ग ABCD को एउटा भुजाको लम्बाइ l छ भने AB = BC = CD = AD = l = 3cm हुन्छ ।

अब, वर्ग ABCD को परिमिति भन्नाले वरिपरिका चार ओटै भुजाहरू AB, BC, CD र AD को नापको योगफल हुन्छ ।

तसर्थ, वर्ग ABCD को परिमिति (P) = AB + BC + CD + DA हुन्छ ।

= 3cm + 3cm + 3cm + 3cm

= 12cm

अब के 12cm लाई 4 x 3cm = $4l$ लेख्न सकिन्छ कसरी ? छलफल गर । किनकि l = 3cm छ ।

- के वर्गको परिमिति पत्ता लगाउने अन्य उपायहरू छन् ?
- के यसका लागि कुनै सूत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

निष्कर्ष : कुनै पनि वर्गको परिमिति त्यस वर्गको एउटा भुजाको लम्बाइको चार गुणा हुन्छ ।

अब माथिको तथ्यलाई सङ्केत सूत्रमा लेख्ने प्रयास गरौँ ।

वर्गको परिमितिलाई P र लम्बाइलाई l मान्दा,

वर्गको परिमिति (P) = ($l + l + l + l$) एकाइ = $4l$ एकाइ हुन्छ ।

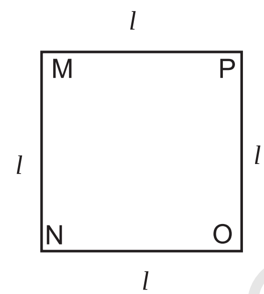
तसर्थ, सूत्र : वर्गको परिमिति (P) = $4l$ हुन्छ ।

सबै भुजाहरू बराबर भएको तथा प्रत्येक भित्री कोणहरू एक समकोण (=90°) भएको चतुर्भुजलाई वर्ग भनिन्छ । परिमिति भनेको वरिपरिको घेराको लम्बाइ हो । तसर्थ वर्ग ABCD को वरिपरिको घेरा (AB + BC + CD + DA) को लम्बाइलाई वर्ग ABCD को परिमिति भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

क्रियाकलाप 2

एउटा वर्गाकार कागज लेऊ/बनाऊ। त्यसलाई चित्रमा दिए जस्तै गरी MNOP नाम देऊ।



प्रत्येक भुजा नापेर चित्रमा दिए जस्तै गरी ℓ = ... मा वास्तविक नाप राख।

अब वर्ग MNOP को परिमिति नापी सूत्र प्रयोग नगरिकन तथा सूत्र प्रयोग गरेर पत्ता लगाऊ।

क्रियाकलाप 3

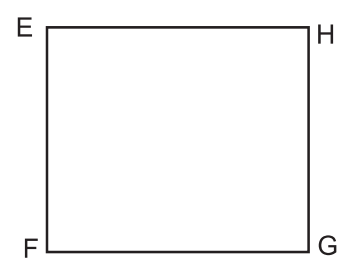
कुनै एउटा वर्गाकार सतह भएको वस्तु खोज। कापीमा सङ्केत चित्र पनि बनाऊ। त्यस वस्तुको वर्गाकार सतहको परिमिति सूत्रको प्रयोग गरी पत्ता लगाऊ। आफ्नो कार्य साथी तथा शिक्षकलाई देखाई छलफल गर।

2. आयत र आयतको परिधि (Rectangle and Perimeter of Rectangle)

क्रियाकलाप 4

सँगैको चित्रमा भुजाहरू EF, FG, GH र HE नाप। के EF = HG भयो ? त्यस्तै के HE = FG भयो ?

- त्यस्तै गरी भित्री कोणहरू ∠E, ∠F, ∠G र ∠H पनि नाप। के प्रत्येक कोणहरू एक समकोण (= 90°) छन् ?
- सँगैको चित्रमा सम्मुख भुजाहरू EF = HG = 3cm र HE = FG = 3.5 cm छन्। त्यस्तै भित्री कोणहरू ∠E = ∠F = ∠G = ∠H = 90° छन्।



यहाँ, चतुर्भुज EFGH का सम्मुख भुजाहरू बराबर छन् र प्रत्येक भित्री कोणहरू एक समकोण (=90°) का छन्। त्यसैले चतुर्भुज EFGH एउटा आयत हो।

अब, आयत EFGH को परिमिति भन्नाले वरिपरिका चार ओटै भुजाहरू EF, FG, GH र EH को योगफल हुन्छ।

तसर्थ, आयत EFGH को परिमिति (P) = EF + FG + GH + HE हुन्छ।

= 3cm + 3.5cm + 3cm + 3.5cm

= 13cm

अब के 13cm लाई 2(3.5+3)cm = 2(ℓ+*b*) एकाइ लेख्न सकिन्छ, कसरी ? छलफल गर। किनकि ℓ = 3.5cm र b = 3cm छ।

Curriculum Development Centre

- के आयतको परिमिति पत्ता लगाउने अन्य उपायहरू छन् ?
- के यसका लागि कुनै सूत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

निष्कर्ष : कुनै पनि आयतको परिमिति त्यस आयतको लम्बाइ र चौडाइको योगफलको दुई गुणा वा दोब्बर हुन्छ ।

अब माथिको तथ्यलाई सङ्केत सूत्रमा लेख्ने प्रयास गरौँ ।

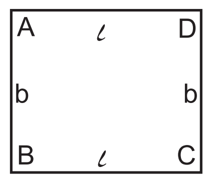
आयतको परिमितिलाई P, लम्बाइ l, र चौडाइलाई b मान्दा,

आयतको परिमिति (P) = ($l + b + l$ + b) एकाइ = $2l + 2b = 2(l+b)$ एकाइ हुन्छ ।

तसर्थ, सूत्र : आयतको परिमिति (P) = $2(l+b)$ हुन्छ ।

सम्मुख भुजाहरू बराबर भई सबै भित्री कोणहरूको नाप एक समकोण (=90°) भएको चतुर्भुजलाई आयत (rectangle) भनिन्छ । कुनै पनि आयतका वरिपरिका घेरा अर्थात् चार ओटै भुजाहरूको योगलाई त्यस आयतको परिमिति भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 5



एउटा आयताकार कागज लेऊ/बनाऊ । त्यसलाई चित्रमा दिए जस्तै गरी नाम देऊ । सूत्र प्रयोग नगरिकन तथा सूत्र प्रयोग गरेर दुवै तरिकाले उक्त आयताकार कागजको परिमिति पत्ता लगाऊ ।

क्रियाकलाप 6

तिम्रो घर वा विद्यालयमा एउटा आयताकार वस्तु खोज । त्यसको परिमिति सूत्र प्रयोग नगरिकन तथा सूत्र प्रयोग गरेर पत्ता लगाऊ । सङ्केत चित्र पनि बनाऊ । आफ्नो कार्य साथी र शिक्षक समक्ष देखाई छलफल गर ।

उदाहरण 1

छिरिङसँग भएको एउटा वर्गाकार रुमालको लम्बाइ 15cm भए त्यस रुमालको परिमिति पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, दिएअनुसार वर्गाकार रुमालको लम्बाइ (l) = 15cm

परिमिति (P) = ?

सूत्रअनुसार, वर्गको परिमिति (P) = $4l$ = 4 x 15cm = 60 cm

अत: त्यस वर्गाकार रुमालको परिमिति = 60cm हुन्छ ।

उदाहरण 2

सृजनासँग परिमिति 120 मिटर भएको एक टुक्रा वर्गाकार जग्गा छ । यसको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

समाधान : यहाँ, दिइएअनुसार जग्गा (वर्ग) को परिमिति (P) = 120m

लम्बाइ (l)= ?

Curriculum Development Centre

सूत्रअनुसार, वर्गको परिमिति (P) = 4ℓ

अथवा, 120m = 4ℓ

अथवा, 4ℓ = 120m

अथवा $\ell = \frac{120}{4} = 30$ m

तसर्थ, उक्त जग्गाको लम्बाइ 30 मिटर छ ।

उदाहरण 3

आइते तामाङले आफ्नो 40 m लम्बाइ भएको वर्गाकार तरकारी बारीको वरिपरि पर्खालमाथि 7 फन्को काँडेतार बनाउनलाई कति काँडेतार चाहिन्छ ?

समाधान

प्रश्नमा दिइएअनुसार,

वर्गाकार तरकारी बारीको लम्बाइ (ℓ) = 40 m

परिमिति (P) = ?

7 फन्को बारीको लम्बाइ = ?

सूत्रअनुसार,

वर्गका क्षेत्रको परिमिति (P) = 4ℓ = 4 x 40 m = 160 m

तर 7 फन्को काँडेतार लगाउन चाहिने तार = 7 x P = 7 x 160 m = 1120 m

तसर्थ, 7 फन्को बार लगाउन 1120 m काँडेतार चाहिन्छ ।

उदाहरण 4

लखन चौधरीसँग 900 m लम्बाइ र 600 m चौडाइ भएको एउटा आयतकार आँपको बगैँचा छ । त्यस वगैँचाको वरिपरिको घेरा (परिमिति) कति होला ?

समाधान

यहाँ दिइएअनुसार,

आँपको बगैँचाको लम्बाइ (ℓ) = 900m

चौडाइ (b) = 600m

परिमिति (P) = ?

सूत्रअनुसार,

आयताकार वस्तु वा क्षेत्रको परिमिति (P) = $2(\ell+b)$ =2(900m+600m) = 3000m = 3km

तसर्थ, उक्त बगैँचाको परिमिति 3km छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 5

शर्मिलाको एउटा आयताकार नर्सरीको परिमिति 200 मिटर छ । यदि त्यस नर्सरीको लम्बाइ 60 मिटर भए चौडाइ कति होला ?

समाधान

यहाँ प्रश्नमा दिइएअनुसार,

नर्सरीको परिमिति (P) = 200m

लम्बाइ (l) = 60m

चौडाइ (b) = ?

सूत्रानुसार,

आयताकार वस्तु वा क्षेत्रको परिमिति (P) = 2 (l + b)

अथवा, 200m = 2(60m + b)

अथवा, 200m = 120m + 2b

अथवा, 2b = 200m - 120m

अथवा, $b = \frac{80m}{2}$

अथवा, b = 40m

तसर्थ, उक्त नर्सरीको चौडाइ 40 मिटर हुन्छ ।

उदाहरण 6

कलादेवी राईले 20m लम्बाइ र 15m चौडाइ भएको तरकारी बारीको वरिपरि 5 फन्को सिङ्गो निगालाको बार लगाउने विचार गरिछन् । उनले कति निगालो किन्नुपर्ला ?

समाधान

प्रश्नानुसार, उक्त आयताकार तरकारी बारीको लम्बाइ (l) = 20m

चौडाइ (b) = 15m

परिमिति (P) = ?

5 फन्को निगालाको लम्बाइ = ?

सूत्रअनुसार,

आयताकार क्षेत्रको परिमिति (P) = 2(l + b) = 2(20m + 15m) =2(35m) = 70m

अब 5 फन्को निगालाको बार लगाउनुपर्ने भएकाले,

जम्मा निगालाको लम्बाइ l = 5 x P = 5 x 70m = 350m

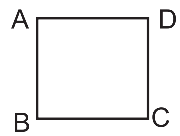
तसर्थ, उक्त तरकारी बारीमा बार लगाउन 350 मिटर निगालो चाहिन्छ ।

Curriculum Development Centre

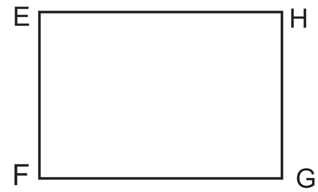
अभ्यास 7.1

1. तल दिइएका प्रत्येक आकृतिको लम्बाइ र चौडाइ नापी सूत्र प्रयोग गरेर परिमिति निकाल :

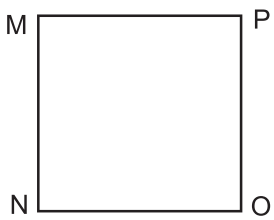
(क)



(ख)



(ग)



(घ)

2. तल दिइएका वर्गाकार वा आयतकार वस्तुको परिमिति निकाल :
   (क) वर्गाकार कागज, लम्बाइ = 13cm
   (ख) वर्गाकार रुमाल, लम्बाइ = 18cm
   (ग) आयताकार टेबल, लम्बाइ = 73cm, चौडाइ = 56cm
   (घ) आयताकार करेसाबारी, लम्बाइ = 5m, चौडाइ = 3m
3. एउटा वर्गाकार नर्सरीको लम्बाइ 7m छ भने,
   (क) उक्त क्षेत्रको वरिपरिको घेरा कति हुन्छ ?
   (ख) यदि सो नर्सरीको वरिपरि 8 फन्को काँडेतार लगाउनुपरेमा कति काँडेतार चाहिएला ?
4. एउटा वर्गाकार रुमालको परिमिति **225cm** रहेछ भने त्यस रुमालको लम्बाइ कति होला ?
5. एउटा आयताकार टेबलको लम्बाइ **78cm** र चौडाइ **65cm** छ भने त्यस टेबलको परिमिति पत्ता लगाऊ ।
6. कान्छी दनुवारको **650m** परिमिति भएको आयताकार तरकारी बारीको लम्बाइ **205 m** रहेछ भने चौडाइ कति होला ?
7. श्याम वि.क.ले एउटा **5m** लम्बाइ भएको एउटा वर्गाकार घडेरी किने छन् :
   (क) उनको सो घडेरीको परिमिति कति होला ?
   (ख) उनले 8 फन्को डोरीले बेर्नुपर्दा कति डोरी चाहिएला ?
8. धनियाँले आफ्नो **23m** लम्बाइ र **21m** चौडाइ भएको घरको वरिपरिको कम्पाउन्डको पर्खाल लगाउन चाहिछन् :
   (क) उक्त कम्पाउन्डको परिमिति कति होला ?
   (ख) उनले कम्पाउन्डको माथि वरिपरि 4 फन्को काँडेतार लगाउनका लागि कति लामो काँडेतार किनेर ल्याउनुपर्ला ?
9. माथि उल्लिखित सङ्ख्या 1 देखि 8 सम्म दिइए जस्तै गरी आफैँ प्रश्नहरू निर्माण गरी थप अभ्यास गर । आफ्नो कार्यलाई साथी तथा शिक्षकसँग छलफल गर ।

Curriculum Development Centre

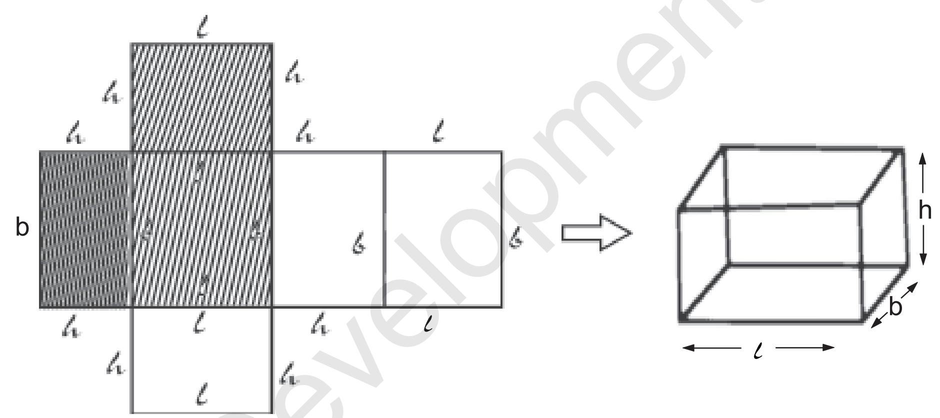
7.2 षड्मुखा र घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल
(Total Surface area of Cuboid and Cube)

हामीले कक्षा 6 मा षड्मुखा र घनको परिचय, खोक्रा नमुनाहरू र आयतन सम्बन्धी सरल समस्याहरूबारे छलफल गरिसकेका छौँ । अब हामी यस पाठमा षड्मुखा र घनको सतहको क्षेत्रफलका बारेमा छलफल गर्ने छौँ । यसका साथै यस सम्बन्धी व्यावहारिक समस्याहरू समाधान गर्ने सिप पनि हासिल गर्ने छौँ ।

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

1. षड्मुखाको पुरा सतहको क्षेत्रफल

षड्मुखाको जाली बनाई निम्नानुसार लम्बाइ (l), चौडाइ (b), र उचाइ (h), छुट्याएर लेख । अनि तलका प्रश्नमा छलफल गर ।



(क) माथिका दुई ओटा चित्रमा के सम्बन्ध छ ? (जाली र नमुनामा)

(ख) षड्मुखाको जाली कति ओटा आयत मिलेर बनेको रहेछ ?

(ग) षड्मुखाका सबै आयत बराबर छन् कि छैनन् ?

(घ) कति ओटा आयतको क्षेत्रफल l x b छन् ?

(ङ) कति ओटा आयतको क्षेत्रफल l x h छन् ?

(च) कति ओटा आयतको क्षेत्रफल b x h छन् ?

(छ) चित्रमा छाया परेको भागले जालीको कति भाग जनाउँछ ?

(ज) चित्रमा छाया परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

रुलरले लम्बाइ (l), चौडाइ (b), उचाइ (h), नापेर प्रत्येक सतहको क्षेत्रफल निकाल । सबै सतहको क्षेत्रफल जोडेर निकाल । यही कुल क्षेत्रफल नै सिङ्गो षड्मुखाको सतह क्षेत्रफल हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

माथिका दुई ओटा चित्रहरूमा पहिलो षड्मुखाको जाली र नमुना दोस्रो हो । षड्मुखाको जाली जम्मा 6 ओटा आयत मिलेर बनेको छ । प्रत्येक आमनेसामनेका दुई दुई जोडी आयतहरू समानान्तर र बराबर छन् । सबै आयत बराबर छैनन् ।

चित्रमा 2 ओटा आयतको क्षेत्रफल $l \times b$ छ ।

त्यस्तै 2 ओटा आयतको क्षेत्रफल $l \times h$ छ ।

र 2 ओटा आयतको क्षेत्रफल $b \times h$ छ ।

यहाँ षड्मुखाको सतह क्षेत्रफल (A) = सबै आयतको क्षेत्रफलको योगफल हुन्छ ।

अब, छाया परेको भागको क्षेत्रफल $(A)= (l \times b) + (l \times h) + (b \times h)$ हुन्छ ।

त्यसैले पुरै जालीको क्षेत्रफल $(A)= 2(l \times b)+2(l \times h) +2(b \times h) = 2(lb + lh + bh)$ हुन्छ ।

सूत्र : तसर्थ कुनै पनि षडमुखाको सतहको क्षेत्रफल $(TSA)= 2(lb+lh+bh)$ वर्ग एकाइ हुन्छ । जहाँ, षड्मुखाको l = लम्बाइ, b = चौडाइ, र h = उचाइ ।

माथिको क्रियाकलापमा बनाएको षडमुखाको लम्बाइ (l), चौडाइ (b), र उचाइ (h) छुट्याएर लेख । उक्त षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल सूत्र प्रयोग गरी निकाल । उत्तर जाँचेर पनि हेर ।

2. **घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल**

लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएको षड्मुखालाई घन (Cube) भनिन्छ । त्यसैले घनमा $l = b = h$ हुन्छ ।

अब सूत्र : षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल $(A) = 2(lb + lh + bh)$ मा $l = b = h = a$ (मानौँ) हुँदा :

घनको क्षेत्रफल $(A) = 2(aa+aa+aa) = 2(3a^2) = 6a^2$

सूत्र : घनको सतह क्षेत्रफल $(A)=6a^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ, जहाँ घनको एउटा भुजाको लम्बाइ = a एकाइ छ ।

उदाहरण 1

एउटा बाकसको लम्बाइ (l) = 42cm, चौडाइ (b)=39cm र उचाइ (h) = 28cm छ । अब त्यसको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ दिएअनुसार, उक्त बाकसको लम्बाइ (l)= 42cm

चौडाइ (b)= 39cm

र उचाइ (h)= 28cm छ ।

बाकस षड्मुखा हो ।

सूत्रअनुसार, षड्मुखाको पुरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A.)$=2(lb+lh+bh)$ वर्ग एकाइ

$= 2[(42 \times 39) + (42 \times 28) + (39 \times 28)]cm^2$

$= 2(1638 + 1176 + 1092)cm^2$

$= 2 \times 3906cm^2$

$= 7812cm^2$

अत: उक्त बाकसको पुरा सतहको क्षेत्रफल $7812cm^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा सलाईको बट्टाको लम्बाइ 4cm, चौडाइ 3cm र पुरा सतहको क्षेत्रफल $45cm^2$ रहेछ । अब त्यसको उचाइ पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहँ प्रश्नानुसार, उक्त सलाईको बट्टाको लम्बाइ (l) = 4cm

चौडाइ (b) = 3cm

पुरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $45cm^2$

र उचाइ (h) = ?

यहाँ, सलाईको बट्टा एउटा षड्मुखा हो ।

सूत्रानुसार, षड्मुखाको पुरा सतहको क्षेत्रफल (A)$= 2(lb+lh+bh)$ वर्ग एकाइ

अथवा, $45cm^2 = 2[(4x3)+(4xh)+(3xh)]$

अथवा, $45 = 2(12+4h+3h)$

अथवा, $45 = 2(12+7h)$

अथवा, $45 = 24+14h$

अथवा, $14h = 45-24$

अथवा, $h = \frac{21}{14} = 1.5\,cm$

अत: उक्त सलाईको बट्टाको उचाइ 1.5cm हुन्छ ।

उदाहरण 3

पेम्बाले एउटा किनारा 15.4cm भएको घनको नमुना बनाइछन् । उक्त घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ दिएअनुसार, घनको एउटा भुजाको लम्बाइ (a)= 15.4cm

पुरा सतहको क्षेत्रफल (A)= ?

सूत्रअनुसार, घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल $(A)= 6a^2$

$= 6x(15.4)^2cm^2$

$=(6x237.16)cm^2$

$=1422.96cm^2$

अत : उक्त घनको नमुनाको पुरा सतहको क्षेत्रफल $(A)=1422.96cm^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा घनाकार वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल $(A) = 4056cm^2$ लेखिएको रहेछ । अब त्यस वस्तुको एउटा भुजाको लम्बाइ कति होला ?

समाधान

प्रश्नमा दिएअनुसार, उक्त घनाकार वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफल $(A)= 4056cm^2$

र एउटा भुजाको लम्बाइ (a) = ?

सूत्रअनुसार, घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल $(A)= 6a^2$ वर्ग एकाइ

अथवा, $4056cm^2 = 6a^2$

अथवा, $a^2= \frac{4056}{6} cm^2$

अथवा, $a^2 = 676cm^2$

अथवा, $a = \sqrt{676cm^2}$

अथवा, $a = 26cm$

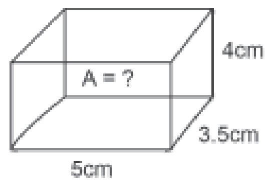
अत : त्यस घनाकार वस्तुको एउटा भुजाको लम्बाइ 26cm हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

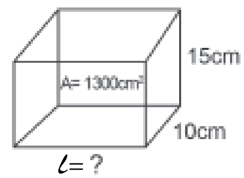
अभ्यास 7.2

1. तल चित्रमा दिइएका प्रत्येक ठोस वस्तुको सोधिएको कुरा पत्ता लगाऊ (A = षड्मुखाको पुरा सतहको क्षेत्रफल)

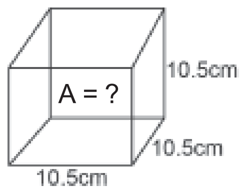
(क)



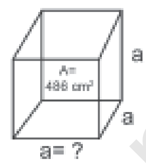
(ग)



(ख)



(घ)



(ङ) माथि क र ख मा दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्या बनाऊ । साथीसँग मिलेर पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(च) माथि ग र घ मा दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्या बनाऊ र साथीसँग मिलेर अज्ञात भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

2. तलका प्रत्येक षड्मुखाको पुरा सतहको क्षेत्रफल निकाल :

(क) l = 5cm, b = 3cm र h = 4.5cm

(ख) l = 6.2m, b = 3.3m र h = 6.8m

(ग) माथि क र ख मा जस्तै गरी दुई दुई ओटा समस्या बनाऊ/खोज । साथीसँग मिलेर आपसमा प्रत्येक षड्मुखाको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

3. तलका प्रत्येक अवस्थामा घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :

(क) a = 6cm (ख) a = 3.5cm (ग) a = 12m

(घ) माथि क, ख, र ग मा जस्तै 5 ओटा समस्याहरू बनाऊ । साथीसँग प्रत्येक घनको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

4. तलका प्रत्येक अवस्थामा षड्मुखाको नदिइएको भुजा पत्ता लगाऊ :

(क) A = $350cm^2$, l = ?, b = 10cm र h = 2.5cm

(ख) A= $136.24cm^2$, l = 4.2cm, b= 3.6cm र h=?

5. तलका प्रत्येक अवस्थामा घनको एउटा भुजा पत्ता लगाऊ :

(क) A= $600cm^2$, a =?

(ख) A = $5400cm^2$, a =?

Curriculum Development Centre

6. एउटा षड्मुखाको पुरा सतहको क्षेत्रफल 6.3 m^2 लम्बाइ 1.5m र उचाइ 1.2m छ भने,

(क) उक्त षड्मुखाको चौडाइ कति होला ?

(ख) उक्त षड्मुखालाई कोठामा राख्दा कोठाको कति सतह ओगट्ला ?

7. एउटा बाकसको लम्बाइ 125cm, चौडाइ 85cm र उचाइ 70cm छ भने,

(क) उक्त बाकसको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(ख) त्यस बाकसले कोठाको कति सतह ढाक्ला ?

8. एउटा प्राथमिक उपचार बाकस (First Aid Box) को लम्बाइ 18cm, चौडाइ 10cm र उचाइ 12cm छ भने,

(क) उक्त बाकस जनाउने जाली (Net) को चित्र बनाऊ ।

(ख) उक्त जालीका आधारमा पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(ग) उक्त बाकसलाई टेबलमाथि राख्दा टेबलको कति सतह ढाक्ला ?

(घ) उक्त बाकसको बिर्को च्यातिएर हराएछ । अब बिर्को नभएको बाकसको पुरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

9. उचाइ 7cm र चौडाइ 8cm भएको एउटा चकको बट्टालाई टेबलमा राख्दा टेबुलको सतह 80cm^2 ढाकेछ भने,

(क) उक्त बट्टाको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

(ख) उक्त बट्टाको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

10. माथि प्रश्न 6 देखि 9 सम्म दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्या बनाई हिसाब गर । उक्त हिसाब साथी साथीबिच साटेर एकअर्काको समाधान गर । छलफल गरी साथीको उत्तर जाँचेर पनि हेर ।

Curriculum Development Centre

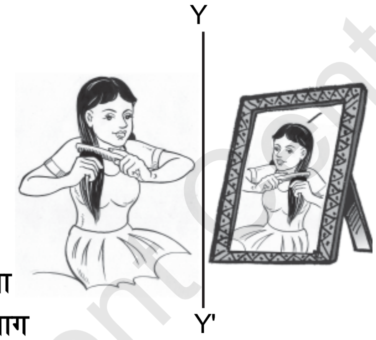
एकाइ 8

स्थानान्तरण (Transformation)

8.1 परावर्तन (Reflection)

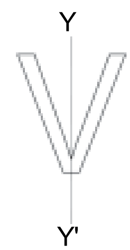
तलका क्रियाकलाप तथा तथ्यहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) चित्रमा के देख्छौ ?



चित्रमा परावर्तन (reflection) लाई देखाइएको छ । यहाँ छात्राको प्रतिबिम्ब (image) ऐनामा देखाइएको छ । तिमीले पनि ऐनाको नजिक र टाढा गई हेर । प्रतिबिम्ब परावर्तन पनि टाढा र नजिक हुन्छ ।

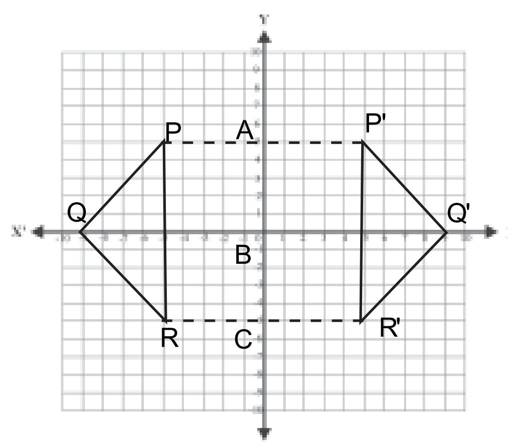
(ख) अङ्ग्रेजी वर्णमालाको ठुलो अक्षर V लाई बिन्दु रेखा YY' मा पट्याउँदा ठिक दुई बराबर भागमा पट्टिन्छ । यहाँ प्रत्येक भाग एकअर्काको प्रतिबिम्ब वा परावर्तन हो ।



(ग) त्रिभुज PQR लाई बिन्दु रेखा YY' मा परावर्तन गराउँदा ∆P'Q'R' बनेको छ । यहाँ PP', QQ' र RR' रेखा परावर्तन अक्ष YY' मा लम्ब छन् । त्यस्तै PA = AP', QB = BQ' र RC = CR' पनि हुन्छ । यहाँ PQR र प्रतिबिम्ब P'Q'R' अनुरूप छन् ।

माथिका प्रत्येक क्रियाकलापमा प्रत्येक आकृति र प्रतिबिम्ब परावर्तन अक्षबाट बराबर दुरीमा परेका छन् । कसरी ?

माथिका 3 ओटा क्रियाकलापका आधारमा परावर्तनका केही तथ्यहरू पत्ता लगाउने कोसिस गरौँ ।



1. कुनै पनि वस्तु वा चित्रको प्रतिबिम्बलाई परावर्तन भनिन्छ । माथि चित्रहरूमा क्रमश: केटी, V को आधा भाग र P'Q'R' सबै बिन्दु रेखा YY' मा परावर्तन भएका छन् ।
2. जुन रेखामा प्रतिबिम्ब बनेको छ त्यसलाई परावर्तन अक्ष (axis of reflection) भनिन्छ । चित्रहरूमा बिन्दु रेखा YY' परावर्तनको अक्ष हो ।
3. वास्तविक आकृति परावर्तन भई प्रतिबिम्ब बन्छ ।
४. वास्तविक आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् । अर्थात् वास्तविक आकृति र प्रतिबिम्बको क्षेत्रफल पनि आपसमा बराबर हुन्छन् ।
5. कुनै पनि ज्यामितीय चित्र वा आकृतिलाई परावर्तन गर्दा आकृति र प्रतिबिम्ब परावर्तन अक्षबाट बराबर दुरीमा पर्छन् ।

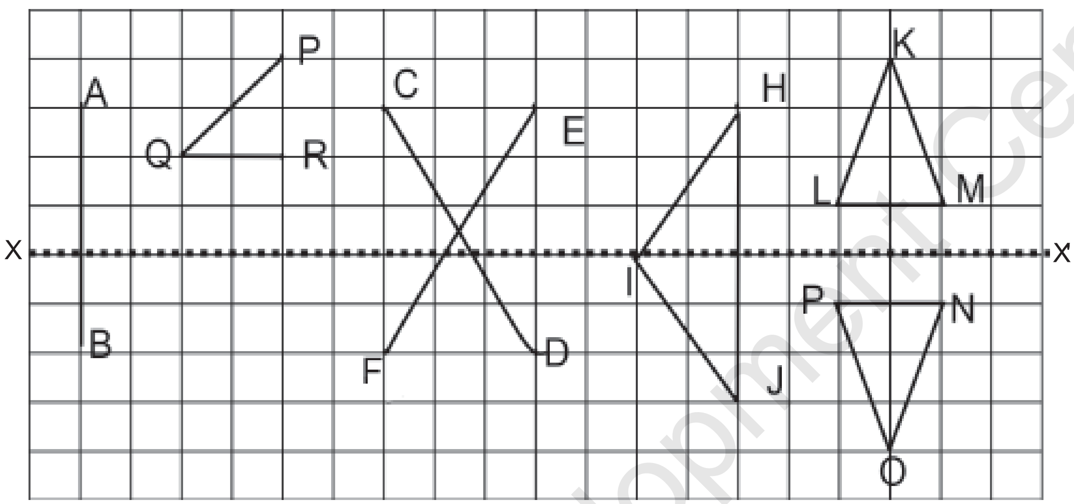
Curriculum Development Centre

अभ्यास 8.1

1. तलका ज्यामितीय चित्रहरूलाई परावर्तन अक्ष XX' बिन्दुरेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब लेख :

   (क) बिन्दु A (ख) बिन्दु P (ग) रेखा PQ (घ) ∠PQR (ङ) बिन्दु E (च) ∠CGE

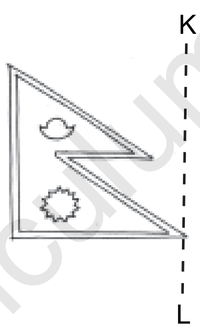
   (छ) रेखा IH (ज) बिन्दु I (झ) ∠KLM (ञ) ∠LKM



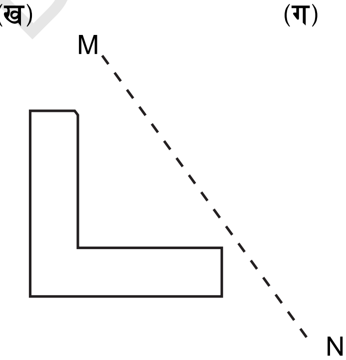
2. माथि प्रश्न नं. (क) देखि (ञ) सम्म दिए जस्तै अरू समस्या बनाई साथीसँग छलफल गरी शिक्षकको सहयोगमा आकृतिको प्रतिबिम्ब चिन्ने खेल खेल ।

3. तलका प्रत्येक आकृतिलाई परावर्तनको अक्षसँग परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ :

(क)



(ख)



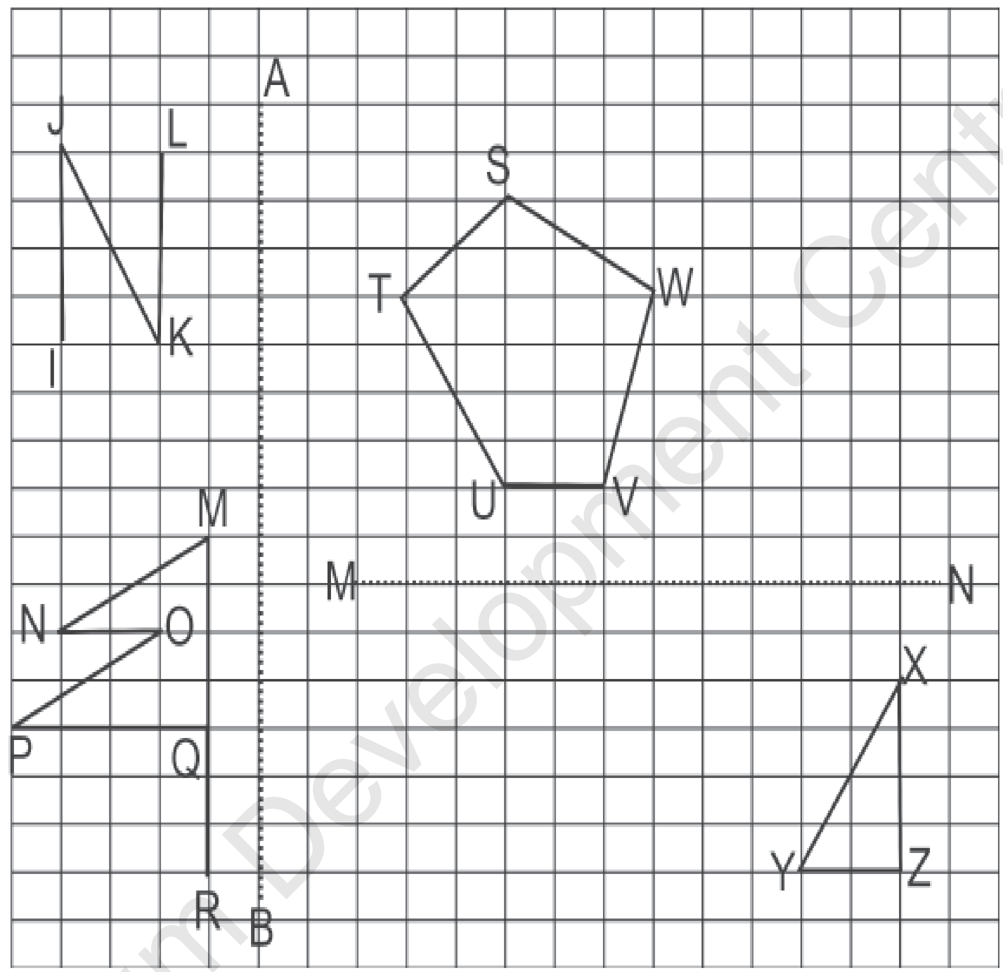
(ग)

(ज) माथि दिए जस्तै गरी कुनै 5 ओटा फरक फरक आकृतिहरू र परावर्तन अक्ष बनाई समस्या बनाऊ । साथीसँग छलफल गरी आपसमा परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ ।

नोट : प्रत्येक आकृतिका शीर्षबिन्दुहरूदेखि परावर्तनको अक्षमा लम्ब खिचेर (सेट स्क्वायरले वा कम्पासले) प्रतिबिम्ब बनाऊ ।

Curriculum Development Centre

4. ग्राफ पेपरमा कुनै रेखा AB र MN लाई परावर्तनका अक्षहरू मानी तलका आकृतिका प्रतिबिम्ब बनाऊ :



Curriculum Development Centre

8.2 परिक्रमण (Rotation)

तलका क्रियाकलापहरूमा छलफल गर :

1. **परिक्रमण** (**Rotation**)

(क) धारा खोल्दा र बन्द गर्दा के गर्नुपर्छ ?

(ख) दाँत माझ्ने मन्जनको बिर्को खोल्दा र बन्द गर्दा के गरिन्छ ?

(ग) साँचोले ताल्चा खोल्दा र बन्द गर्दा के गरिन्छ ?

(घ) ढोका खोल्दा र बन्द गर्दा के गर्नुपर्छ ?

(ङ) घडी मिलाउनका लागि सुईहरूलाई के गर्नुपर्छ ?

माथि उल्लिखित कार्यहरू गर्दा वस्तुलाई निश्चित बिन्दुमा घुमाउने कार्य गरिन्छ । यो घुमाउने काम होसियारीका साथ आवश्यक मात्रामा गर्नुपर्छ । यसरी वस्तुहरूको घुमाइको प्रक्रियालाई नै परिक्रमण भनिन्छ ।

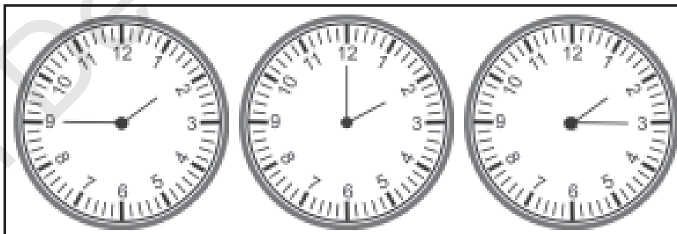
माथिका छलफलका आधारमा परिक्रमणको परिभाषा लेख । साथीसँग छलफल गरी निष्कर्ष निकाल ।

होसियारीका साथ आवश्यक मात्रामा निश्चित बिन्दुमा वस्तुहरूको घुमाइलाई परिक्रमण भनिन्छ ।

2. **परिक्रमणका प्रकार**

(क) दिइएका घडीका चित्रहरू हेर र छलफल गर :

- दोस्रो घडीमा कति बजेको छ ?
- यसलाई घडीको दिशामा 15 मिनेट परिक्रमण गर्दा कति हुन्छ ?
- अब दोस्रो घडीलाई घडीको विपरीत दिशामा 15 मिनेटले परिक्रमण गर्दा कति हुन्छ ?



चित्र नं. 1 *चित्र नं. 2* *चित्र नं. 3*

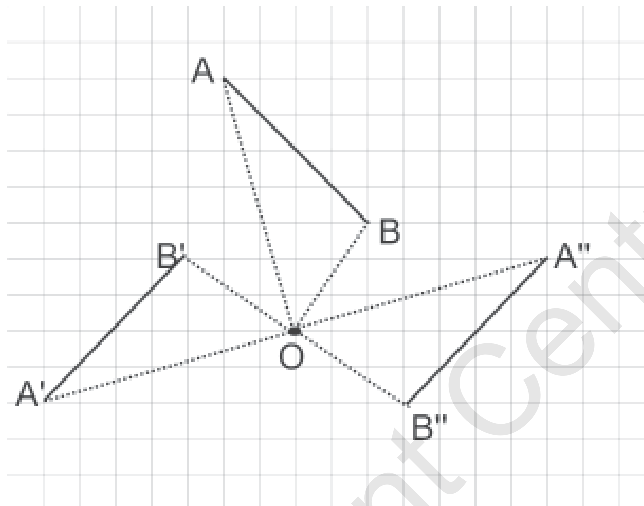
माथि दोस्रो घडीमा 2.00 बजेको छ । यसलाई घडीको दिशामा 15 मिनेट (90°) मा परिक्रमण गर्दा 2.15 बजेको छ । यस्तो घडीको सुईको चालअनुसारको परिक्रमणलाई ऋणात्मक परिक्रमण (negative rotation) भनिन्छ ।

त्यसै गरी यदि दोस्रो घडीलाई घडीको विपरीत दिशामा 15 मिनेट (90°) मा परिक्रमण गरियो भने 1.45 बजेको हुन्छ । यस्तो परिक्रमणलाई धनात्मक परिक्रमण (positive rotation) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

(ख) **ज्यामितीय चित्रको परिक्रमण**

चित्र नं. (4) मा रेखा AB लाई विन्दु O को घडीको सुईको विपरीत दिशा वा धनात्मक दिशामा 90° को परिक्रमण गर्दा बनेको प्रतिबिम्ब A' B' हो । त्यस्तै रेखा AB लाई बिन्दु O को घडीको दिशा वा ऋणात्मक दिशामा 90° को परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब A" B" हो ।



चित्र नं. 4

3. परिक्रमणका तथ्यहरू

माथिका छलफलहरूबाट परिक्रमणका बारेमा के के तथ्यहरू पत्ता लगाउन सक्छौ ? लेख । ती तथ्यहरूलाई साथीसँग छलफल गर । तल दिइएका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

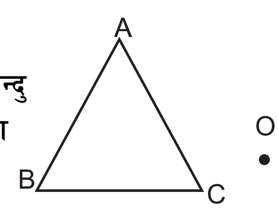
- कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई दिइएको कोण र दिशामा दिइएको बिन्दुको वरिपरि घुमाएर स्थानान्तरण गर्नुलाई परिक्रमण (rotation) भनिन्छ ।
- घडीको सुईको दिशामा भएको परिक्रमणलाई ऋणात्मक परिक्रमण (negative rotation) भनिन्छ ।
- घडीको सुईको विपरीत दिशामा भएको परिक्रमणलाई धनात्मक परिक्रमण (positive rotation) भनिन्छ ।
- परिक्रमणले समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई कुनै बिन्दुबाट एउटै दिशा र उत्तिकै कोणमा स्थानान्तरण गर्दछ ।

उदाहरण 1

तल दिइएको चित्र ABC लाई बिन्दु O को वरिपरि 60° को धनात्मक दिशामा परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ ।

समाधान

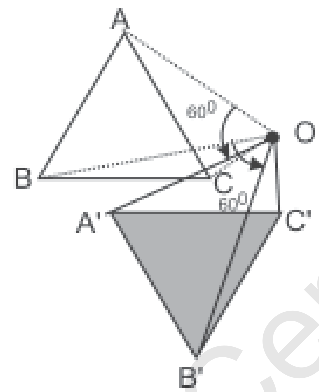
तरिका



1. A र O जोडौँ । O लाई परिक्रमण बिन्दु मानेर OA अर्धव्यास लिएर बिन्दु A लाई 60° को धनात्मक दिशा (घडीको विपरीत दिशा) मा परिक्रमण गरी A को प्रतिबिम्ब A' पत्ता लगाऔँ ।

Curriculum Development Centre

2. B र O जोडौँ । O लाई केन्द्र मानेर OB अर्धव्यास लिएर बिन्दु B लाई 60° को धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी B को प्रतिबिम्ब B' पत्ता लगाऔँ ।

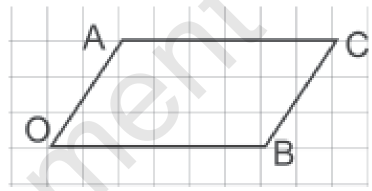


3. C र O जोडौँ। O लाई केन्द्र मानेर OC अर्धव्यास लिएर बिन्दु C लाई 60° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी C को प्रतिबिम्ब C' पत्ता लगाऔँ ।

4. रुलरको सहायताले A'B'C' क्रमैसँग जोडौँ । अब बन्ने चित्र ΔA'B'C' दिइएको ΔABC को आवश्यक धनात्मक परिक्रमण हो ।

उदाहरण 2

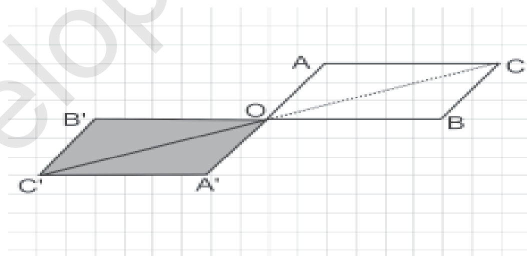
दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज OACB लाई केन्द्र बिन्दु O को वरिपरि 180° को ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गर । यसरी बन्ने प्रतिबिम्बको चित्र खिचेर देखाऊ ।



समाधान

तरिका

1. बिन्दु A लाई OA अर्धव्यास लिएर 180° को ऋणात्मक दिशामा O बाट परिक्रमण गरी A' पत्ता लगाऔँ ।



2. त्यस्तै गरी क्रमशः बिन्दुहरू B र C लाई पनि क्रमशः OB र OC अर्धव्यास लिएर 180° को ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गरी प्रतिबिम्बहरू B' र C' पत्ता लगाऔँ ।

3. अब क्रमशः O र A', O र B', B' र C' तथा C' र O जोडौँ ।

यसरी बन्ने समानान्तर चतुर्भुज OA'C'B' दिइएको समानान्तर चतुर्भुज OABC को आवश्यक ऋणात्मक परिक्रमणको प्रतिबिम्ब हो ।

नोट : के 180° को ऋणात्मक र धनात्मक दुवै परिक्रमणले एउटै प्रतिबिम्ब देलान् ? छलफल गर ।

अभ्यास 8.2

1. तलका समयमा घडीको मिनेट सुईले कति पटक परिक्रमण गर्छ ? पत्ता लगाऊ :

(क) 1 घण्टा (ख) 1/2 घण्टा (ग) 15 मिनेट (घ) 20 मिनेट (ङ) 45 मिनेट

Curriculum Development Centre

2. घडीका सुईहरूले निम्नानुसारका परिक्रमण गर्दा कति समय घटी वा बढी हुन्छ ?

(क) मिनेट सुईको धनात्मक दिशामा एक चौथाइ फन्का (90°) को परिक्रमण

(ख) मिनेट सुईको ऋणात्मक दिशामा दुई चौथाइ वा आधा फन्का (180°) को परिक्रमण

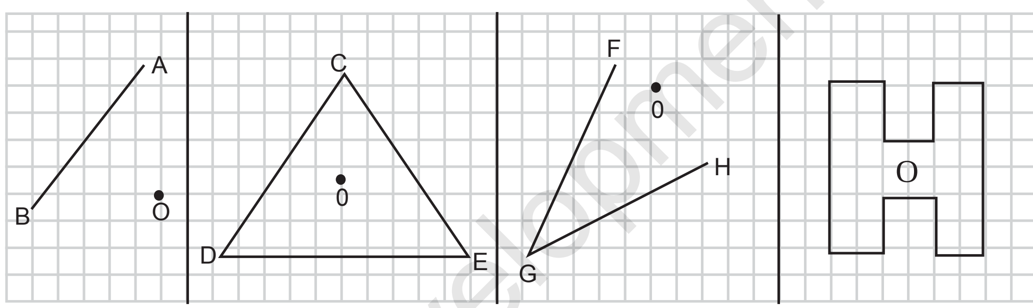
(ग) मिनेट सुईको धनात्मक दिशामा एक पुरा फन्का (360°) को परिक्रमण

(घ) घण्टा सुईको ऋणात्मक दिशामा एक चौथाइ (90°) को परिक्रमण

(ङ) सेकेन्ड सुईको धनात्मक दिशामा तिन चौथाइ (270°) को परिक्रमण

3. तलका ज्यामितीय आकारहरूलाई दिइएका परिक्रमणको बिन्दु O, दिशा र कोणमा परिक्रमण गर । परिक्रमणको तरिका पनि लेख । यसरी बन्ने प्रतिबिम्बको चित्र खिचेर देखाऊ ।

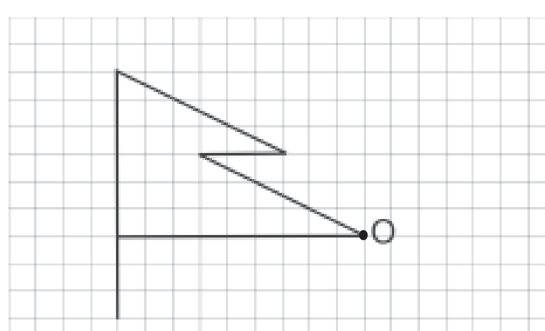
(क) (ख) (ग) (घ)



बिन्दु O मा 90° धनात्मक दिशामा | बिन्दु O मा 270° को ऋणात्मक दिशामा | बिन्दु O मा 30° को ऋणात्मक दिशामा | बिन्दु O मा 180° को ऋणात्मक दिशामा

नोट : 270° को ऋणात्मक परिक्रमण = 90° को धनात्मक परिक्रमण हुन्छ ? कसरी ? शिक्षकसँग परामर्श गरी पत्ता लगाऊ ।

4. दिइएको चित्रलाई ऋणात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गर्दा बन्ने चित्र खिचेर देखाऊ । परिक्रमण गर्दा कुन कुन प्रक्रिया अपनायौ ? बुँदागत रूपमा लेख ।



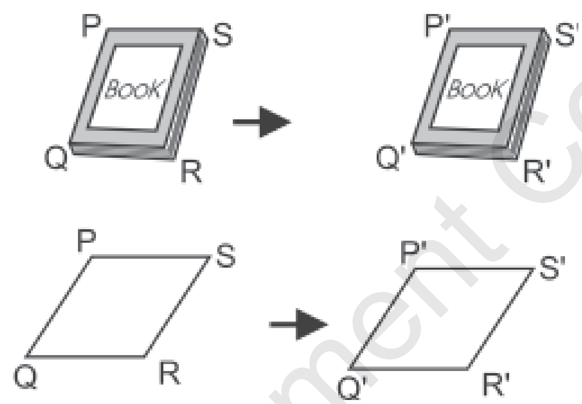
Curriculum Development Centre

8.3 विस्थापन (Displacement)

1. विस्थापनको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गर र छलफल गर :

(क) एउटा पुस्तकलाई ठुलो सेतो कागजमाथि राखौँ । त्यसबाट ट्रेस गरी एउटा PQRS चतुर्भुज बनाऔँ । यस पुस्तकलाई सिधा रेखामा अलि पर सारौँ । त्यसबाट पनि ट्रेस गरी अर्को चतुर्भुज P'Q'R'S' बनाऊ ।



अब PP',QQ',RR' र SS' को सम्बन्ध के होला छलफल गर । यहाँ पुस्तक PQRS लाई P'Q'R'S' मा विस्थापन गरिएको भनिन्छ ।

के आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप छन् ?

अब माथिको क्रियाकलापका आधारमा विस्थापनको परिभाषा लेख । आफूले लेखेको परिभाषालाई साथीसँग तुलना गरी हेर र छलफल गर । अब निष्कर्षलाई तलका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

1. समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिका हरेक बिन्दुलाई उत्तिकै दुरी र उही दिशामा स्थान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (displacement) भनिन्छ ।
2. विस्थापनलाई परिभाषित गर्नका लागि विस्थापनको परिमाण वा नाप र दिशा उल्लेख गर्नुपर्दछ ।
3. विस्थापनका आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् ।
4. कुनै पनि बिन्दुलाई विस्थापन गर्दा दिइएको परिमाण र दिशामा समानान्तर रेखा खिच्नुपर्छ ।

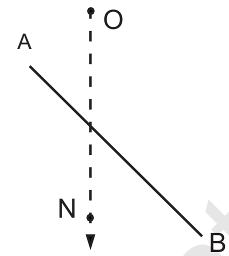
छलफल गर

(क) एउटा मोटर 15 मिटर सोझै अगाडि बढायो भने के त्यसका सबै बिन्दुहरू बराबर दुरी र उही दिशामा स्थानान्तरण हुन्छन् ? के यो विस्थापन हो ?

(ख) भुइँमा राम्ररी मिलाएर बिछ्याइएको कम्मल वा ठुलो कार्पेटको कुनै एउटा मात्र टुप्पो समातेर 1 मिटर आफूतिर तान्दा के बाँकी सबै टुप्पाहरू उही दिशा र परिमाणमा स्थानान्तरण होलान् ?

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

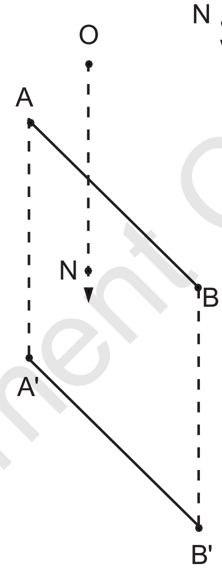


सँगैको रेखाखण्ड AB लाई किरण रेखा (ray) ON को परिमाण र दिशामा विस्थापित गर :

समाधान तरिका

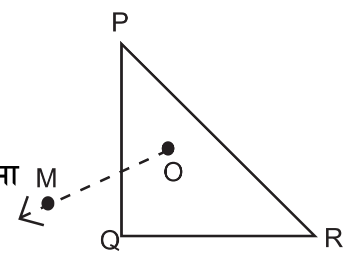
1. बिन्दु A बाट ON को दिशा र परिमाणसँग बराबर र समानान्तर हुने गरी AA' खिच ।
2. बिन्दु B बाट ON को दिशा र परिमाणसँग बराबर र समानान्तर हुने गरी BB' खिच ।
3. A' र B' जोड ।

   यसरी रेखाखण्ड A'B' नै रेखाखण्ड AB को ON मा दिशा र परिमाणमा विस्थापित प्रतिबिम्ब हो ।



उदाहरण 2

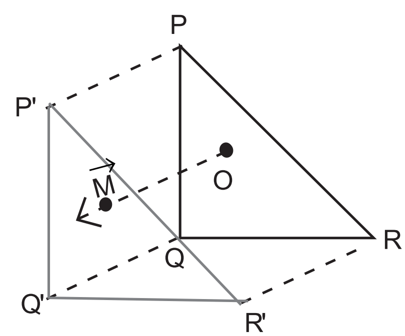
दिइएको चित्रमा ΔPQR लाई दिएको किरण रेखा OM को दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर ।



समाधान तरिका

1. P बाट OM सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी OM को दिशामा PP' खिच ।
2. Q बाट OM सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी OM को दिशामा QQ' खिच ।
3. R बाट OM सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी OM को दिशामा RR' खिच ।

४. अब P', Q' र R' लाई क्रमैसँग जोड ।



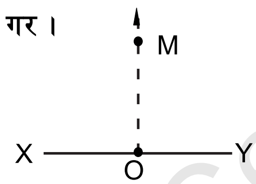
यसरी बनेको $\Delta P'Q'R'$ नै ΔPQR को OM को दिशा र परिमाणमा विस्थापित प्रतिबिम्ब हो ।

नोट : किरण रेखाको नाप लिँदा दुई ओटा बिन्दुहरूको बिचको मात्र लम्बाइको नाप लिनुपर्छ । समानान्तर रेखा खिच्दा सेटस्क्वायरको प्रयोग गर्नुपर्छ ।

Curriculum Development Centre

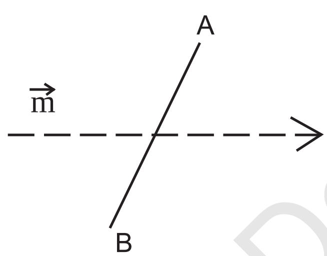
अभ्यास 8.3

1. विस्थापनको उदाहरणसहित परिचय देऊ ।
2. विस्थापनमा कुन कुन तथ्यहरू हुन्छन् ? चित्रसहित लेख ।
3. विस्थापनका कुनै 3 ओटा तथ्यहरूलाई उदाहरण र चित्रसहित उल्लेख गर ।
4. रेखा XY लाई OM को नाप र दिशामा विस्थापन गरेर देखाऊ ।

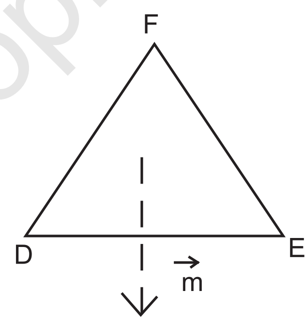


5. एउटा पेन्सिललाई न्युजप्रिन्ट वा ड्इङ पेपरको बिच भागमा राखी ट्रेस गर । त्यसलाई चारै दिशामा 5cm को परिमाणमा क्रमश: विस्थापन गरी आकृतिहरू बनाऊ । उक्त आकृतिहरूलाई कक्षामा छलफल गरी सजाएर राख ।
6. साथीले दिएको दिशा र परिमाणमा एक एक ओटा चित्र वा वस्तुहरूलाई विस्थापन गर ।
4. तलका प्रत्येक ज्यामितीय चित्रहरूलाई दिशामा विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब खिचेर देखाऊ ।

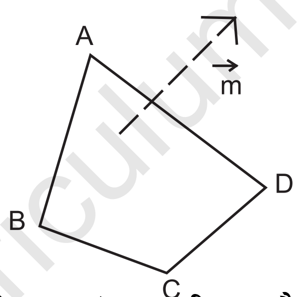
(क)

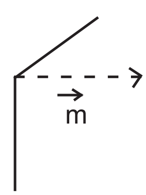


(ख)



(ग)





5. माथि प्रश्न नं. 4 मा दिइए जस्तै 5 ओटा समस्या बनाऊ र विस्थापन गरी प्रतिबिम्ब पनि बनाऊ । आफ्ना प्रत्येक समस्या साथीसँग आपसमा समाधान गर । साथीको प्रतिबिम्ब र विस्थापन तरिकालाई तिम्रोसँग तुलना गरी हेर ।

Curriculum Development Centre

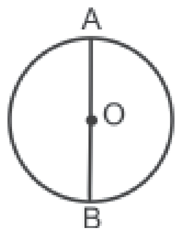
एकाइ 9

सममिति र टेसलेसन (Symmetry and Tessellation)

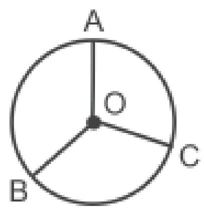
9.1 रेखा र बिन्दु सममिति (Line and Point Symmetry)

तलका बिन्दु सममितिहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

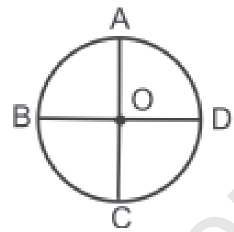
(क) तलका चित्रहरू र क्रियाकलापका आधारमा बिन्दु सममिति पत्ता लगाऊ ।



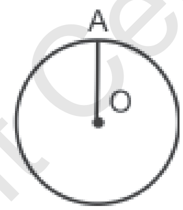
चित्र नं. 9.1



चित्र नं. 9.2



चित्र नं. 9.3



चित्र नं. 9.4

1. चित्र 9.1 को आकृतिलाई एउटा पातलो कागजमा ट्रेस गर । यसरी ट्रेस गरिएको चित्र, चित्र 9.1 सँग सर्वाङ्गसम अर्थात् अनुरूप हुन्छ ।
2. यसलाई चित्र 9.1 मा ठिक मिल्ने गरी वृत्तको केन्द्र O मा पेन्सिलको टुप्पोले थिच ।
3. अब माथिको चित्रलाई घुमाउँदै जाँदा चित्र 9.1 मा पुरै नखप्टेसम्म घुमाउँदै जाऊ ।
4. अब एक फन्को घुमाउँदा माथिको चित्रको कति अंश घुमायौ होला ? बिन्दु A कहाँ पुग्यो होला ?
5. अब यस स्थितिबाट फेरि नखप्टेसम्म घुमाऊ । यस पटक एक फन्कोको कति पटक घुमायौ होला ।

चित्र नं. 9.1 मा ट्रेस गरिएको सर्वाङ्गसम आकृतिलाई बिन्दु O मा पुरा एक फन्को घुमाउँदा 2 पटक खप्टियो । यस्ता चित्रमा श्रेणी 2 (order -2) को बिन्दु वा परिक्रमिक सममिति भएको मानिन्छ । त्यसैले चित्र 9.1 को बिन्दु सममितिको श्रेणी 2 भयो । (चित्र नं. 9.2 मा ट्रेस गरिएको सर्वाङ्गसम आकृतिलाई बिन्दु O मा पुरा एक फन्को घुमाउँदा 3 पटक खप्टियो । त्यसैले यस चित्रको बिन्दु सममितिको श्रेणी 3 भयो ।)

चित्र 9.2 को क्रियाकलाप

1. चित्र नं. 9.2 लाई पातलो कागजमा ट्रेस गर ।
2. यसलाई चित्र नं. 9.2 को O बिन्दुमा केन्द्र पर्ने गरी एक पुरा फन्को घुमाऊ ।
3. यसरी घुमाउँदा कति पटक चित्र खप्टियो ? लेख ।
4. अब चित्र नं. 9.2 को बिन्दु सममितिको श्रेणी पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

चित्र 9.3 को क्रियाकलाप

1. चित्र नं. 9.3 लाई पातलो कागजमा ट्रेस गर ।
2. यसलाई चित्र नं. 9.3 माथि राखी पुरा एक फन्को घुमाउँदा कति पटक अनुरूप आकृति खप्टिन्छ ? हेर र लेख ।
3. यसको बिन्दु सममितिको श्रेणी पत्ता लगाऊ ।
4. के तिम्रो श्रेणी 4 आयो ? कसरी ?

चित्र 9.4 को क्रियालाप

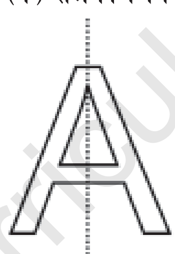
1. चित्र नं. 9.4 लाई पनि पातलो कागजमा ट्रेस गर ।
2. यसलाई वृत्त ABC माथि राखेर पुरा एक फन्को घुमाऊ ।
3. कतिपटक आकृति खप्टियो ? लेख ।

बिन्दु O मा चित्र नं. 9.4 मा ट्रेस गरिएको सर्वाङ्सम आकृति बिन्दु O मा घुमाउँदा आकृति एक पटक पनि खप्टिएन । त्यसैले यो आकृतिक बिन्दु सममिति हुँदैन ।

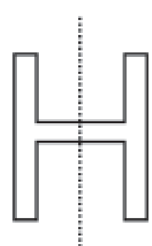
चित्र 9.4 को क्रियाकलापमा बिन्दु सममिति हुँदैन ।

1. कुनै पनि आकृतिको अनुरूप आकृतिलाई कुनै निश्चित बिन्दुमा पुरा एक फन्को 360 डिग्री परिक्रमण गर्दा खप्टिने अवस्था आउनुलाई बिन्दु सममिति भएको भनिन्छ । माथिका चित्रहरूमध्ये चित्र नं. 9.1, चित्र नं. 9.2 र चित्र नं. 9.3 का अवस्थाहरूमा बिन्दु सममिति हुन्छ । तर चित्र नं. 9.4 मा बिन्दु सममिति हुँदैन । पुरा एक फन्को घुमाउँदा दिएको आकृति जति पटक खप्टिन्छ त्यसलाई आकृतिको श्रेणी भनिन्छ ।
2. **रेखा सममिति (Line of Symmetry)**

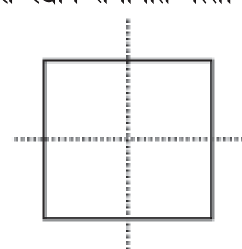
   (क) तलका चित्र र क्रियाकलापका आधारमा छलफल गरी रेखीय सममिति पत्ता लगाउने प्रयास गरौं ।



चित्र नं. 9.5



चित्र नं. 9.6



चित्र नं. 9.7

माथिका प्रत्येक चित्रमा डट लाइनले चित्रलाई ठिक 2 भागमा बाँडिएको छ । त्यसैले माथिका प्रत्येक चित्र सममिति हुने खालका (symmetrical) छन् । प्रत्येक चित्रलाई दुई भागमा बाँड्ने डट रेखा (dot line) लाई रेखा वा रेखीय सममिति (line of symmetry) भनिन्छ । रेखीय सममितिलाई सममितिको अक्ष (axis of symmetry) वा ऐना रेखा (mirror line) पनि भन्ने गरिन्छ ।

Curriculum Development Centre

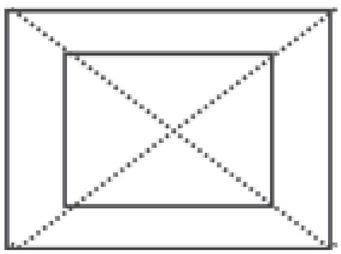
अब तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरौँ :

1. माथिको चित्र नं. 9.5, चित्र नं. 9.6 र चित्र नं. 9.7 मा कति कति ओटा रेखीय सममितिका अक्षहरू छन् ?
2. चित्र नं. 9.5 को परिक्रमिक सममिति कति श्रेणीको होला ?
3. त्यस्तै चित्र 9.6 र 9.7 को परिक्रमिक सममिति कति कति श्रेणीका छन् ?

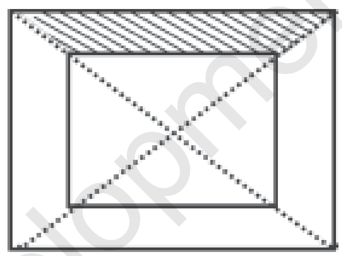
माथिका चित्रहरूमध्ये चित्र नं. 9.5 र 9.6 मा रेखीय सममितिको अक्ष एउटा छ । त्यस्तै चित्र नं. 9.7 मा सममितिका अक्ष 2 ओटा छन् ।

चित्र नं. 9.6 लाई डट रेखामा घुमाउँदा एक पटक मात्र चित्र खप्टिन्छ । त्यसैले चित्र 9.6 को परिक्रमिक रेखीय सममितिको श्रेणी (order) 1 हुन्छ । त्यस्तै चित्र नं. 9.7 को परिक्रमिकको रेखीय सममिति श्रेणी 2 हुन्छ । कसरी ?

(ख) अब तलका दुई ओटा चित्रका आधारमा तलका क्रियाकलापमा छलफल गरौँ ।



चित्र नं. 9.8



चित्रं. 9.9

- चित्र 9.8 को रेखीय समामितिको परिक्रमिक सममिति श्रेणी कति होला ?
- चित्र 9.8 को रेखीय सममितिको अक्ष कति ओटा छन् ?
- हो माथिको चित्र नं. 9.8 मा रेखीय सममिति र रेखीय सममितिका अक्षहरू 2 ओटा छन् । यसको परिक्रमिक सममितिको श्रेणी 4 हुन्छ ? कसरी ?

चित्र 9.8 **को क्रियाकलाप**

- सर्वप्रथम चित्र 9.8 लाई अभ्यास पुस्तिकामा ट्रेसिङ गर ।
- चित्र 9.9 मा पुरा कति भागमध्ये कति भागलाई छाया पारिएको छ ?
- परिक्रमिक सममितिको श्रेणी कति होला ?
- कति ओटा रेखीय सममितिका अक्षहरू छन् ।
- यसलाई कुनै अर्को भागमा छायाँ पार्‍यो भने 2 ओटा रेखीय सममितिको अक्ष र परिक्रमिक सममितिको श्रेणी 2 भएको नयाँ आकृति बन्छ ?
- यसरी बनेको चित्रमा एउटै मात्र सममितिको अक्ष र परिक्रमिक सममितिको श्रेणी घट्ने गरी अर्को तेस्रो भागलाई छाया पार । के तिमीले रेखीय परिक्रमिक सममितिको श्रेणी 2 हुने गरी चौथो भागमा छाया पार्न सक्छौ ?

Curriculum Development Centre

➠ यसको रेखीय सममितिको अक्षहरू कति ओटा छन् ?

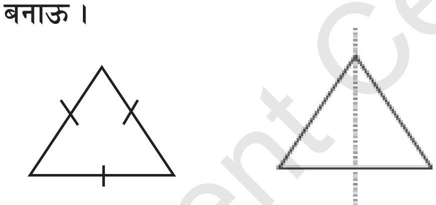
माथिका क्रियाकलापहरूबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । साथीसँग छलफल गर । के तिम्रो निष्कर्ष तलको निष्कर्षसँग मिल्छ । तुलना गरी हेर ।

ज्यामितीय आकृतिहरूमा रेखीय सममितिको परिक्रमिक श्रेणी 1 भन्दा कम हुन सक्दैन । चित्र र रेखीय सममितिको अक्षअनुसार यसको श्रेणीमा फरक पर्दछ ।

उदाहरण 1

चित्रमा बिन्दुरेखा (dot line) को प्रयोग गरी रेखीय सममिति बनाऊ ।

प्रत्येक चित्रमा कति श्रेणी भयो ? लेख ।



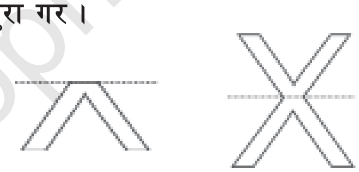
समाधान : एउटा रेखीय सममितिको अक्ष बनाउँदा,

यहाँ सममितिको श्रेणी 2 छ ।

उदाहरण 2

तल रेखा सममितिको अक्ष र आधा चित्र दिइएको छ । यसलाई पुरा गर ।

रेखीय सममितिको परिक्रमिक श्रेणी पनि पत्ता लगाऊ ।

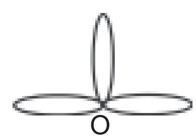


समाधान

यसको परिक्रमिक रेखीय सममितिको श्रेणी 4 छ ।

उदाहरण 3

दिइएको चित्रलाई बिन्दु 0 मा परिक्रमण गर । अब बिन्दु सममितिका आधारमा परिक्रमिक श्रेणी पत्ता लगाऊ ।

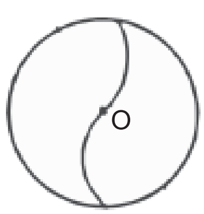


समाधान : प्रश्नको चित्रलाई बिन्दु O मा एक पुरा परिक्रमण गर्दा 3 पटक खप्टिन्छ । त्यसैले यस बिन्दु सममितिको परिक्रमण श्रेणी 3 हुन्छ ।

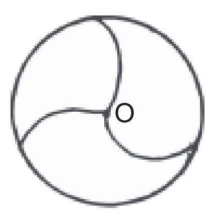
अभ्यास 9.1

1. तलका चित्रहरू अभ्यास पुस्तिकामा सार । प्रत्येक चित्रलाई ट्रेस गरी O बिन्दुमा परिक्रमण गरी हेर र परिक्रमिक श्रेणी पत्ता लगाऊ ।

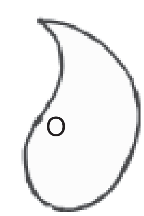
(क)



(ख)

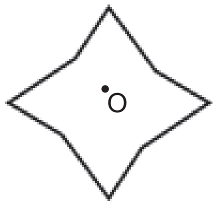


(ग)

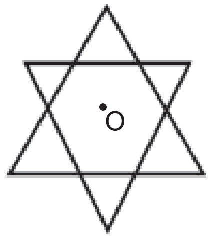


Curriculum Development Centre

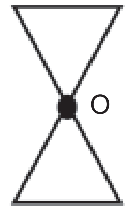
(घ)



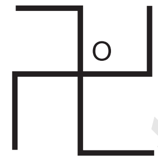
(ङ)



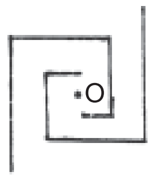
(च)



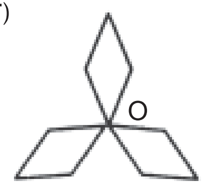
(छ)



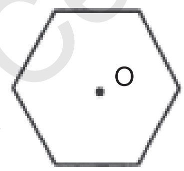
(ज)



(झ)

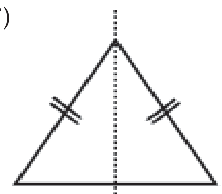


(ञ)

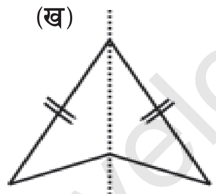


2. **तलका प्रत्येक बिन्दुरेखालाई ट्रेसिङ गर । रेखीय सममिति खिच । रेखीय सममितिको परिक्रमण श्रेणी कति भयो लेख ।**

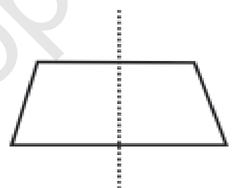
(क)



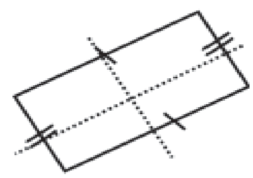
(ख)



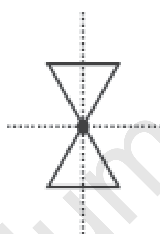
(ग)



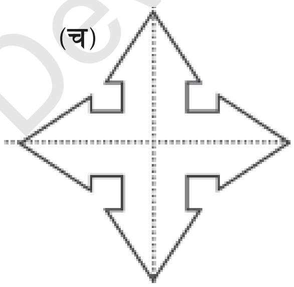
(घ)



(ङ)



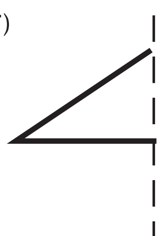
(च)



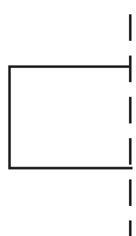
3. **तल दिइएका चित्रहरू अभ्यास पुस्तिकामा सार :**

चित्रमा रेखीय सममितिको अक्ष र आधा चित्र दिइएको छ । चित्र पुरा गर र परिक्रमिक श्रेणी पनि पत्ता लगाऊ ।

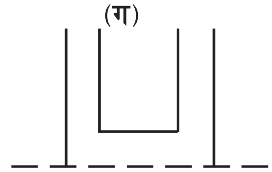
(क)



(ख)



(ग)



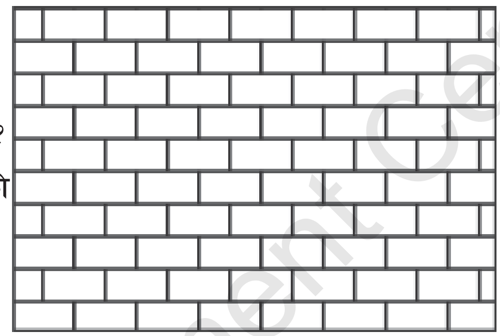
Curriculum Development Centre

9.2 बहुभुजका ढाँचाहरूबाट टेसेलेसन (Tessellation by using Polygons)

1. टेसेलेसनको धारणा

तलका प्रश्न र क्रियाकलापमा छलफल गर ।

(क) तिमीले इँटा वा ढुङ्गाहरू छापेका देखेका छौ ? तिम्रो घर र विद्यालयमा यस्तो कहाँ कहाँ छन् ?



(ख) इँटाहरूलाई कसरी मिलाएर राखिएको छ ?

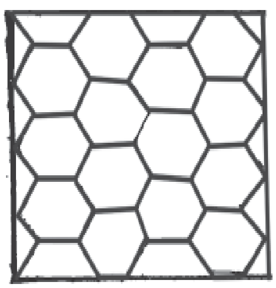
(ग) इँटाहरू कुन कुन आकारका छन् ?

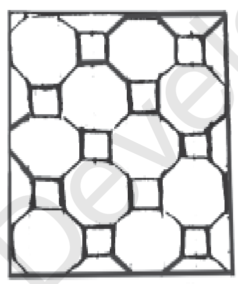
(घ) के यी इँटाहरूलाई अर्को तरिकाले पनि छाप्न सकिन्थ्यो ?

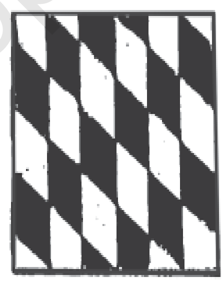
(ङ) तिम्रो घरमा भएको डोको, बाँस वा प्लास्टिकको डोको तथा कलमदानीमा प्रत्येक पाताहरू कसरी राखेका छन् ?

(च) यस्ता अन्य उदाहरणहरू खोजी गर ।
(जस्तै : कार्पेट, कमिज, कुर्ता सुरुवाल, तन्ना आदि)

(छ) तलका चित्रमा कति कति ओटा उस्तै ज्यामितीय आकृतिहरू प्रयोग भएका छन् ? छलफल गर ।







(ज) मौरीले आफ्नो घार कसरी बनाएको हुन्छ ? चित्र बनाएर लेख ।

- माथिका प्रत्येक चित्रहरूमा सतहहरूलाई पुरा गर्न एकभन्दा बढी उस्तै प्रकारका ज्यामितीय आकृतिहरू प्रयोग भएका छन् ।
- माथिका सबै उदाहरणहरू टेसेलेसनका उदाहरणहरू हुन् ।

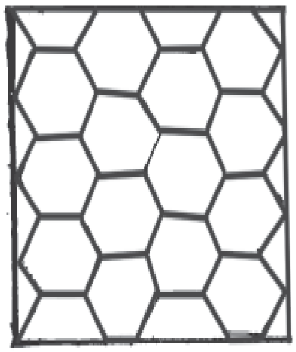
(झ) समबाहु त्रिभुज, वर्ग, आयत र नियमित बहुभुजबाट एक एक ओटा टेसेलेसन बनाई देखाऊ ।

(ञ) अब माथिका उदाहरणहरू र क्रियाकलापहरूका आधारमा टेसेलेसनको अर्थ लेख । आफ्नो परिभाषालाई साथीको परिभाषासँग तुलना गरी हेर । निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । के तिम्रो निष्कर्ष तलको भनाइसँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

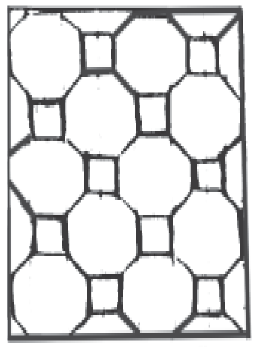
एकभन्दा बढी उस्तै प्रकारका ज्यामितीय आकृतिका टायल वा चित्रहरू नखप्टाइकन र खाली ठाउँ नराखीकन समतल सतह ढाक्ने वा छोप्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन वा टायलिङ (tessellation or tilling) भनिन्छ ।

2. टेसेलेसनका प्रकार

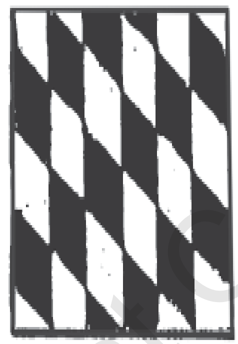
तलका चित्रहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



चित्र नं. 9.11



चित्र नं. 9.12



चित्र नं. 9.13

(क) चित्र नं. 9.11 मा कति प्रकारका र कस्ता ज्यामितीय चित्र प्रयोग भएका छन् ?

(ख) के चित्र नं. 9.12 मा प्रयोग भएका दुवै ज्यामितीय चित्रहरू नियमित (regular) छन् ?

(ग) चित्र नं. 9.13 मा प्रयोग भएका ज्यामितीय चित्र नियमित वा अनियमित के हुन् ?

माथिका चित्रमा चित्र नं. 9.11 को चित्र नियमित टेसेलेसन (regular tessellation) हो । चित्र नं. 9.12 को अर्ध वा नियमित टेसेलेसन (semiregular tessellation) हो । त्यस्तै चित्र नं. 9.13 को चित्र अनियमित टेसेलेन (irregular tesselation) हो ।

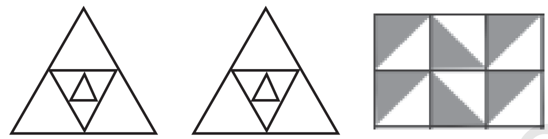
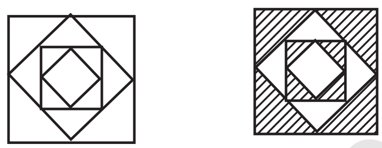
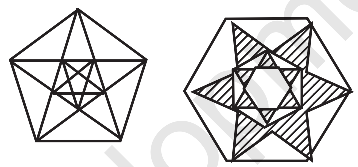
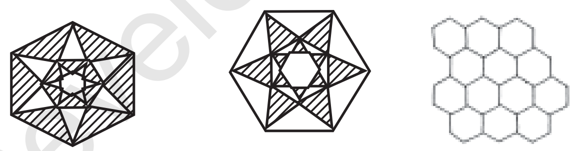
अब माथिका छलफलका आधारमा नियमित, अर्ध नियमित र अनियमित टेसेलेसनको परिभाषा लेख । आफ्नो परिभाषालाई साथीको परिभाषासँग तुलना गरी निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । के तिम्रो निष्कर्ष तलको भनाइसँग मिल्छ ? तुलना गर ।

1. टेसेलेसन नियमित, अर्ध नियमित र अनियमित गरी 3 किसिमका हुन्छन् ।
3. एकै प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृति प्रयोग भएर बनेका टेसेलेसनलाई नियमिति टेसेलेसन (reguar tessellation) भनिन्छ ।
3. दुई वा दुईभन्दा बढी प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृति प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अर्ध नियमित टेसेलेसन (semiregular tessellation) भनिन्छ ।
4. अनियमित ज्यामितीय आकृतिहरू प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अनियमित टेसेलेसन (irregular or non-ragular tessellation) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

3. बहुभुजका ढाँचाहरू

(क) तलका बहुभुजका ढाँचा अध्ययन गरी छलफल गर :

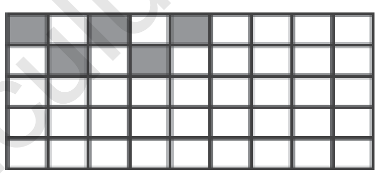
क्र.स.	ज्यामिति आकृति/ढाँचा	
1.	समबाहु त्रिभुजको ढाँचा	
2.	वर्गको ढाँचा	
3.	नियमित पञ्चभुजको ढाँचा	
4.	षड्भुजको ढाँचा	

(ख) माथिका प्रत्येक टेसेलेसनलाई ड्इङ पेपरमा बनाएर कक्षा कोठामा सजाएर राखी छलफल गर ।

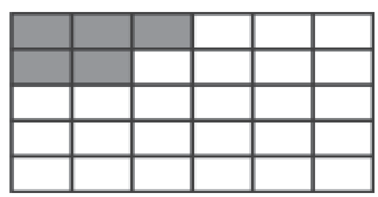
अभ्यास 9.2

1. तलका टेसेलेसनका ढाँचाहरूलाई ट्रेसिङ गरेर ग्राफ पेपरमा सारेर पुरा गर :

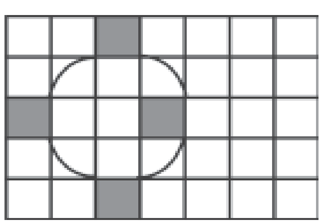
(क)



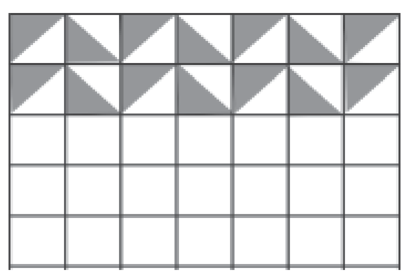
(ख)



(ग)



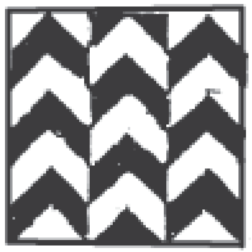
(घ)



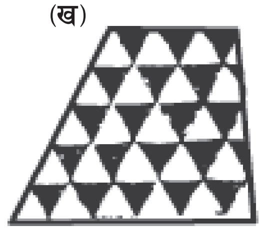
Curriculum Development Centre

2. तलका प्रत्येक टेसेलेसनमा कुन कुन ज्यामितीय आकृति प्रयोग भएका छन्, लेख :

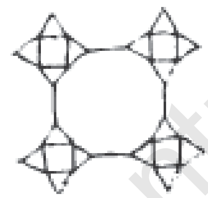
(क)



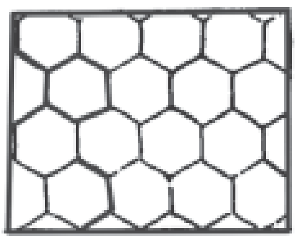
(ख)



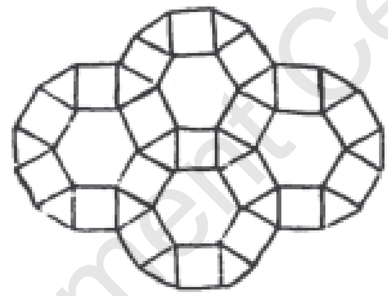
(ग)



(घ)



(ङ)



3. प्रश्न नं. 2 मा प्रयोग भएका वा अन्य 5/5 ओटा टेसेलेसन बनाऊ/खोज । प्रत्येक टेसेलेसनलाई कागजमा ट्रेस गर र आफूलाई मन पर्ने गरी रङ्गाऊ र देखाऊ ।

4. प्रश्न नं. 3 का टेसेलेसनहरूमध्ये नियमित, अर्ध नियमित र अनियमिति टेसेलेसन छुट्याएर लेख ।

5. टेसेलेसनको उदाहरणसहित परिभाषा लेख ।

6. टेसेलेसन कति प्रकारका हुन्छन् ? प्रत्येकको उदाहरणसहित परिभाषा लेख ।

7. कुनै 2/2 ओटा नियमित, अर्ध नियमित र अनियमित टेसिलेसनका ढाँचा प्रयोग गरी कागज तथा कपडामा टेसेलेसन गरी कक्षामा प्रदर्शन गर । भित्तामा वा धागोले सिलिङमा झुन्ड्याएर प्रदर्शन पनि गर ।

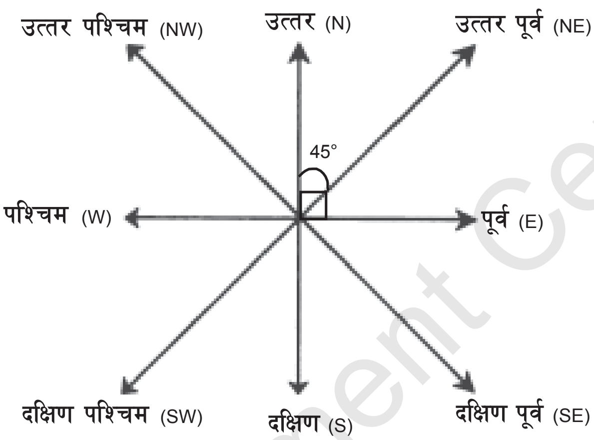
Curriculum Development Centre

एकाइ 10 दिशास्थिति र स्केल ड्रइङ (Bearing and Scale Drawing)

10.1 दिशास्थिति र नक्साको पढाइ (Bearing and Map Reading)

1. दिशा स्थिति (Bearing)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।



(क) चित्रमा कति ओटा दिशाहरू देखाइएको छ ? तिनीहरू के के हुन् ?

(ख) उत्तर र पूर्व दिशा देखाउने रेखाले कति डिग्रीको कोण बनाएको छ ? लेख ।

(ग) उत्तर र उत्तर पूर्व दिशा देखाउने रेखाबिच कति डिग्रीको कोण छ ? नापेर पत्ता लगाऊ ।

(घ) के उत्तर र पश्चिम, पश्चिम र दक्षिण तथा दक्षिण र पूर्व देखाउने रेखाहरूबिच पनि 90° का कोण बनेका छन् ?

(ङ) के उत्तर र उत्तर पश्चिम, पश्चिम र दक्षिण पश्चिम तथा दक्षिण र दक्षिण पूर्व देखाउने सबै रेखाहरूले आपसमा 45°/45° का कोण बनाएका छन् ।

(च) विद्यालय कम्पाउन्ड वा चौरमा गएर माथि चित्रमा देखाए जस्तै गरी प्रत्येक दिशामा एक एक जना साथीहरू उभिएर दिशा स्थिति पत्ता लगाउने अभ्यास गर । प्रत्येक साथीलाई दिशास्थितिको नामले बोलाऊ ।

2. नक्साको पढाइ (Map Reading)

Curriculum Development Centre

माथिको नक्सा र नक्सामा दिइएका स्थानहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) काठमाडौँलाई केन्द्र मानी तलका स्थानहरूको दिशा स्थिति पत्ता लगाऊ ।

(अ) जनकपुर (आ) जुम्ला (इ) नेपालगन्ज (ई) इलाम

(उ) वीरगन्ज (उ) सगरमाथा हिमाल

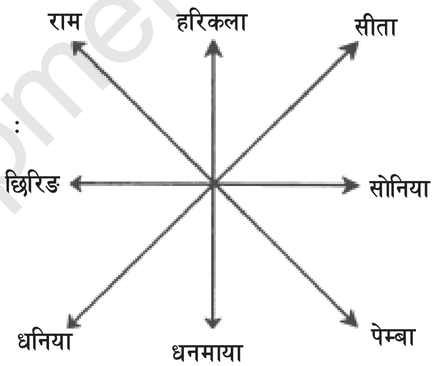
(ख) पोखरालाई केन्द्र मानी निम्न लिखित स्थानहरूको दिशास्थिति पत्ता लगाऊ :

(अ) महेन्द्रनगर (आ) अन्नपूर्ण हिमाल (इ) इलाम (ई) वीरगन्ज

(ऊ) सगरमाथा हिमाल (ऊ) काठमाडौँ (ए) जुम्ला

कुनै पनि नक्सामा भौगोलिक स्थान, नदीनाला, हिमाल, वन जङ्गल, बाटोघाटो, जिल्ला, अञ्चल, विकास क्षेत्र छुट्याइएको हुन्छ । कुनै पनि नक्सामा दिइएको स्थान पत्ता लगाउन नक्सालाई पढ्ने बारेमा ज्ञान, सिप र क्षमता हासिल गर्नुपर्ने हुन्छ ।

अभ्यास 10.1



1. सँगैको चित्रको आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर देऊ :

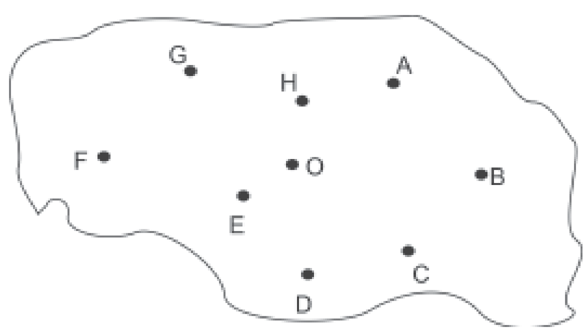
   (क) छिरिङ उभिएको स्थानको दिशास्थिति कुन हो ?

   (ख) धनियाको दिशास्थिति कुन होला ?

   (ग) के धनमाया र पेम्बाको दिशास्थिति मिल्छ ?

   (घ) माथिको चित्रबाट प्रश्न नं. (क), (ख) र (ग) बाहेक 3/3 ओटा थप प्रश्नहरू बनाई साथीसँग आपसमा दिशास्थिति पत्ता लगाउने अभ्यास गर ।

2. तलको चित्र पढी सोधिका प्रश्नहरूको जवाफ लेख :



   (क) स्थान O बाट बिन्दु G को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

   (ख) स्थान O बाट बिन्दु C को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

   (ग) स्थान D बाट बिन्दु F को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

   (घ) स्थान O बाट बिन्दु A को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

   (ङ) माथिको चित्रबाट बन्न सक्ने थप समस्या बनाई समाधान गर ।

Curriculum Development Centre

3. तलको नेपालको नक्साका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूको जवाफ लेख :

(क) बुटवलबाट पोखराको दिशास्थिति लेख ।

(ख) वीरगन्जबाट विराटनगरको दिशास्थिति लेख ।

(ग) वीरेन्द्रनगरबाट महेन्द्रनगरको दिशास्थिति लेख ।

4. नेपालको राजनीतिक नक्सा लिएर कुनै एउटा जिल्ला सदरदुकामलाई केन्द्र मानी 8 ओटै दिशामा पर्ने एक एक ओटा स्थान पत्ता लगाई नाम लेख ।

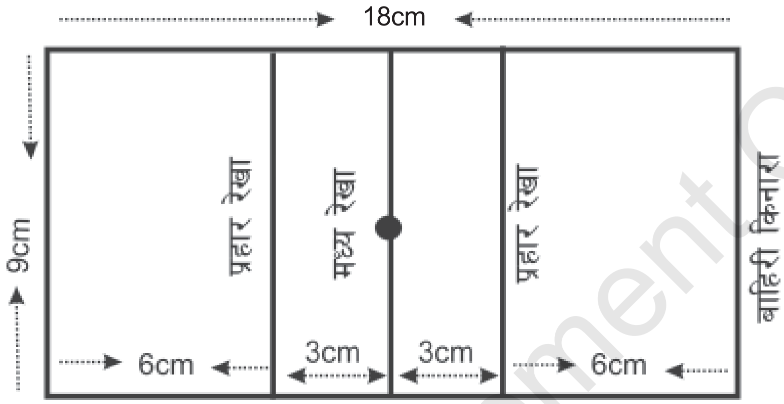
Curriculum Development Centre

10.2 **स्केल ड्रइङ (Scale Drawing)**

तल दिइएका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

(क) तलको भलिबल कोर्टको चित्रको आधारमा दिइएको तालिका भर ।

भलिबल कोर्ट



स्केल 1:200 (1cm = 200cm)

क्र.सं.	रेखाको नाम	नक्साको रेखाको नाप	वास्तविक कोर्टको नाप	वास्तविक कोर्ट र नक्साको नापको अनुपात	निष्कर्ष
1.	कोर्टको लम्बाइ	9cm	18m	1:200	
2.	कोर्टको चौडाइ				
3.	मध्य रेखादेखि प्रहार रेखासम्मको दुरी				

- के वास्तविक कोर्टको सबै दुरी र नक्साको दुरीका अनुपात 1:200 आयो ?
- माथिको क्रियाकलापहरूका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौँ ? आफ्नो निष्कर्षलाई साथीसँग छलफल गर ।

(ग) एउटा हात्ती र आँखाले देख्न नसकिने अमिबा आदिलाई एउटै पेजमा कसरी लेख्न सकिन्छ ? लेख र छलफल गर ।

निष्कर्ष :

1. यसरी ज्यादै ठुलो र ज्यादै साना साना वस्तुलाई रेखाङ्कन गर्नुपर्दा निश्चित स्केलको प्रयोग गरिन्छ ।
2. यस्तो स्केलमा वास्तविक वस्तु र चित्र खिची आवश्यकताअनुसार ठुलो वा सानो नाप लिएर निश्चित अनुपात बनाइन्छ । जस्तै : माथि क्रियाकलाप (ख) मा भलिबल कोर्डको अनुपात 1:200cm लिइएको छ । यसको अर्थ भलिबल कोर्टको प्रत्येक 200cm दुरीलाई नक्सामा 1cm मानी स्केल बनाइएको छ ।

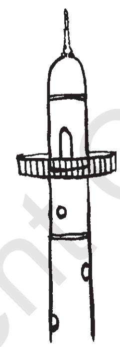
Curriculum Development Centre

अभ्यास 10.2

1. एउटा बगैँचाको वास्तविक लम्बाइ 150m र चौडाइ 100m छ । 1cm:10cm को अनुपात लिएर बगैँचाको रेखाङ्कन गरी देखाऊ ।

2. 1cm ले वास्तविक 15m जनाउने गरी 90m लम्बाइ र 45m चौडाइ भएको फुटबल मैदानको चित्र बनाएर देखाऊ ।

3. सँगैको चित्रमा 1cm ले वास्तविक 4m जनाउने गरी स्केल ड्रइङ गर र वास्तविक रूपमा धरहरा कति अग्लो रहेछ ? पत्ता लगाऊ ।



4. चित्रमा दिइएको रूख 1:15cm को scale मा बनाइएको छ । स्केलले नापेर रूखको वास्तविक उचाइ पत्ता लगाऊ ।

5. 1cm = 1.5m को स्केलमा खिचेको (चित्रमा दिइएको) गाडीको वास्तविक लम्बाइ कति होला ?

6. तल पश्चिमाञ्चल विकास क्षेत्रको नक्सा दिइएको छ । सो नक्सामा 1 cm = 50 km को स्केलमा विभिन्न स्थानहरू दिइएको छ । अब दिइएको जिल्लाहरूबिचको सबभन्दा छोटो र सबैभन्दा लामो दुरी पत्ता लगाऊ ।

   (क) कास्कीदेखि रूपन्देही

   (ख) बागलुङदेखि पाल्पा

   (ग) रूपन्देहीदेखि तनहुँ

   (घ) गोरखादेखि अर्घाखाँची

   (ङ) कपिलवस्तुदेखि मनाङ

Curriculum Development Centre

एकाइ 11

समूह (Set)

11.1 सर्वव्यापक समूह (Universal Set)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

1. हिमालय उच्च माध्यमिक विद्यालय म्याग्दीका कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूले समूह एकाइमा छलफल गर्दा निम्नानुसारका समूह बनाए छन्,

   (क) कक्षा 7 का केटीहरूको समूह, A = { सीता, हरिकला, फुलमाया, धनियाँ, रूपा, सरस्वती, कमला, अम्बिका, लक्ष्मी}

   (ख) कक्षा 7 का केटाहरूको समूह, B = { रामविलास, श्री गोविन्द, आइते, कृष्ण, रामकृष्ण, शालिकराम, उमेश}

   (ग) कक्षा 7 का चस्मा लगाउने विद्यार्थीहरूको समूह C = { रामविलास, उमेश, हरिकला}

   अब माथिका तिन ओटै समूहहरूका गुण वा विशेषता आउन सक्ने कुनै एउटा निश्चित समूह के होला ?

   S = {कक्षा 7 का विद्यार्थीहरू} मा माथिका तिन ओटै समूह पर्दछन् ?

तिमीले पनि आफ्नो कक्षाको S = {कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूको समूह} मा छलफलमा आउन सक्ने कुनै 3 समूहहरू बनाऊ । साथीसँग छलफल पनि गर ।

माथिका सबै समूहहरूका गुण वा विशेषता आउन सक्ने समूह S = {कक्षा 7 का विद्यार्थीहरू} सर्वव्यापक समूह हो ।

2. **सङ्ख्याको ज्ञानबाट बन्न सक्ने विभिन्न समूहहरू बनाउने बारेमा छलफल गर ।**

   (क) वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह S

   (ख) घन सङ्ख्याहरूको समूह C

   (ग) जोर सङ्ख्याहरूको समूह E

   (घ) बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह O

   (ङ) रूढ सङ्ख्याहरूको समूह P

   (च) संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह A

अब माथिका सबै समूहहरूका गुण वा विशेषता छलफलमा आउन सक्ने कुनै एउटा समूह बनाऊ ।

के N = {प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} मा माथिका सबै समूहहरू छलफलमा आउन सक्छन् ?

हो माथिका (क) देखि (च) सम्मका सबै सङ्ख्याहरू N = {प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...} मा छलफलमा आउन सक्छन् । यसरी माथिका सबै समूहहरूका लागि समूह N सर्वव्यापक समूह हुन सक्छ ।

अब माथिका दुई ओटा क्रियाकलापहरू (1 र 2) का आधारमा सर्वव्यापक समूहको अर्थ लेख्न कोसिस गर । आफूले लेखेको अर्थलाई साथीसँग तुलना गरी हेर । के तिमीहरूले निकालेको निष्कर्ष तलको तथ्यहरूसँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

Curriculum Development Centre

सर्वव्यापक समूहका केही महत्त्वपूर्ण आधारभूत तथ्यहरू

1. कुनै एउटा निश्चित समूहमा छलफलभित्र आउन सक्ने सबै प्रकारका समूहहरू समावेश भएछन् भने त्यो निश्चित समूहलाई सर्वव्यापक समूह (universal set) भनिन्छ ।
2. सर्वव्यापक समूहलाई U ले जनाइन्छ ।

उदाहरण 1

तलका साथीहरूबिचको कुराकानीलाई कक्षामा अभिनय गर :

शिक्षकले कालोपाटीमा कुनै एउटा समूह लेख्नुभएको छ ।

रामविलास : यसमा बिजोर सङ्ख्याहरू {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15} मात्र छन् ।

मैचाङ : यसमा गन्ती सङ्ख्या 16 त परेन ।

फुलमाया : यसमा जोर सङ्ख्याहरू {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} छन् ?

श्रीकृष्ण : यसमा 0 पनि छ ।

आइते : यसमा रूढ सङ्ख्याहरू पनि छन् त ?

सानुमाया : यसमा उपयुक्त भिन्न परेन त ।

सचित्र : ए ! यसमा त दशमलव सङ्ख्या पनि छैन ।

अब माथिको छलफलका आधारमा शिक्षकले कालोपाटीमा लेखेको सर्वव्यापक समूह पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ 15 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याको समूह (W) = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} मा माथिका सबै समूहहरू छलफलमा आउन सक्छन् । त्यसैले यस प्रश्नका लागि समूह W सर्वव्यापक समूह हुन्छ ।

उदाहरण 2

सर्वव्यापक समूह (U) = {50 भन्दा साना पूर्ण सङ्ख्याहरू} हो । अब तलका समस्याहरू समाधान गर ।

(क) 4 का अपवर्त्यहरूको समूह M_4 लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) 6 का अपवर्त्यहरूको समूह M_6 लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ग) समूह U मा पर्ने थप 2 समूह बनाऊ ।

समाधान

(क) 4 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_4) = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48}

(ख) 6 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(ग) 2 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_2) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...48} र 5 ले नि:शेष भाग जाने सङ्ख्याहरूको समूह (A) = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45}

Curriculum Development Centre

अभ्यास 11.1

1. **सर्वव्यापक समूह U = {30 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरू} छ । अब निम्न समस्याहरू समाधान गर :**

   (क) रूढ सङ्ख्याहरूको समूह P लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

   (ख) 6 का अपवर्त्यहरूको समूह M_6 लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

   (ग) संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह C लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

   (घ) बिजोर सङ्ख्याहरूको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

   (ङ) (क) र (घ) बिचमा के फरक छ ?

   (च) समूह (ख) र (ग) बिचको सम्बन्ध देखाऊ ।

2. **निम्नानुसारका समूह समावेश भएको समूहको आधारमा सर्वव्यापक समूह (U) पत्ता लगाऊ :**

   (क) समूह P = {30 भित्रका रूढ सङ्ख्याहरू}

   (ख) समूह C = {20 भित्रका संयुक्त सङ्ख्याहरू}

   (ग) समूह A = {0, 1, 2, 4, 20}

   (घ) समूह N = {20 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}

3. **एउटा विद्यालयमा कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूबिच भएको तलको कुराकानीका आधारमा सर्वव्यापक समूह पत्ता लगाऊ ।**

   गोमा : यसमा M_4 विचार गर्दा M_4 = {4, 8, 12} हुन्छ ।

   सोनिया : यसमा शून्य छैन त ।

   गोपाल : यसमा 13 पनि छैन नि ।

   पेम्बा : ए ! यसमा अनुपयुक्त भिन्न पनि आउँदैन ।

   छिरिङ : यसमा जोर सङ्ख्याहरू 2, 4, 6, 8, 10 र 12 पर्छन् ।

   श्रवण : यसमा दशमलव सङ्ख्या त एउटा पनि छैन ।

4. माथि प्रश्न नं. 1 देखि 3 सम्म दिए जस्तै थप 2/2 ओटा समस्या बनाई समाधान गर । उक्त समस्यालाई साथीबिच साटेर समाधान गर र शिक्षकलाई देखाऊ ।

Curriculum Development Centre

11.2 उपसमूह (Sub Sets)

1. उपसमूहको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर ।

मानौँ कुनै एउटा सर्वव्यापक समूह U = {4 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह} = {1, 2, 3, 4} छ ।

(क) माथिको समूहका सदस्यहरूबाट बन्न सक्ने अन्य समूहहरू बनाऊ ।

समूहहरू कालोपाटीमा सङ्कलन गर र तलको तालिकासँग तुलना गरी हेर ।

क्र.सं.	समूह	समूहको नाम/गणनात्मकता
1.	A = {1}, B = {2}, C = {3}, D = {4}	एउटा मात्र सदस्य भएका समूहहरू n(A) = n(B) = n(C) = n(D) = 1
2.	E = {1,2 }, F = {1, 3}, G = {1,4} H = {2, 3}, I = {2, 4 }, J = {3, 4}	दुई ओटा सदस्य भएका समूहहरू n(E) = n(F) = n(G) = n(H) = n(I) = n(J) = 2
3.	K = {1,2,3}, L = {1, 2,4,}, M = { 2, 3, 4} N = {1, 3, 4}	तिन ओटा सदस्य भएका समूहहरू n(K) = n(L) = n(M) = n(N) = 3
4.	O = {1, 2, 3, 4}	4 सदस्य भएको समूह n(O) = 4
5.	P = { }	खाली समूह n(P) = 0

माथिको तालिकाका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।

1. के समूह A का सदस्य समूह U का पनि सदस्य हुन् ?
2. के क्र.स. 1 का सबै समूहका सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्य हुन् ?
3. के समूह E का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?
4. के समूह K का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?
5. के समूह O का सबै सदस्यहरू समूह U का पनि सदस्यहरू हुन् ?
6. के P = { } = खाली समूहका सबै सदस्य अन्य सबै समूहका सदस्यमा पनि पर्छन् ?

यहाँ, समूह A का सबै सदस्य समूह U का पनि सदस्य हुन् । त्यसैले समूह A लाई समूह U को उपसमूह भनिन्छ । यसलाई गणितीय सङ्केतमा $A \subset U$ वा $U \supset A$ लेखिन्छ । यहाँ समूह B का सबै सदस्य समूह E का पनि सदस्य हुन् । त्यसैले समूह B समूह E को उपसमूह हो । यसलाई $B \subset E$ लेखिन्छ । त्यस्तै $E \subset K$, $E \subset M$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

Curriculum Development Centre

(ख) माथिको छलफलका आधारमा उपसमूहको अर्थ/परिभाषा लेख र साथीसँग छलफल गर ।

यदि एउटा समूह X मा भएका सबै सदस्यहरू अर्को समूह Y का पनि सदस्यहरू हुन् भने X लाई Y को उपसमूह (sub-set) भनिन्छ । सङ्केतमा $X \subset Y$ अथवा $Y \supset X$ ले जनाउन सकिन्छ ।

त्यस्तै Y लाई X को अतिरिक्त समूह (super set) भनिन्छ । यसलाई गणितीय सङ्केतमा लेख्दा $X \subset Y$ वा $Y \supset X$ लेखिन्छ ।

माथिको तालिकाका समूहका आधारमा सम्भाव्य उपसमूहहरू छुट्याऊ । सबैलाई $\subset$ र $\supset$ सङ्केत प्रयोग गरी लेख ।

2. उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह **(Proper and Improper Subsets)**

माथि क्रियाकलाप 1 मा दिइएको तालिकाका आधारमा तलका तथ्यहरूमा छलफल गरौँ ।

(क) के उपसमूह O मा सर्वव्यापक समूह U का सबै सदस्यहरू परेका छन् ?

(ख) के O बाहेक अन्य उपसमूहहरू A, E, K, P आदिमा सर्वव्यापक समूह U का सबै सदस्यहरू परेका छन् ? तुलना गरी हेर ।

माथिको छलफलका आधारमा

उपसमूह O मा U का सबै सदस्यहरू परेका छन् ।

त्यसैले उपसमूह O सर्वव्यापक समूह U को अनुपयुक्त उपसमूह (improper subset) हो । अनुपयुक्त उपसमूहलाई $\subseteq$ सङ्केतले जनाइन्छ । सङ्केतमा लेख्दा $O \subseteq U$ हुन्छ ।

O बाहेक अन्य सबै उपसमूहमा सर्वव्यापक समूह U का सबै सदस्यहरू परेका छैनन् । त्यसैले O बाहेक सबै उपसमूहहरू सर्वव्यापक समूह U का उपयुक्त उपसमूहहरू (proper subsets) हुन् । उपयुक्त उपसमूहलाई $\subset$ सङ्केतले जनाइन्छ ।

सङ्केतमा लेख्दा $A \subset U$ हुन्छ ।

(ग) अब U का अन्य उपयुक्त उपसमूहहरू के के हुन सक्छन् ? लेख र छलफल गर ।

(घ) के $D \subset G$ लेख्न सकिन्छ ? कसरी ?

(ङ) $\subset$ सङ्केत प्रयोग गरी अन्य 10 ओटा उपयुक्त उपसमूहहरू बनाई सङ्केतमा लेख । साथीको लेखाइसँग आफ्नो लेखाइलाई तुलना गरी हेर ।

(च) माथिको छलफलका आधारमा उपयुक्त र अनुपयुक्त समूहको अर्थ लेख । आफ्नो अर्थलाई साथीहरूसँग छलफल गर ।

(छ) के तिमीहरूको छलफलको निष्कर्ष तलका तथ्यहरूसँग मिल्छ ? तुलना गरी हेर ।

Curriculum Development Centre

निष्कर्ष :

1. यदि कुनै सर्वव्यापक समूह U वा अन्य समूहहरू A, B, C .... आदिबाट उक्त समूहका सबै सदस्यहरू लिएर उपसमूह बनाइन्छ भने त्यसलाई अनुपयुक्त उपसमूह (improper subset) भनिन्छ । यसलाई $\subseteq$ सङ्केतले जनाइन्छ ।
2. यदि कुनै सर्वव्यापक समूह U वा अन्य समूहहरू A, B, C, ... आदिबाट केही मात्र सदस्यहरू लिएर कुनै उपसमूह बनाइन्छ भने त्यसलाई उपयुक्त उपसमूह (proper subset) भनिन्छ । यसलाई $\subset$ सङ्केतले जनाइन्छ ।
3. खाली समूह अन्य कुनै पनि समूहको उपयुक्त उपसमूह हुन्छ ।
4. बराबर समूहहरू आपसमा अनुपयुक्त उपसमूहहरू हुन्छन् ।

अभ्यास 11.2

1. यदि W = { 5 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह} छ भने,
   (क) समूह W लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।
   (ख) समूह W बाट बन्ने दुई ओटा एक सदस्यीय उपसमूहहरू बनाई नामकरण गर ।
   (ग) प्रश्न (क) बाट दुई सदस्यीय थप कति ओटा समूहहरू बन्न सक्लान् ? बनाएर हेर ।
   (घ) समूह W बाट एक एक ओटा, दुई दुई ओटा, तिन तिन ओटा, चार चार ओटा, पाँच पाँच ओटा, छ छ ओटा र सदस्य नभएका उपसमूहहरू निर्माण गरी नामकरण गर ।
   (ङ) प्रश्न नं. (घ) का आधारमा दिइएको समूह W बाट जम्मा कति ओटा उपससमूह बने ? लेख ।
2. F = {केरा, स्याउ, अङ्गुर} बाट बन्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
3. समूह Q = {1} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
4. समूह R = {1, 2} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
5. समूह S = {1, 2, 3} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
6. समूह T = {1, 2, 3, 4} बाट बन्न सक्ने सबै उपसमूहहरू लेख ।
7. प्रश्न नं. 3 देखि 6 सम्मका उत्तरका आधारमा तलको तालिका कापीमा बनाइ भर :

क्र.सं	समूह	उपसमूहहरू	सदस्य सङ्ख्या	उपसमूहको सङ्ख्या
1.	{1}	....	....	....
2.	{1, 2}.	....	....	....
3.	{1,2, 3}	....	....	....
4.	{1, 2, 3, 4}	....	....	....

माथिको तालिकाको आधारमा कुनै पनि समूहबाट बन्न सक्ने सम्भाव्य उपसमूहको सङ्ख्या पत्ता लगाउने सूत्र निकाल ।

Curriculum Development Centre

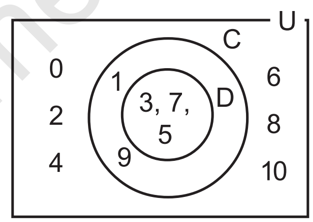
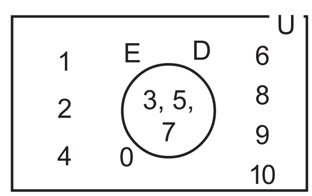
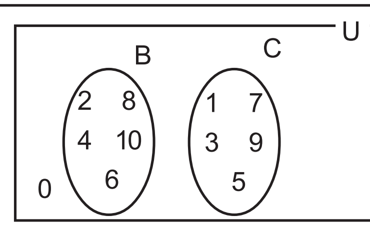
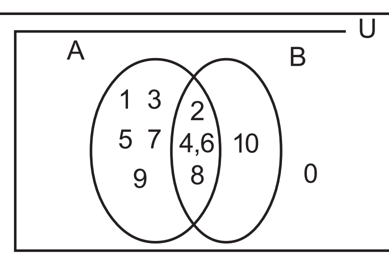
11.3 भेन चित्र (Venn Diagram)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौं कुनै सर्वव्यापक समूह U = {10 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरू} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} छ । अब यसबाट निम्नानुसारका फरक फरक उपसमूहहरू बनाऔँ ।

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
B = {2, 4, 6, 8, 10}
C = {1, 3, 5, 7, 9}
D = {3, 5, 7}
E = {3, 5, 7}

अब सर्वव्यापक समूह U बाट बनेका समूहहरूलाई यसरी पनि देखाउन सकिन्छ । अध्ययन गरी छलफल गर । तिमीले पनि अभ्यास पुस्तिकामा भेन चित्र बनाउने प्रयास गर ।

(क) समूहहरू **C** र **D** लाई तुलना गरी हेरौँ । D का सबै सदस्यहरू समूह C का पनि सदस्यहरू हुन् । त्यसैले समूह D समूह C को उपयुक्त उपसमूह हो । यहाँ D ⊂ C अथवा C ⊃ D हुन्छ ।	
(ख) समूहहरू **D** र **E** लाई तुलना गरी हेरौँ । यहाँ समूह D र E का सबै सदस्यहरू एक आपसमा उही र उत्तिकै छन् । त्यसैले समूहहरू D र E बराबर समूहहरू र अनुपयुक्त उपसमूह दुवै हुन्छन् ।	 D = E D ⊆ E
(ग) समूहहरू **B** र **C** लाई आपसमा तुलना गरी हेरौँ : यहाँ, समूह B र C का कुनै पनि सदस्यहरू आपसमा मिल्दा छैनन् । त्यसैले यिनीहरू आपसमा अलग्गिएका छन् । B र C अलग्गिएका समूह (disjoint sets) हुन् ।	
(घ) समूहहरू **A** र **B** लाई आपसमा तुलना गरी हेरौँ । यहाँ समूह A र B मा केही सदस्यहरू 2, 4, 6 र 8 साझा वा मिल्दा छन् । त्यसैले यस्ता समूह खप्टिएका समूहहरू (overlapping sets) हुन् ।	

Curriculum Development Centre

माथिका सबै चित्रहरू भेन चित्र हुन् । समूहका विभिन्न प्रकारअनुसार यिनीहरूका भेन चित्रहरू पनि फरक फरक हुन्छन् ।

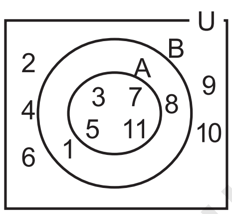
माथिका क्रियाकलापहरूका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर :

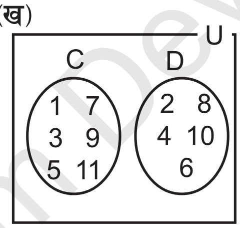
(क) कुनै पनि भेन चित्रमा के के हुन्छन् ?
(ख) सर्वव्यापक समूहलाई जनाउन कस्तो आकारको क्षेत्र प्रयोग गरिएको छ ?
(ग) सर्वव्यापक समूहबाहेक अन्य समूह जनाउनका लागि कस्तो आकारको क्षेत्र प्रयोग गरिएको छ ?
(ङ) माथिको छलफलका आधारमा भेन चित्रसँग सम्बन्धित विभिन्न तथ्यहरू पत्ता लगाऊ । ती तथ्यहरू साथीसँग छलफल गर । निष्कर्षलाई तलका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

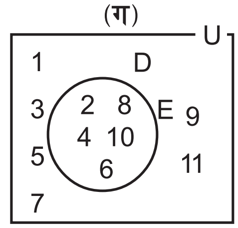
1. भेन चित्रमा सर्वव्यापक समूहका लागि आयतकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ ।
2. त्यस्तै अन्य समूहका लागि गोलाकार वा वृत्ताकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ ।
3. प्रत्येक समूहमा परेका सदस्यहरूलाई सम्बन्धित क्षेत्रभित्र पर्ने गरी नै राखिएको हुन्छ ।
4. भेन चित्रमा समूहहरूका किसिमअनुसार साझा सदस्यहरूलाई खप्टिएको भागमा राखिएको हुन्छ । त्यस्तै बाँकी सदस्यहरूलाई आआफ्नो समूहमा राखिएको हुन्छ ।
5. यसरी समूह वा समूहका विभिन्न सम्बन्धहरूलाई जनाउने चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई भेन चित्र (venn-diagram) भनिन्छ ।

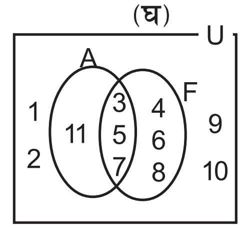
अभ्यास 11.3

1. तलका भेन चित्रका आधारमा प्रत्येक समूहलाई सूचीकरण र व्याख्या दुवै विधिबाट प्रस्तुत गरी लेख ।

(क)


(ख)


(ग)


(घ)


अब सर्वव्यापक समूह U पत्ता लगाऊ ।

2. यदि U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, P = {a, b, c, d, e, i}

Q = {a, e, i}, R = {b, c, d, j}, S = {i, e, a} र

T = {a, b, c, f, g} छ भने

तलका समूहहरूलाई छुट्टाछुट्टै भेन चित्रमा प्रस्तुत गरी देखाऊ :

(क) U, P र Q (ख) U, Q र R (ग) U, Q र S (घ) U, R र T

3. माथि प्रश्न नं. 1 र 2 मा दिइए जस्तै प्रश्नहरू आफैं बनाई समाधान गर । साथीसँग मिलेर समाधान गर । आफ्नो र साथीको समाधान तुलना गरेर पनि हेर ।

Curriculum Development Centre

11.4 अलग्गिएका र खप्टिएका समूहहरू (Disjoint and Overlapping Sets)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गर र छलफल गर :

(क) तल चार ओटा समूहहरू दिइएका छन् :

U = {10 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याहरू} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = { 6 का गुणन खण्डहरू} = {1, 2, 3, 6}

B = {8 का गुणन खण्डहरू} = {1, 2, 4, 8}

C = {5 को 10 सम्मका अपवर्त्यहरू} = {5,10}

माथिका समूहका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।

(क) के समूह A का कुनै सदस्यहरू समूह C मा पर्छन् ?

(ख) के समूहहरू B र C मा साझा सदस्यहरू छन् ?

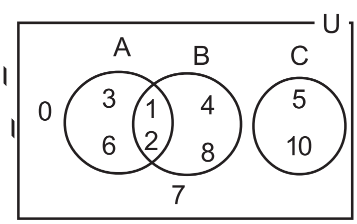
(ग) समूहहरू A र B मा साझा सदस्यहरू के के छन् ?

यहाँ समूह A का कुनै पनि सदस्य समूह C मा परेका छैनन् । त्यसैले समूह A र C अलग्गिएका समूहहरू हुन् । त्यसै गरी समूहहरू A र B का साझा सदस्यहरू 1 र 2 हुन् । त्यसैले समूहहरू A र B आपसमा खप्टिएका समूहहरू हुन् ।

(घ) समूहहरू B र C कस्ता समूहहरू होलान् ? छलफल गर ।

(ख) माथिका समूहहरूलाई भेन चित्रमा देखाउने प्रयास गरौँ :

- सबभन्दा पहिले सर्वव्यापक समूह U बनाऔँ ।
- A र B का साझा सदस्यहरू 1 र 2 लाई खप्टिएको क्षेत्रमा भरौँ ।
- A का बाँकी सदस्यहरू 3 र 6 लाई A को बाँकी क्षेत्रमा भरौँ ।
- B का बाँकी सदस्यहरूलाई B को बाँकी क्षेत्रमा भरौँ ।
- C का सबै सदस्यहरूलाई C मा भरौँ ।



(ग) माथिको भेन चित्रलाई अभ्यास पुस्तिकामा बनाई खप्टिएका समूहहरूको खप्टिएको भागलाई रङ्ग लगाएर देखाऊ ।

(घ) माथिका छलफलका आधारमा खप्टिएका समूह र अलग्गिएका समूहहरूको परिभाषा दिने प्रयास गर । आफूले लेखेको परिभाषालाई साथीले लेखेको परिभाषासँग तुलना गरी छलफल गरी हेर । निष्कर्षलाई तलको परिभाषासँग तुलना गरी हेर ।

1. यदि कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी समूहहरूमा साझा सदस्यहरू छन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई खप्टिएका समूह (overlapping sets) भनिन्छ ।
2. यदि कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी समूहहरूमा साझा सदस्यहरू छैनन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई अलग्गिएका समूह (disjoint sets) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 11.4

1. तल दिइएका समूहका आधारमा खप्टिएका र अलग्गिएका समूहहरू छुट्याऊ :

   A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}   B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

   C = {0, 1, 3, 5, 7, 11}   D = {5, 6, 7, 8, 10}

   E = {0, 2, 9, 12}

   (क) A र B   (ख) A र C   (ग) B र C   (घ) A र D

   (ङ) A र E   (च) B र D   (छ) B र E   (ज) C र D   (झ) C र E

2. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} भए तलका समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

   (क) A का प्रत्येक सदस्यहरूमा 1 जोड्दा बन्ने समूह B

   (ख) A का प्रत्येक सदस्यहरूलाई 2 ले गुणन गर्दा बन्ने सदस्य समूह C

   (ग) A मा भएका बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह D

   (घ) A मा भएका 10 का गुणन खण्डहरूको समूह E

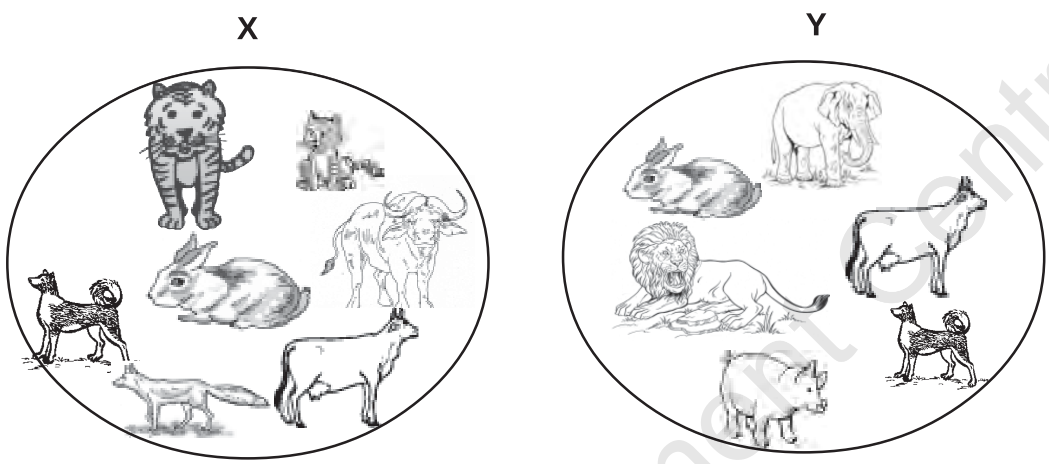
   (ङ) माथिका समूहहरू A, B, C, D र E मा खप्टिएका र अलग्गिएका समूहहरू छुट्याऊ ।

3. कुनै पाँच पाँच ओटा खप्टिएका र अलग्गिएका समूह खोज/बनाऊ । साथीसँग एकअर्काका समूहहरू छुट्याउन अभ्यास गर ।

Curriculum Development Centre

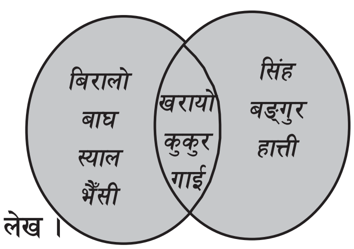
11.5 समूहको संयोजन (Union of Sets)

तलका क्रियाकलाप र चित्रहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



माथिका समूहहरू X र Y का सदस्यहरूलाई चिनाउने नाम दिएर मिलाएर राखौँ र छाया पारी देखाऔँ ।

अब तल दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गरौँ ।



1. समूहहरू X र Y का साझा सदस्यहरू के के हुन् ?
2. के समूह X मा समूह Y का सबै सदस्यहरू पर्छन् ?
3. समूहहरू X र Y का सदस्यहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।
4. समूहहरू X र Y का साझा सदस्यहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।
5. समूहहरू X र Y का सबै सदस्यहरूलाई नदोहोर्‍याइकन सूचीकरण विधिबाट लेख ।

माथि छाया परेको भागलाई समूहहरू X र Y को संयोजन (union of sets) भनिन्छ । यसलाई संयोजन चिह्न $\cup$ ले जनाइन्छ ।

त्यसैले $X \cup Y$ = X संयोजन Y = {बिरालो, बाघ, स्याल, भैँसी, खरायो, कुकुर, गाई, सिँह, बङ्गुर, हात्ती} हुन्छ ।

माथिको छलफलका आधारमा समूहको संयोजनको परिभाषा र तथ्यहरू लेख्ने प्रयास गर । आफ्नो लेखाइलाई साथीसँग छलफल गर । अन्तिम निष्कर्षलाई तलको परिभाषा र तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

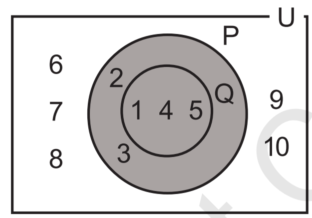
1. कुनै दुई समूहहरू X वा Y वा दुवै समूहका सदस्यहरू X र Y का सम्पूर्ण सदस्यहरू परेको समूहहरूको अवस्थालाई समूहहरू X र Y को संयोजन भनिन्छ ।
2. यसलाई $X \cup Y$ ले जनाइन्छ ।
3. यसलाई X संयोजन Y(X union Y) भनेर पढिन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

समस्या : यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, P = {1, 2, 3, 4, 5}, Q = {1, 4, 5}, R = {3, 4, 5, 6, 7, 8} र S = {2, 3, 6, 7, 10} भए तलका प्रत्येक समूहहरूको संयोजन निर्माण गर र भेन चित्रमा पनि देखाऊ :

(क) $P \cup Q$ (ख) $Q \cup R$ (ग) $Q \cup S$

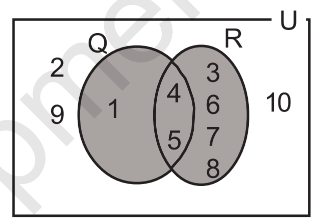


समाधान

(क) यहाँ $P \cup Q$ = {1, 2, 3, 4, 5} $\cup$ {1, 4, 5}

= {1, 2, 3, 4, 5}

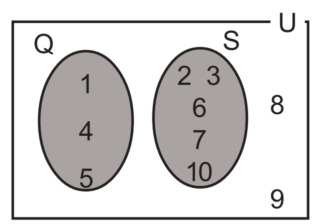
चित्रमा $P \cup Q$ जनाउने समूहलाई छाया पारी देखाइएको छ ।



(ख) $Q \cup R$ = {1, 4, 5} U { 3, 4, 5, 6, 7, 8}

= {1, 3 ,4 ,5, 6, 7, 8}

चित्रमा $Q \cup R$ लाई छाया पारी देखाइएको छ ।



(ग) $Q \cup S$ = {1, 4, 5} $\cup$ {2, 3, 6, 7, 10}

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10}

चित्रमा $Q \cup S$ लाई छाया पारेर देखाइएको छ ।

उदाहरण 2

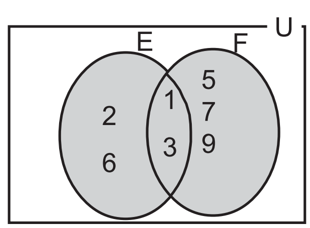
यदि E = {6 का गुणन खण्डहरू} र F = {10 सम्मका बिजोर सङ्ख्याहरू } भए

(क) समूहहरू E र F लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) $E \cup F$ र $F \cup E$ लाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

(ग) $E \cup F = F \cup E$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर ।

(घ) $F \cup F = F$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर ।



समाधान

(क) E = {1, 2 ,3, 6}

F = { 1, 3, 5, 7, 9}

(ख) $E \cup F$ र $F \cup E$ लाई भेन चित्रमा देखाउँदा,

Curriculum Development Centre

(ग) $E \cup F = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

$F \cup E = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 3, 6\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

त्यसैले $E \cup F = F \cup E$ हुन्छ । प्रमाणित भयो ।

$F \cup F = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = F$

$\therefore F \cup F$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

तलका समूहका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूको समाधान गर :

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $J = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $K = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ र $L = \{0, 1, 3, 6, 11\}$ छ ।

(क) $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L)$, प्रमाणित गर ।

(ख) $(J \cup K) \cup L$ लाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

(ग) के $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L) = U$ लेख्न सकिन्छ ?

समाधान

(क) यहाँ $(J \cup K) \cup L$

$= [\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}] U \{0, 1, 3, 6, 11\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \cup \{0, 1, 3, 6, 11\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

त्यसैले, $J \cup (K \cup L)$

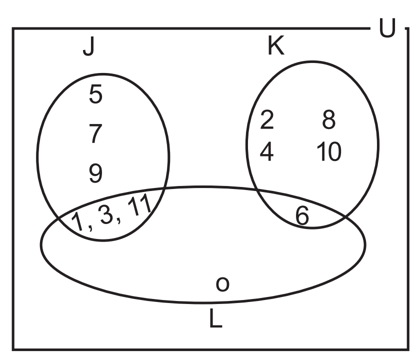
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup [\{2, 4, 6, 8, 10\} U \{0, 1, 3, 6, 11\}]$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

त्यसैले $(J \cup K) \cup L = J \cup (K \cup L)$ प्रमाणित भयो ।

(ख) यहाँ $(J \cup K) \cup L$ लाई भेन चित्रमा देखाउँदा



(ग) यहाँ (J ∪ K) ∪ L = {0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} छ ।

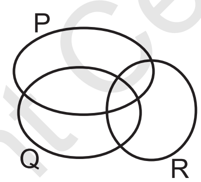
त्यस्तै, J ∪ (K ∪ L) = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} छ ।

र U = {0, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} छ ।

त्यसैले (J ∪ K) ∪ L = J ∪ (K ∪ L) = U लेख्न सकिन्छ ।

अभ्यास 11.5

1. दायाँको जस्तो छुट्टाछुट्टै भेन चित्र खिच । तल दिएका समूहको संयोजन जनाउने भाग पत्ता लगाई छाया पारेर देखाऊ :



(क) P ∪ Q (ख) R ∪ Q (ग) Q ∪ R (घ) P ∪ R

(ङ) R ∪ P (छ) (P ∪ Q) ∪ R (ज) P ∪ (Q ∪ R)

2. यदि U = {12 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}, A = {जोर सङ्ख्याहरू} र B = {बिजोर सङ्ख्याहरू} भए

(क) समूहहरू U, A र B लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) भेन चित्र बनाई निम्नानुसारका समूह पत्ता लगाऊ ।

(अ) A ∪ B (आ) B ∪ A (इ) B ∪ B (ई) A ∪ A

(ग) प्रमाणित गर :

(अ) A ∪ B = B ∪ A (आ) B ∪ B = B (इ) A ∪ A = A (ई) A ∪ B = B ∪ A = U

3. यदि U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} र A = {1, 3, 5, 6, 7, 9} भए

(क) U ∪ A लाई भेन चित्रमा देखाऊ । (ख) A ∪ U = U ∪ A = U प्रमाणित गरी देखाऊ ।

4. यदि M = {8 का गुणन खण्डहरू} र N = { } = ∅ भए,

(क) M लाई सूचीकरण विधिबाट लेख ।

(ख) M ∪ N लाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

(ग) N ∪ M लाई सूचीकरण विधिबाट देखाऊ ।

(घ) के M ∪ N = N ∪ M लेख्न सकिन्छ ? प्रमाणित गरी देखाऊ ।

5. यदि **U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}, E = {a, b, c, d}, F = {e, f, g, h}** र **G = {a, b, c, e, f, g, i, j}** भए,

(क) निम्नानुसारका समूहहरूलाई भेन चित्रमा देखाऊ :

(अ) (E ∪ F) ∪ G (आ) E ∪ (F ∪ G)

(ख) के (E ∪ F) ∪ G = E ∪ (F ∪ G) लेख्न सकिन्छ ? प्रमाणित गरी देखाऊ ।

Curriculum Development Centre

11.6 समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of Sets)

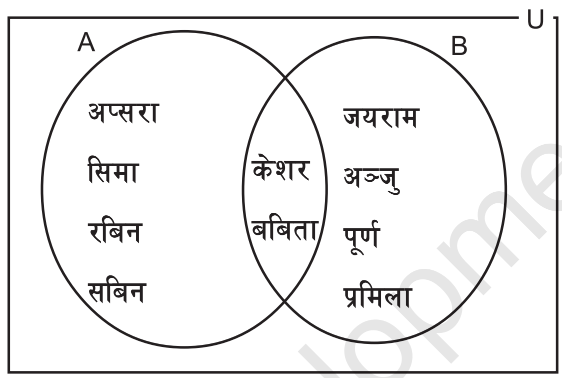
कक्षा 7 मा पढ्ने 10 जना विद्यार्थीले गीत गाउने र नाच्ने प्रतियोगितामा भाग लिएका छन् ।

गीत गाउनेको विद्यार्थीहरूको समूहलाई A र नाच्ने विद्यार्थीको समूहलाई B मानिएको छ ।

गीत गाउने (A) = {अप्सरा, बबिता, सिमा, केशर, रबिन, सबिन}

नाच्ने (B) = {केशर, जयराम, बबिता, अञ्जु, पूर्ण, प्रमिला}

अब, गीत गाउने विद्यार्थीको समूह र नाच्ने विद्यार्थीको समूहलाई भेन चित्रमा देखाउँदा,



(क) दुवै क्रियाकलाप मन पराउने विद्यार्थी कुन कुन रहेछन् ? भन्न सक्छौ ?

(ख) दुवै क्रियाकलाप मन पराउने विद्यार्थी पर्ने क्षेत्रलाई छाया पारेर देखाऊ ।

(ग) के गीत गाउने मात्र विद्यार्थीको समूह बनाउन सक्छौ ?

(घ) के नाच्न जान्ने विद्यार्थी मात्रको समूह बनाउन सक्छौ ?

> A र B दुई ओटा समूहहरू छन् । समूहहरू A र B का साझा सदस्यहरूका समूहलाई समूहको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets) भनिन्छ । यसलाई $\cap$ ले जनाइन्छ । अर्थात्, $A \cap B$ लाई A प्रतिच्छेदन B (A intersection B) भनि पढ्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

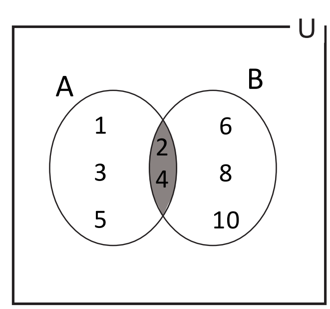
यदि A = {1,2,3,4,5} र B = {2,4,6,8,10} भए $A \cap B$ समूह निर्माण गरी भेन चित्रमा छाया पारी देखाऊ ।

समाधान

यहाँ, A = {1, 2, 3, 4, 5} र B = {2, 4, 6, 8,10} छन् ।

अब, $A \cap B$ भनेको दुवै समूहमा पर्ने साझा सदस्यहरू हुन् ।

अत: $A \cap B$ = {1, 2, 3, 4, 5} $\cap$ {2, 4, 6, 8, 10} = {2, 4}



Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

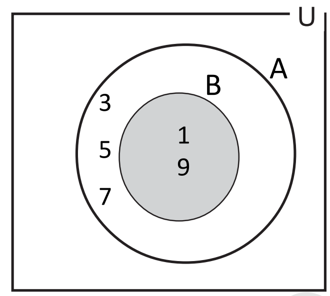
यदि A = {1,3,5,7,9} र B = {1, 9} भए $A \cap B$ लाई भेन चित्रमा छाया पारी देखाऊ ।

समाधान : यहाँ,

A = {1, 3, 5, 7, 9} र B = {1, 9} छन् ।

$A \cap B$ = {1, 3, 5, 7, 9} $\cap$ {1.9} = {1, 9}

भेन चित्रमा देखाउँदा



उदाहरण 3

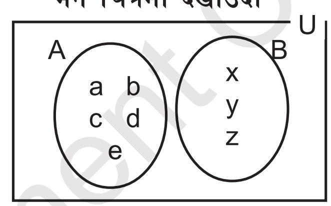
यदि A = {a, b, c d, e} र B = {x, y, z} भए $A \cap B$ लाई भेन चित्रमा छाया पारी देखाऊ ।

समाधान

यहाँ, A = {a, b, c, d, e} र B = {x, y, z}

अब, A र B मा कुनै पनि सदस्य साझा नभएकाले $A \cap B$ खाली समूह हो । त्यसैले छाया पारी देखाउन सकिएन । त्यसैले $A \cap B$ = { } वा ϕ हुन्छ ।

भेन चित्रमा देखाउँदा



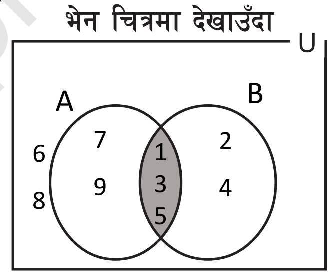
उदाहरण 4

यदि सर्वव्यापक समूह U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8, 9}, A = {1, 3, 5, 7, 9} र B = {1, 2, 3, 4, 5} भए $A \cap B$ पत्ता लगाई भेन चित्रमा देखाऊ ।

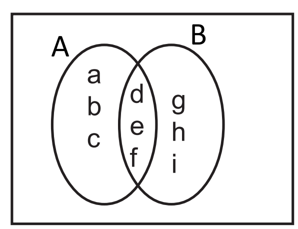
समाधान

$A \cap B$ = {1, 3, 5, 7, 9} $\cap$ {1, 2, 3, 4, 5} = {1, 3, 5}

भेन चित्रमा देखाउँदा



अभ्यास 11.6



1. दिइएको भेन चित्रबाट तल दिइएका समूहहरू पत्ता लगाऊ :
   (क) $A \cap B$ (ख) $B \cap A$ (ग) $A \cap A$
   (घ) $U \cap A$ (ङ) $U \cap B$
2. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 6} र B = {1, 2, 3, 4, 5} भए $A \cap B$ पत्ता लगाऊ र भेन चित्रमा पनि प्रस्तुत गर ।
3. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {3, 6, 9} र C = {2, 4, 6, 10} भए
   (क) $A \cap B$ (ख) $B \cap C$ (ग) $A \cap C$ पत्ता लगाई प्रत्येकलाई भेन चित्रमा पनि देखाऊ ।
4. यदि P = {a, b, c, d, e} र Q = {a, b, c} भए $P \cap Q$ पत्ता लगाई भेन चित्र पनि बनाऊ ।
5. यदि U = {10 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}, M = {2 का अपवर्त्यहरू}, N = {8 का गुणन खण्डहरू} र O = {जोर सङ्ख्या} भए,
   (क) माथिका समूहहरूलाई भेन चित्रमा देखाऊ । (ख) $M \cap N$ पत्ता लगाऊ ।
   (ग) के $M \cap (N \cap O) = (M \cap N) \cap O$ लेख्न सकिन्छ ? प्रमाणित गरी देखाऊ ।

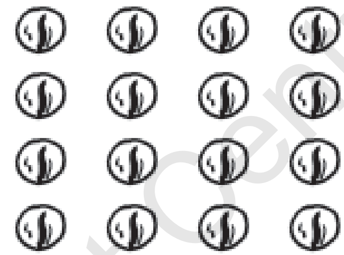
Curriculum Development Centre

एकाइ 12 पूर्ण सङ्ख्या (Whole Number)

12.1 सङ्ख्याको वर्ग र वर्गमूल (Square and Square Root of the number)

1. **सङ्ख्याको वर्ग**

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



लहरमा 4 ओटा र पङ्क्तिमा 4 ओटा गुच्चाहरू राखौँ । जम्मा गुच्चाहरू कति भए ?

यहाँ, दुवै लहर र पङ्क्तिमा चार चार ओटा गुच्चाहरू छन् । त्यसैले $4 \times 4 = 16$ हुन्छ । त्यसैले 4 को वर्ग सङ्ख्या 16 हुन्छ ।

माथिको क्रियाकलापबाट वर्गको परिभाषा लेख ।

कुनै पूर्ण सङ्ख्यालाई आफैँसँग गुणन गर्दा आउने गुणन फललाई नै वर्ग सङ्ख्या भनिन्छ । वर्ग सङ्ख्या निकाल्दा दिएको सङ्ख्यालाई त्यही सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्छ । जस्तै : 4 को वर्ग सङ्ख्या $4 \times 4 = 16$ हुन्छ । 4 को वर्गलाई $4^2 = 4 \times 4 = 16$ लेख्न सकिन्छ ।

नोट : कुनै सङ्ख्या मानौ 5 को वर्ग भन्नाले 5 एकाइ लम्बाइ भएको एउटा वर्गको क्षेत्रफल भन्ने बुझ्नुपर्छ । अत: $5^2 = 5 \times 5 = 25$ भएको हो ।

उदाहरण 1

तल दिइएका सङ्ख्याको वर्ग सङ्ख्या निकाल :

(क) 5 (ख) 12 (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) 0.04

समाधान

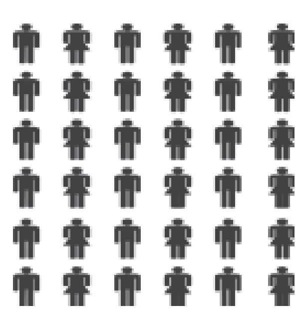
(क) 5 को वर्ग सङ्ख्या = $5^2 = 5 \times 5 = 25$ (ख) 12 को वर्ग सङ्ख्या = $12^2 = 12 \times 12 = 144$

(ग) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ को वर्ग सङ्ख्या = $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (घ) $(0.04)^2$ को वर्ग सङ्ख्या = $(0.04)^2 = 0.04 \times 0.04 = 0.0016$

2. **सङ्ख्याको वर्गमूल**

(क) **वर्गमूलको परिचय**

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



(अ) एउटा विद्यालयको कक्षा 7 मा जम्मा 36 जना विद्यार्थीहरू छन् । तिनीहरूलाई वर्गाकार रूपमा मिलाएर राखौँ । प्रत्येक किनारामा कति कति विद्यार्थी पर्छन् ?

यहाँ, एउटा किनारामा 6 जना विद्यार्थीहरू परेका छन् । $36 = 6 \times 6$ हुन्छ । त्यसैले हरेक किनारामा 6/6 जना पर्ने गरी मिलाइएको रहेछ । अब, 36 को वर्गमूल 6 हुन्छ । वर्गमूललाई हामी ($\sqrt{}$) चिह्नले जनाउँछौँ ।

Curriculum Development Centre

(आ) माथिको क्रियाकलापका आधारमा वर्गमूलको परिभाषा लेख्न सक्छौँ ? साथीसँग छलफल गरी लेखेको परिभाषालाई तलको परिभाषासँग तुलना गरेर हेर ।

कुनै पनि वर्ग सङ्ख्याका दुई ओटा उस्ताउस्तै गुणन खण्डहरू हुन्छन् भने ती गुणन खण्डहरूमध्ये एउटालाई त्यस सङ्ख्याको वर्गमूल भनिन्छ । वर्गमूललाई ($\sqrt{\ }$) चिह्नमा पनि लेखिन्छ । जस्तै : $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ हुन्छ ।

(ख) **गुणन खण्ड विधिबाट वर्गमूल निकाल्ने तरिका**

गुणन खण्ड विधिबाट वर्गमूल निकाल्दा निम्नानुसारको प्रक्रिया अपनाउनुपर्छ :

1. दिइएको सङ्ख्याको रूढ गुणन खण्ड निकाल्ने
2. रूढ गुणन खण्डलाई $\sqrt{\ }$ चिह्न भित्र राख्ने
3. जोडा जोडा सङ्ख्यालाई घाताङ्कको रूपमा लेख्ने
4. प्रत्येक जोडाको एउटा एउटा सङ्ख्या लेख्ने र गुणन गर्ने
5. प्राप्त गुणन फल नै सो सङ्ख्याको वर्गमूल हुन्छ

उदाहरण 2

81 को वर्गमूल निकाल ।

समाधान : यहाँ 81 का रुढ गुणन खण्डहरू निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l} 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

तसर्थ 81 = 3 x 3 x 3 x 3

अब, 81 को वर्गमूल निकाल्दा,

81 को वर्गमूल

$= \sqrt{81}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \sqrt{3^2 \times 3^2}$

$= 3 \times 3$

$= 9$

उदाहरण 3

कुनै एउटा विद्यालयका कक्षा 7 मा पढ्ने विद्यार्थीहरूले लुम्बिनी भ्रमणका लागि विद्यार्थी सङ्ख्या जति छ त्यति नै रुपियाँ जम्मा गर्दा रु. 15,625 जम्मा भएछ भने सो कक्षाको विद्यार्थी सङ्ख्या निकाल ।

समाधान : यहाँ आवश्यक विद्यार्थी सङ्ख्या = 15,625 को वर्गमूल हुन्छ । त्यसैले सर्वप्रथम 15,625 को रुढ गुणन खण्डहरू निकालौँ ।

15625 को रुढ गुणन खण्ड निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l} 5 & 15625 \\ \hline 5 & 3125 \\ \hline 5 & 625 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$\therefore$ 15625 = 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5

अब, 15,625 को वर्गमूल निकाल्दा

$\sqrt{15625} = \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= \sqrt{5^2 \times 5^2 \times 5^2}$

$= 5 \times 5 \times 5$

$= 125$

अत: उक्त विद्यालयमा कक्षा 7 मा पढ्ने विद्यार्थी 125 जना रहेछन् ।

Curriculum Development Centre

(ग) भाग विधिद्वारा वर्गमूल निकाल्ने तरिका

तल भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्ने तरिका र उदाहरण अध्ययन गरी छलफल गर :

उदाहरण 4

1764 को भाग विधिद्वारा वर्गमूल निकाल्ने प्रयास गरौँ ।

	42
4	1764
+4	-16
82	0164
+2	- 164
84	000

तरिका

1. सङ्ख्याको एक स्थानबाट जोडा जोडा मिलाउँदै जानुपर्छ । जस्तै : $\overline{17}\,\overline{64}$
2. पहिलो जोडा 17 लाई वर्ग सङ्ख्यामा विचार गर्दा 17 भन्दा सानो तर सबैभन्दा ठुलो वर्ग सङ्ख्या 16 हुन्छ । यसको वर्गमूल 4 आउने गरी हिसाब गरिन्छ ।
3. 4 लाई तलमाथि राखेर गुणन फल 17 को तलपट्टि राखी घटाउनुपर्छ । अनि अगाडिको 4 र 4 लाई जोड चिह्न राखी जोड्नुपर्छ ।
4. शेष आएको 1 सँग अर्को जोडा सङ्ख्याहरू 64 लाई तल झार्नुपर्छ । अब भाज्य 164 हुन्छ ।
5. अब, 82 को दसको स्थानको सङ्ख्याले भाज्य 164 को दसको स्थान र सय स्थानको सङ्ख्या 16 लाई भाग जाने भागफल अनुमान गर्नुपर्छ र नजिकको सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्छ। यहाँ 16 लाई 8 ले 2 पटक भाग जान्छ ।
6. अब, शेष 0 आएकाले 1764 को वर्गमूल 42 हुन्छ ।

उदाहरण 5

11025 को भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल ।

समाधान : 11025 को भाग विधिबाट वर्गमूल निकाल्दा,

	105
1	11025
+1	- 1
205	01025
+ 5	-1025
210	0000

$\therefore$ 11025 को वर्गमूल 105 हुन्छ ।

नोट :
1. यहाँ 11025 लाई एकको स्थानबाट जोडी मिलाउँदा $\overline{1}\,\overline{10}\,\overline{25}$ हुन्छ ।
2. पहिलो पटक 10 झार्नुपर्छ । तर 2 पछि कुनै अङ्क राख्दा 10 लाई भाग गर्न मिल्दैन । त्यसैले एउटा भागनास्ती शून्य (0) थपी 25 पछि झारेर 1025 बनाइएको छ ।
3. भागफलमा शून्य थपेपछि भाजकमा पनि शून्य थप्नुपर्छ ।

(घ) भिन्न भएका सङ्ख्याको वर्गमूल निकाल्ने तरिका

तल दिइएको भिन्नको वर्गमूल निकाल्ने तरिका र उदाहरण अध्ययन गरी छलफल गर :

भिन्नको वर्गमूल निकाल्ने तरिका
1. सर्वप्रथम हर र अंशको छुट्टाछुट्टै वर्गमूल निकाल्नुपर्छ ।
2. भिन्नको सरल गरी उत्तर निकाल्नु पर्छ ।

उदाहरण 6

$\frac{49}{81}$ को वर्गमूल निकाल ।

Curriculum Development Centre

यहाँ, $\frac{49}{81}$ को वर्गमूल = $\sqrt{\frac{49}{81}}=\sqrt{\frac{7\times7}{3\times3\times3\times3}}=\sqrt{\frac{7^2}{3^2\times3^2}}=\frac{7}{3\times3}=\frac{7}{9}$

त्यसैले, $\frac{49}{81}$ को वर्गमूल $\frac{7}{9}$ हुन्छ ।

उदाहरण 6

$1\frac{399}{625}$ को वर्गमूल निकाल ।

समाधान

$1\frac{399}{625}=\frac{1\times625+399}{625}=\frac{1024}{625}$ को वर्गमूल $=\sqrt{\frac{1024}{625}}==\sqrt{\frac{32\times32}{25\times25}}=\frac{32}{25}=1\frac{7}{25}$

त्यसैले, $1\frac{399}{625}$ को वर्गमूल $=1\frac{7}{25}$ हुन्छ ।

अभ्यास 12.1

(क) तल दिइएका सङ्ख्याको रूढ गुणन खण्ड विधिद्वारा वर्गमूल निकाल :

1. 64 2. 196 3. 324 4. 400 5. 1225
6. 2916 7. 5625 8. 11664 9. 121 x 169
10. 343 x 112 11. $\sqrt{144}\times\sqrt{196}$ 12. $\sqrt{25}\times\sqrt{625}$

(ख) तल दिइएका सङ्ख्याहरूको वर्ग सङ्ख्या निकाल :

1. 8 2. 12 3. 15 4. 19 5. 25 6. 77
7. 95 8. 100 9. 205 10. 500

(ग) तल दिइएका सङ्ख्याहरूको भाग विधिद्वारा वर्गमूल निकाल :

1. 169 2. 625 3. 2304 4. 8836 5. 9801
6. 11025 7. 95481 8. 166464 9. 646416 10. 1024144

(घ) तल दिइएका भिन्नको वर्गमूल निकाल :

1. $\frac{144}{169}$ 2. $\frac{625}{1024}$ 3. $\frac{1225}{2916}$ 4. $1\frac{91}{2025}$ 5. $8\frac{568}{729}$

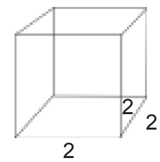
(ङ) तलका प्रश्नहरू समाधान गर :

1. एउटा वर्गाकार जग्गाको लम्बाइ 20m भए त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।
2. एउटा वर्गाकार सेमिनार हलको क्षेत्रफल 625m² भए त्यसको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

12.2 सङ्ख्याको घन र घनमूल (Cube and Cube Roots)

1. सङ्ख्याको घन



तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) 2 लाई तिन पटक गुणन गरेर हेरौँ ।

2 x 2 x 2 = 8

(ख) त्यस्तै 3 र 4 लाई पनि तिन तिन पटक गुणन गरेर हेरौँ ।

3 x 3 x 3 = 27 र 4 x 4 x 4 = 64 हुन्छ ।

यहाँ, 2 को घन सङ्ख्या 8 हो । त्यस्तै 3 र 4 का घन सङ्ख्याहरू क्रमशः 27 र 64 हुन् ।

(ग) चित्रमा प्रत्येक भुजा 2 एकाइ भएको घनाकार वस्तु देखाइएको छ । यस घनाकार वस्तुको आयतन (V) = 2 x 2 x 2 = 2^3 = 8 घन एकाइ हुन्छ ।

माथिको क्रियाकलापका आधारमा घन सङ्ख्याको परिभाषा लेख । साथीसँग छलफल गरी तिमीले लेखेको परिभाषा तलको परिभाषासँग दाँजेर हेर ।

तिन ओटा उही सङ्ख्याको गुणन फललाई घन सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै : कुनै सङ्ख्या 2 भए 2 को घन सङ्ख्या 2^3 हुन्छ । त्यस्तै कुनै सङ्ख्या a भए a को घन सङ्ख्या a^3 हुन्छ ।

उदाहरण 1

1, 7 र 10 को घन सङ्ख्या निकाल ।

समाधान

1 को घन सङ्ख्या = 1^3 = 1 x 1 x 1 = 1

7 को घन सङ्ख्या = 7^3 = 7 x 7 x 7 = 343

10 को घन सङ्ख्या = 10^3 = 10 x 10 x 10 = 1000

उदाहरण 2

तिम्रो विद्यालयमा खानेपानीका लागि एउटा 5 एकाइ लामो, 5 एकाइ चौडा र 5 एकाइ अग्लो ट्याङ्की जमिनमुनि निर्माण गर्न कति घन एकाइको खाल्डो आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

यहाँ, 5 को घन सङ्ख्या नै आवश्यक समाधान हो, किन ?

5^3 = 5 x 5 x5 = 125 घन एकाइ हुन्छ ।

तसर्थ, आवश्यक खाल्डो बराबर 125 घन एकाइ ।

Curriculum Development Centre

2. सङ्ख्याको घनमूल

क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

घन सङ्ख्याको जानकारी लिइसकेपछि अब हामी ती घन सङ्ख्याको रूढ गुणन खण्ड निकाली हेरौँ ।

1= 1 x 1 x 1

8 = 2 x 2 x 2

27 = 3 x 3 x 3

64 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 4 x 4 x4

यहाँ, हामी के भन्न सक्छौँ भने,

1 को घनमूल 1 हुन्छ ।

8 को घनमूल 2 हुन्छ ।

त्यस्तै, 27 र 64 को घनमूल क्रमश: 3 र 4 हुन्छन् ।

अब, के तिमीहरूले घनमूलको परिभाषा लेख्न वा भन्न सक्छौ ? लेख र साथीसँग छलफल गर ।

कुनै घन सङ्ख्याका तिन ओटा उस्तै गुणन खण्डहरूमध्ये एउटालाई उक्त घन सङ्ख्याको घनमूल भनिन्छ । घनमूललाई $\sqrt[3]{\ }$ ले जनाइन्छ । जस्तै a^3 घन सङ्ख्या हो भने a^3 को घनमूल $\sqrt[3]{a^3} = a$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

तलका घन सङ्ख्याको घनमूल निकाल :

(क) 216 (ख) 512 (ग) 1728

समाधान

(क) 216 को घन सङ्ख्या = $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times3\times3\times3} = \sqrt[3]{2^3\times3^3} = 2\times3 = 6$

(ख) 512 को घन सङ्ख्या = $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2} = \sqrt[3]{2^3\times2^3\times2^3} = 2\times2\times2 = 8$

(ग) 1728 को घन सङ्ख्या = $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3} = \sqrt[3]{2^3\times2^3\times3^3} = 2\times2\times3 = 12$

अभ्यास 12.2

1. **तल दिइएका सङ्ख्याहरूको घन सङ्ख्या निकाल :**

   (क) 6 (ख) 11 (ग) 13 (घ) 15 (ङ) 18 (च) 24

   (छ) 30 (ज) 45 (झ) 80 (ञ) 100

2. **तल दिइएका सङ्ख्याको घनमूल निकाल :**

   (क) 8 (ख) 125 (ग) 343 (घ) 1000 (ङ) 3375

3. एउटा घनाकार बाकसको लम्बाइ 12 मिटर छ भने सो बाकसको आयतन निकाल ।
4. 45m लम्बाइ भएको एउटा घनाकार घरको आयतन कति हुन्छ होला ?
5. खानेपानी आयोजनाले 25m लम्बाइ भएको घनाकार ट्याङ्की निर्माण गरेछ भने त्यो ट्याङ्कीको क्षमता कति होला ? [यदि $1m^3 = 1000l$]
6. एउटा घनाकार कोठामा $4096m^3$ हावा अटाउँछ भने सो कोठाको उचाइ निकाल ।
7. एउटा घनाकार खानेपानी ट्याङ्कीको जम्मा क्षमता $64,000l$ छ भने सो ट्याङ्कीको लम्बाइ निकाल ।

Curriculum Development Centre

12.3 महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor - HCF)

1. महत्तम समापवर्तकको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

मानौँ, दुई ओटा सङ्ख्या 24 र 36 छन् ।

यहाँ, सङ्ख्या 24 का गुणन खण्डको समूह बनाऔँ ।

F_{24} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

त्यस्तै सङ्ख्या 36 का गुणन खण्डको समूह बनाऔँ ।

F_{36} = { 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

अब, 24 र 36 का साझा गुणन खण्डको समूह बनाऔँ ।

साझा गुणन खण्डको समूह {1, 2, 3, 4, 6, 12} छ । यसमा सबैभन्दा ठुलो साझा गुणन खण्ड = 12 छ ।

त्यसैले, महत्तम समापवर्तक (म.स.) = 12 हुन्छ ।

माथिको क्रियाकलापका आधारमा म.स. को परिभाषा लेख र तल दिइएको म.स. को परिभाषासँग तुलना गरी हेर ।

दिइएका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको साझा गुणन खण्डहरूमध्ये सबैभन्दा ठुलो गुणन खण्डलाई महत्तम समापवर्तक (highest common factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा म.स. (H.C.F.) लेखिन्छ ।

2. भाग विधिबाट म.स. निकाल्ने तरिका

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

माथि दिइएकै सङ्ख्याहरू 24 र 36 को भाग विधिबाट म.स. निकाल्ने प्रयास गरौँ :

1. सर्वप्रथम सबैभन्दा सानो सङ्ख्या र सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुपर्छ। यहाँ सबभन्दा सानो सङ्ख्या 2 र सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या 36 छ ।
2. सानो सङ्ख्याले ठुलो सङ्ख्यालाई भाग गर्दै जानुपर्छ। (भाजकभन्दा सानो शेष नआएसम्म)
3. शेषले भाज्यलाई भाजक मानी भाग गर्दै जानुपर्छ ।

सानो सङ्ख्या 24 ले 36 लाई भाग गर्दा,

24) 36 (1
- 24
12

शेष 12 ले भाज्य 24 लाई भाग गर्दा,

12) 24 (2
x 24
0

यहाँ, नि:शेष भाग लगाउने भाजक 12 नै सङ्ख्या 24 र 36 को सबैभन्दा ठुलो साझा गुणन खण्ड हो।

त्यसैले, 24 र 36 को म.स. = 12 हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

माथिको प्रक्रियालाई एकै ठाउँमा राखी निम्नानुसार म.स. निकाल्न सकिन्छ ।

24 र 36 को म.स. निकाल्दा,

```
24) 36 ( 1
   -24
   ----
    12) 24 (2
        - 24
        ----
           0
```

त्यसैले, म.स. = 12 हुन्छ ।

उदाहरण 1

35 र 60 लाई नि:शेष भाग जाने सबैभन्दा ठुलो सङ्ख्या कुन हो ?

समाधान

यहाँ, आवश्यक सङ्ख्या 35 र 60 को म.स. हुन्छ ।

अब 35 र 60 को भाग विधिबाट म.स. निकाल्दा,

```
35) 60 (1
    -35
    ----
     25) 35 (1
         -25
         ----
          10) 25 (2
              -20
              ----
                5) 10 (2
                   10
                   ----
                    0
```

यहाँ, 35 र 60 को म.स. = 5 छ ।

त्यसैले, 35 र 60 लाई नि:शेष भाग जाने सबभन्दा ठुलो सङ्ख्या 5 हुन्छ ।

उदाहरण 2

40 ओटा किताब, 50 ओटा कापी र 60 ओटा कलमहरू बढीमा कति जना विद्यार्थीहरूलाई बराबर गरी बाँड्न सकिएला ? प्रत्येकले कति कति ओटा पाउलान् ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, आवश्यक सङ्ख्या 40, 50 र 60 को म.स. हुन्छ । प्रत्येक म.स.ले प्रत्येक सङ्ख्यालाई भाग गर्दा आउने भागफल नै सबै विद्यार्थीहरूले बराबर सङ्ख्यामा पाउने हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

40 र 50 को म.स. निकाल्दा,

```
40) 50 (1
   - 40
   ----
   10) 40 (4
      - 40
      ----
         0
```

अब, भाजक 10 ले अर्को सङ्ख्या 60 लाई भाग गर्दा,

```
10) 60 (6
   - 60
   ----
      0
```

$\therefore$ म.स. = 10 हुन्छ ।

त्यस कारण, 40 किताब, 50 कापी र 60 कलम बढीमा 10 जना विद्यार्थीहरूलाई बराबर गरी बाँड्न सकिन्छ । प्रत्येकले $40 \div 10 = 4$ ओटा किताब, $50 \div 10 = 5$ ओटा कापी र $60 \div 10 = 6$ ओटा कलम पाउँछन् ।

अभ्यास 12.3

1. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको गुणन खण्डको समूह बनाएर म.स. पत्ता लगाऊ :

   (क) 3, 6 (ख) 8, 10 (ग) 15, 18 (घ) 9, 12 (ङ) 12, 18

   (च) 9, 18 (छ) 21, 28, 35 (ज) 16, 20, 28 (झ) 20, 35, 55 (ञ) 14, 26, 54

2. तल दिइएका सङ्ख्याहरूको भाग विधिबाट म.स. निकाल :

   (क) 18, 24 (ख) 36, 42 (ग) 40, 50 (घ) 25, 35 (ङ) 48, 64

   (च) 60, 72 (छ) 54, 72 (ज) 12, 15, 18 (झ) 20, 35, 40

3. 72 ओटा गुच्चा र 99 ओटा चकलेट बढीमा कति जनालाई बराबर हुने गरी बाँड्न सकिएला र प्रत्येकले कति कति ओटा बिस्कुट र चकलेट पाउँछन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

4. 125 ओटा सुन्तला, 150 ओटा मौसम र 225 ओटा अम्बा बढीमा कति विद्यार्थीलाई बराबर हुने गरी बाँड्न सकिन्छ ? प्रत्येकले हरेक फलफुल कति कति ओटा प्राप्त गर्छन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

5. एउटा वृद्धाश्रममा 80 ओटा कम्बल, 90 ओटा स्वेटर र 120 ओटा न्यानो ज्याकेट वितरणका लागि व्यवस्था गरिएछ । ती कपडाहरू बढीमा कति जनालाई बराबर भाग लाग्ने गरी बाँड्न सकिन्छ ? प्रत्येकले हरेक कपडा कति कति सङ्ख्यामा प्राप्त गर्छन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

6. कक्षा 7 की छात्रा पुनमले आफ्नो जन्मदिनको अवसरमा 60 ओटा लड्डु, 72 ओटा पेडा र 108 ओटा बर्फी बाँडिछन् । उक्त मिठाईहरू बढीमा कति जनालाई बराबर गरी बाँडिन् होला ? पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

12.4 लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple - LCM)

1. लघुत्तम समापवर्त्यको परिचय

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) दुई ओटा सङ्ख्याहरू 6 र 8 का अपवर्त्यहरूको समूह बनाएर हेरौँ ।

सङ्ख्या 6 का अपवर्त्यहरूको समूह $(M_6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60 \ldots\}$

सङ्ख्या 8 का अपवर्त्यहरूको समूह $(M_8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, \ldots\}$

अब, सङ्ख्या 6 र 8 का साझा अपवर्त्यहरूको समूह $= \{24, 48, \ldots\}$

यहाँ 6 र 8 को सबैभन्दा सानो अपवर्त्य 24 छ । त्यसैले 24 लाई सङ्ख्या 6 र 8 को लघुत्तम समापवर्त्य भनिन्छ ।

(ख) अब, माथिका M_6 र M_8 का प्रत्येक अपवर्त्यहरूलाई 6 र 8 ले छुट्टाछुट्टै भाग गरेर हेर । यसबाट के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख ।

(ग) के 6 र 8 ले 24 लाई पनि छुट्टाछुट्टै भाग जान्छ ? भाग गरी हेर ।

कुनै पनि दुई वा दुईभन्दा बढी प्राकृतिक सङ्ख्याले नि:शेष भाग जाने सबैभन्दा सानो प्राकृतिक सङ्ख्यालाई ती सङ्ख्याहरूको लघुत्तम समावर्त्य (Lowest Common Multiple - L.C.M.) भनिन्छ ।

2. भाग विधिबाट ल.स. निकाल्ने तरिका

सङ्ख्याहरू 48 र 64 को भाग विधिबाट ल.स. निकाल्ने प्रयास गरौँ :

ल.स. निकाल्ने तरिका/प्रक्रिया

1. दिइएका सबै सङ्ख्याहरूलाई पङ्क्ति (row) मा अर्धविराम (,) राखेर मिलाएर राख्ने ।
2. सबभन्दा सानो साझा रूढ गुणन खण्डद्वारा भाग गर्दै जाने ।
3. दिइएका सङ्ख्याहरूमध्ये कम्तीमा दुई ओटालाई पूर्ण रूपमा रूढ गुणन खण्ड नआएसम्म भाग गर्दै जाने ।
4. सबै भाजक रूढ गुणन खण्डहरू र अन्तिम पङ्क्तिका बाँकी सङ्ख्याहरूको गुणन फल निकाल्ने । यही गुणन फल दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. हुन्छ ।

भाग विधिबाट ल.स. निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l}
2 & 48, 64 \\ \hline
2 & 24, 32 \\ \hline
2 & 12, 16 \\ \hline
2 & 6, 8 \\ \hline
 & 3, 4
\end{array}$$

यहाँ ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 192$

अत: त्यही गुणन फल 192 दिइएका सङ्ख्याहरू 48 र 64 को ल.स. हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

9 र 12 को ल.स. निकाल :

(क) अपवर्त्यहरूको समूह बनाएर (ख) भाग विधिबाट

समाधान

(क) समूह बनाएर 9 र 12 को ल.स. निकाल्दा,

9 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_9) = {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, ...}

12 का अपवर्त्यहरूको समूह (M_{12}) = { 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 .....}

अब, अपवर्त्यहरूको समूहमा तुलना गरेर हेर्दा 9 र 12 का अपवर्त्यहरूमध्ये सबभन्दा सानो अपवर्त्य = 36 हो । त्यसैले सङ्ख्याहरू 9 र 12 को ल.स. = 36 हुन्छ ।

(ख) भाग विधिबाट 9 र 12 को ल.स. निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l} 3 & 9,\ 12 \\ \hline & 3 \quad 4 \end{array}$$

अब, ल.स. = 3 x 3 x 4 = 36 हुन्छ ।

उदाहरण 2

15, 18, 24 र 30 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ । (भाग विधिबाट)

समाधान

यहाँ दिइएका सङ्ख्याहरूले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. हुन्छ । त्यसैले भाग विधिबाट 15, 18, 24 र 30 को ल.स. निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 15, 18, 24, 30 \\ \hline 3 & 15, 9, 12, 15 \\ \hline 5 & 5, 3, 4, 5 \\ \hline & 1, 3, 4, 1 \end{array}$$

अब, ल.स. = 2 x 3 x 5 x 3 x 4 = 360

यसर्थ 15, 18, 24 र 30 ले ठिक भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या 360 हुन्छ ।

उदाहरण 3

कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूलाई पहिलो 5/5 जनामा, दोस्रो 6/6 जनामा र तेस्रो 10/10 जनामा समूह बनाएर सामुदायिक/परियोजना कार्य गर्न लगाइएको रहेछ । अब विद्यार्थीहरू कम्तीमा कति जना भएमा प्रत्येक कार्यमा विद्यार्थीहरू बाँकी नहुने गरी समूह बनाउन सकिएला ? पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ, आवश्यक समूह सङ्ख्या भन्नाले प्रत्येक समूहका विद्यार्थी सङ्ख्या क्रमशः 5, 6 र 10 को ल.स. हुन्छ ।

अब, 5, 6 र 10 को भाग विधिबाट ल.स. निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 5, 6, 10 \\ \hline 5 & 5, 3, 5 \\ \hline & 1, 3, 1 \end{array}$$

अब ल.स. = 2 x 5 x 3 = 30

त्यसैले कम्तीमा 30 जना विद्यार्थीहरू भएमा क्रमशः पहिलो 5/5 जना, दोस्रो 6/6 जना र तेस्रो 10/10 जनाको समूह बनाई समूह कार्य गर्न सकिन्छ ।

अभ्यास 12.4

1. तलका प्रत्येक सङ्ख्याहरूको अपवर्त्यहरूको समूह बनाएर तथा भाग विधि गरी दुवै तरिकाले ल.स. निकाल :

   (क) 18 र 48 (ख) 12 र 30 (ग) 36 र 48

   (घ) 49 र 35 (ङ) 15, 20 र 25 (च) 30, 40 र 50

   (छ) 28, 42 र 56 (ज) 36, 54 र 72 (झ) 210, 280, 420 र 530

   (ञ) 100, 200, 300 र 400

2. 30, 36, 48 र 60 ले ठिक भाग जाने सबभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।
3. तिन ओटा मेजरिङ टेपहरू क्रमशः 24cm, 35cm र 54cm लम्बाइका छन् । अब कुनचाहिँ सबैभन्दा छोटो लम्बाइ सबै टेपले ठिक भाग जाने गरी (ठिक्क हुने गरी) नाप्न सकिएला ? पत्ता लगाऊ ।
4. त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ, जसबाट तिन घटाउँदा आउने घटाउ फललाई 18, 24 र 36 ले निःशेष भाग जान्छ ।
5. त्यो सबैभन्दा सानो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ, जसमा 7 जोड्दा आउने योगफललाई 32, 64 र 192 ले ठिक भाग लाग्छ ।
6. माथी प्रश्न 1 देखि 5 सम्म दिइए जस्तै समस्याहरू बनाई साथीसँग साटेर समाधान गरी शिक्षकलाई देखाऊ ।

Curriculum Development Centre

12.5. द्विआधार र पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धति

(Binary and Quinary Number System)

1. द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिको परिचय

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा पढिसकेका छौँ । दशमलव अर्थात् हिन्दु अरेबिक सङ्ख्या पद्धतिमा 0 देखि 9 सम्मका 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 गरी जम्मा 10 अङ्कहरू हुन्छन् । हिन्दु अरेबिक सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई 10 को घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गरिन्छ ।

जस्तै : $24 = 2 \times 10 + 4 = 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

$576 = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6 = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

अब हामी द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिका बारेमा छलफल गरौँ ।

विज्ञान तथा सूचना प्रविधिको विकासले कम्प्युटर प्रविधिको माध्यमबाट छोटो समयमै जटिलभन्दा जटिल गणितीय समस्याहरू समाधान गर्न सकिने भएको छ । कम्प्युटरमा विद्युतीय सर्किट (electrical circuit) खोल्ने र बन्द गर्ने (on and off) दुई ओटा प्रक्रियालाई क्रमश: सङ्केत 0 र 1 ले जनाइएको हुन्छ ।

यसरी द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0 र 1 गरी दुई ओटा मात्र सङ्ख्याहरू प्रयोग गरिएका हुन्छन् ।

> दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा दस ओटा अङ्क प्रयोग भए जस्तै द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा दुई ओटा 0 र 1 मात्र प्रयोग हुन्छन् । द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्याहरू 2 को घाताङ्कमा लेखिन्छ ।

2. दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

अब हामी दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल्ने तरिका बारेमा छलफल गरौँ।

दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गर्दै जाने र भागफलमा 0 नआएसम्म भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ र अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमश: शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

25 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर ।

समाधान

यहाँ, 25 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा,

2	25	
2	12	1
2	6	0
2	3	0
2	1	1
	0	1

तसर्थ, $25 = 11001_2$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

3. द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिबाट दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

$0_2 = 0 = 0$

$1_2 = 2^0 = 1$

$10_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$

$11_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$

$100_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$

$101_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$

द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई छुट्याउन पछाडि 2 राखेर 11_2 अथवा 101_2 लेख्ने गरिन्छ ।

उदाहरण 2

1001_2 र 1111_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :

समाधान

$1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 0 + 0 + 1 = 9$

$1111_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 4 + 2 + 1$

$= 15$

4. पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिको परिचय

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा दस ओटा अङ्कहरू, द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा दुई ओटा अङ्क भए जस्तै पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0, 1, 2, 3, 4 गरी पाँच ओटा अङ्कहरू प्रयोग गरिन्छन् । पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई 5 को घातका रूपमा लेखिन्छ ।

तलको तालिका अध्ययन गरी छलफल गर

5 को स्थानमान	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
दशाआधार	3125	625	125	25	5	1

5. दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

अब हामी दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल्ने तरिकाबारेमा छलफल गरौँ ।

सर्वप्रथम दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई 5 ले भागफलमा 0 नआएसम्म भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ । अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमशः शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

432 लाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ 432 लाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा,

$$\begin{array}{r|ll} 5 & 432 & \\ \hline 5 & 86 & 2 \\ \hline 5 & 17 & 1 \\ \hline 5 & 3 & 2 \\ \hline & 0 & 3 \end{array}$$

$432 = 3212_5$

6. पञ्चआधार पद्धतिबाट दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

$0_5 = 0 = 0$

$1_5 = 5^0 = 1$

$10_5 = 1 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 5$

$11_5 = 1 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 6$

$100_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 25$

$101_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 26$

पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई छुट्याउन सङ्ख्याका पछाडि 5 राखेर 11_5 लेख्ने गरिन्छ ।

उदाहरण 4

माथिको स्थानमान तालिका हेरेर 234_5 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर ।

समाधान

$$\begin{aligned} 234_5 &= 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 5^0 \\ &= 2 \times 25 + 3 \times 5 + 4 \times 1 \\ &= 50 + 15 + 4 \\ &= 69 \end{aligned}$$

अभ्यास 12.5

1. **तल दिइएका दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

   (क) 11 (ख) 25 (ग) 79 (घ) 104 (ङ) 250 (च) 366

2. **तलका प्रत्येक द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

   (क) 11_2 (ख) 101_2 (ग) 111_2 (घ) 10101_2 (ङ) 11001_2

   (च) 11111_2 (छ) 110011_2 (ज) 100000_2 (झ) 1000011_2 (ञ) 1111001_2

3. **तलका प्रत्येक दशमलव पद्धतिका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

   (क) 21 (ख) 55 (ग) 112 (घ) 650 (ङ) 1128 (च) 3650

4. **तलका प्रत्येक पञ्चआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा बदल :**

   (क) 21_5 (ख) 34_5 (ग) 123_5 (घ) 343_5 (ङ) 2113_5 (च) 1234_5

Curriculum Development Centre

एकाइ 13

पूर्णाङ्क (Integer)

13.1 पूर्णाङ्कका चार साधारण नियम

1. पूर्णाङ्कको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) N = {1, 2, 3, 4, 5, ...} लाई हामी कुन सङ्ख्याहरूको समूह भन्छौँ ?

(ख) W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} लाई हामी कुन सङ्ख्याहरूको समूह भन्छौँ ?

पहिलोलाई प्राकृतिक सङ्ख्याहरू (natural numbers) को समूह र दोस्रोलाई पूर्ण सङ्ख्याहरू (whole numbers) को समूह भनिन्छ ।

(ग) पूर्ण सङ्ख्यामा भएका कुनै दुई ओटा सङ्ख्या 5 र 8 लिऊँ ।

5 + 8 = 13, के पूर्ण सङ्ख्यामा पर्छ ?

8 - 5 = 3, के पूर्ण सङ्ख्यामा पर्छ ?

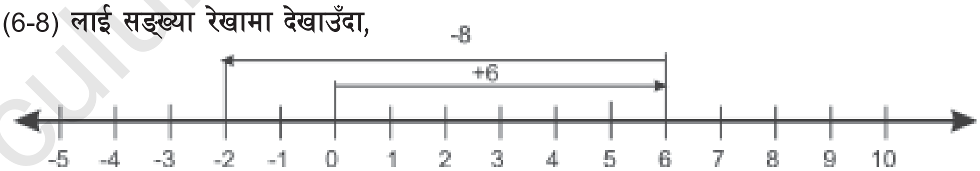
8 x 5 = 40, के पूर्ण सङ्ख्यामा पर्छ ?

(घ) अब 5 र 8 को घटाउ फल (5-8) निकाल्ने कोसिस गरौँ । यसलाई सङ्ख्या रेखाबाट घटाएर हेरौँ ।

घटाउ फल (5-8) जुन 0 भन्दा 3 एकाइ बायाँ पर्छ । 0 भन्दा बाया पर्ने सङ्ख्या त पूर्ण सङ्ख्यामा पर्दैन । यसलाई -3 लेखिन्छ । -3 पूर्णाङ्कमा पर्दछ ।

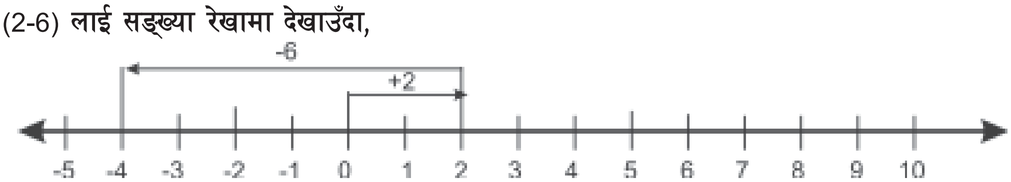
(ङ) अब, **(6-8), (2-6), (1-2), (4-5)** लाई पनि सङ्ख्या रेखामा देखाएर हेरौँ ।

1. (6-8) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



यहाँ (6-8), जुन 0 भन्दा 2 एकाइ बायाँ पऱ्यो । त्यसैले (6-8) = -2 हुन्छ ।

2. (2-6) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



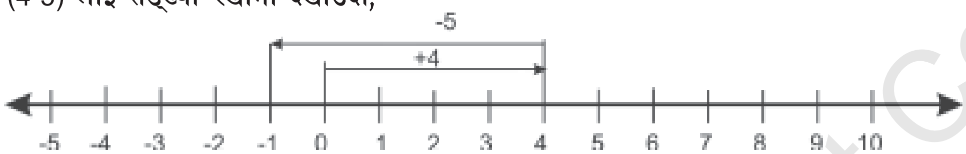
यहाँ, (2-6) जुन 0 भन्दा 4 एकाइ बायाँ पऱ्यो । त्यसैले (2-6) = -4 हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

3. (1-2) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,

यहाँ (1-2) जुन 0 भन्दा 1 एकाइ बायाँ पऱ्यो । त्यसैले (1-2) = -1 हुन्छ ।

4. (4-5) लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



यहाँ, (4-5) जुन 0 भन्दा 1 एकाइ बायाँ परेको छ । त्यसैले (4-5) = -1 हुन्छ ।

अब, हामी भन्न सक्छौँ -1, -2, -3, -4, ... आदि 0 भन्दा बायाँ र +1, +2, +3, +4, ... आदि 0 भन्दा दायाँ हुन्छन् ।

0 भन्दा बायाँका सङ्ख्याहरू 0 भन्दा साना हुन्छन् ।

0 भन्दा दायाँका सङ्ख्याहरू 0 भन्दा ठुला हुन्छन् ।

त्यसैले 0 सहितका सबै धनात्मक र ऋणात्मक सङ्ख्यालाई पूर्णाङ्क भनिन्छ । यसलाई Z ले जनाइन्छ ।

2. पूर्णाङ्कहरूका प्रकार र तुलना

(क) **पूर्णाङ्कका प्रकार**

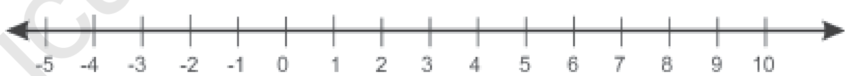
तलका विभिन्न प्रकारका पूर्णाङ्कहरूको अध्ययन गरी छलफल गर ।

पूर्णाङ्क (Z) ={ .... -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...}

धनात्मक पूर्णाङ्क (Z+) = {+1, +2, +3, ...} र

ऋणात्मक पूर्णाङ्क (Z-) = {-1, -2, -3, -4, ...}

(ख) **पूर्णाङ्कहरूबिचको तुलना**



माथिको सङ्ख्या रेखाका आधारमा 5 जोडी सङ्ख्याहरूलाई (< र >) चिह्न प्रयोग गरी लेख । जस्तै : (5<10) र (5>-2)

(ग) **विमुख पूर्णाङ्क**

पूर्णाङ्क **+2** र पूर्णाङ्क **-2** को तुलना गरी हेरौँ ।

पूर्णाङ्क +2 ले उद्गम विन्दु 0 बाट दायाँतिर रहेको पूर्णाङ्कलाई जनाउँछ । त्यस्तै, -2 ले 0 बाट उत्तिकै दुरीमा रहेको बायाँतिरको सङ्ख्या जनाउँछ ।

Curriculum Development Centre

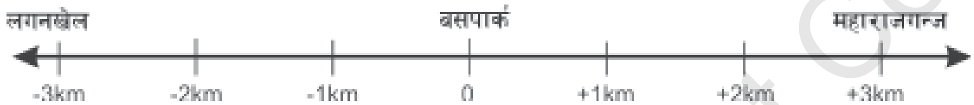
त्यसैले +2 र -2 लाई आपसमा विमुख पूर्णाङ्कहरू भनिन्छ ।

कुनै पूर्णाङ्क सङ्ख्या रेखाको उद्गम बिन्दु शून्यबाट जति दुरीमा छ ठिक त्यति नै दुरीमा रहेको अर्को विपरीत दिशाको पूर्णाङ्कलाई त्यो पूर्णाङ्कको विमुख भनिन्छ ।

-x को विमुख पूर्णाङ्क +x हुन्छ । अब -5 को विमुख पूर्णाङ्क कति होला ?

3. **पूर्णाङ्कको निरपेक्षमान (Absolute Value of Integer)**

तलको सङ्ख्या रेखा हेरी छलफल गर ।



यहाँ, उद्गम बिन्दु बसपार्क हो । बसपार्कबाट लगनखेल 3km पश्चिम अर्थात् बायाँ छ । महाराजगन्ज 3km पूर्व अर्थात् दायाँ छ । अब भन त, महाराजगन्जदेखि लगनखेलको दुरी कति छ ?

के (-3km) + (+3km) = 0km हुन्छ ? पक्कै हुँदैन ।

अथवा 3km + 3km = 6km हुन्छ ।

हो, -3km = 3km र +3km = 3km मान्ने हो भने दुई स्थानबिचको दुरी 3km + 3km = 6km हुन्छ ।

त्यसैले -3 र +3 दुवैको निरपेक्ष मान 3 हुन्छ ।

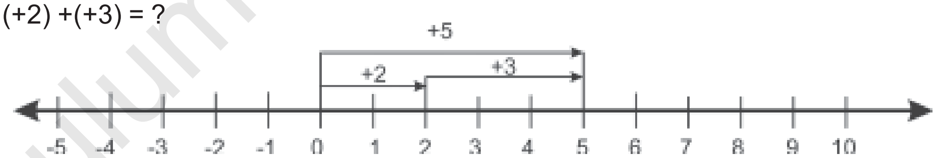
कुनै पनि पूर्णाङ्कको धनात्मक साङ्ख्यिक मानलाई निरपेक्षमान भनिन्छ । त्यसैले $|+x| = |-x| = x$ हुन्छ ।

3.1 पूर्णाङ्कको जोड र घटाउ (Addition and Subtraction of Integers)

(क) **पूर्णाङ्कको जोड (Addition of Integers)**

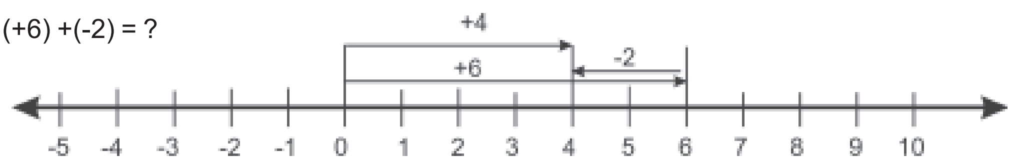
तल दिइएका सङ्ख्या रेखाका आधारमा गरिएका पूर्णाङ्कको जोड अध्ययन गरी छलफल गर ।

1. (+2) +(+3) = ?



+2 एकाइ दायाँ गएर +3 एकाइ दायाँ नै जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? हो +5 एकाइ दायाँ पुगिन्छ ।
अत: (+2) +(+3) = +5 हुन्छ ।

2. (+6) +(-2) = ?



त्यसैले (+6) + (-2) = +4 हुन्छ ।
यहाँ, उद्गम बिन्दुबाट 6 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ बायाँ आएपछि हामी 0 बाट 4 एकाइ दायाँ पुग्छौं ।

Curriculum Development Centre

3. (+2) +(-6) = ?

0 बाट 2 एकाइ दायाँ र +2 बाट 6 एकाइ बायाँ जादाँ 4 एकाइ 0 बाट बायाँ पुगिन्छ ।

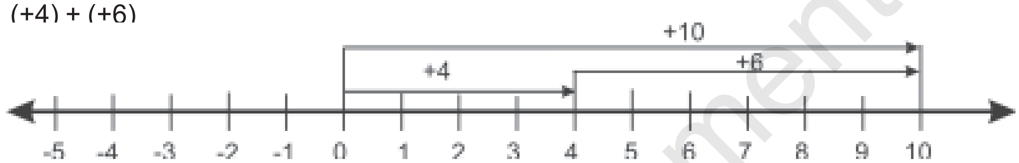
त्यसैले, (+2) + (-6) = -4 हुन्छ ।

उदाहरण 1

सङ्ख्या रेखा प्रयोग गरी जोड गर (क) (+4) + (+6) (ख) (+4) + (-6) (ग) (-4) + (+6)

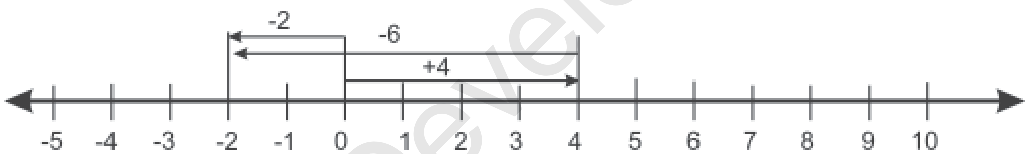
समाधान

(क) (+4) + (+6)



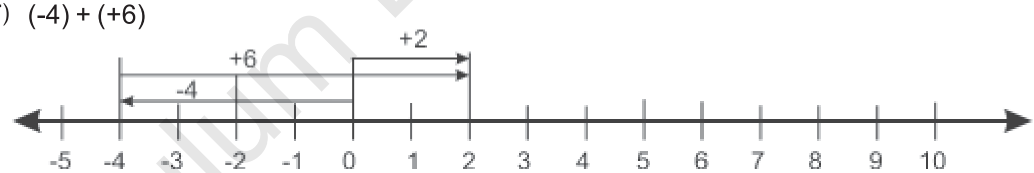
अत: (+4) + (+6) = +10 हुन्छ ।

(ख) (+4) + (-6)



अत: (+4) + (-6) = -2 हुन्छ ।

(ग) (-4) + (+6)



अत: (-4) + (+6) = (+2) हुन्छ ।

(ख) **पूर्णाङ्कको जोडका नियम**

पूर्णाङ्कको जोडका केही महत्त्वपूर्ण नियमहरूलाई तल बुँदागत रूपमा उल्लेख गरिएको छ ।

1. **विनियम नियम (Commutative Law)**

पूर्णाङ्कहरूको जोडफल निकाल्दा पूर्णाङ्कहरूलाई जुनसुकै क्रममा राखेर पनि परिणाम एउटै निस्कने नियमलाई पूर्णाङ्कको जोडको विनियम नियम भनिन्छ । जस्तै : a + b = b + a जहाँ a र b दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् ।

Curriculum Development Centre

2. **सङ्घीय नियम (Associative Law)**

तिन ओटा पूर्णाङ्कहरूलाई जोड्दा पहिला जुनसुकै 2 ओटा पूर्णाङ्क जोडेर आएको जोडफलमा तेस्रो पूर्णाङ्क जोड्दा पनि जोडफल बराबर आउँछ भने त्यस्तो नियमलाई पूर्णाङ्कको जोडको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।

जस्तै : $(a+b)+c = a+(b+c) = (a+c)+b$ जहाँ : a, b र c पूर्णाङ्कहरू हुन् ।

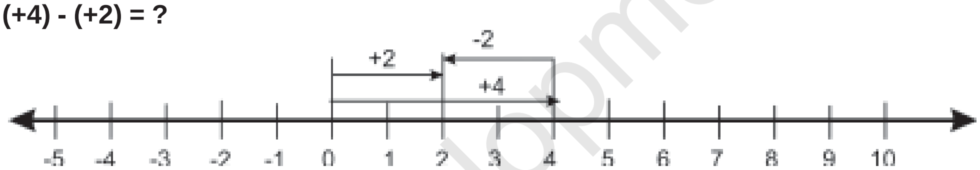
3. **विपरीत परिणाम (Inverse Quantity)**

यदि कुनै दुई ओटा पूर्णाङ्कहरू जोड्दा जोडफल 0 हुन्छ भने त्यस नियमलाई पूर्णाङ्कको जोडको विपरीत परिणाम भनिन्छ । जस्तै : +a र -a आपसमा विपरीत परिणाम हुन् । जहाँ $(+a)+(-a)=0$ हुन्छ र a एउटा पूर्णाङ्क हो ।

(ग) पूर्णाङ्कको घटाउ (Subtraction of Integer)

तलको सङ्ख्या रेखाका आधारमा देखाइएका पूर्णाङ्कका घटाउ सम्बन्धी क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

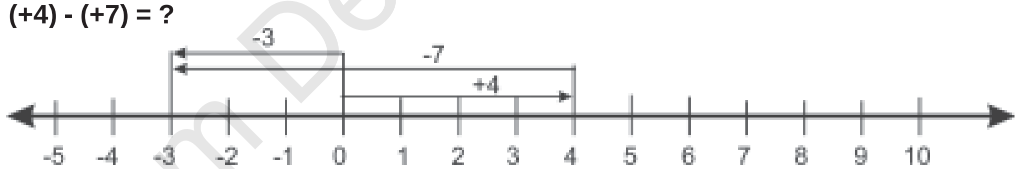
1. (+4) - (+2) = ?



(+4) एकाइ दायाँ गएर -2 एकाइ बायाँ जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? 2 एकाइ दायाँ पुगिन्छ ।

त्यसैले, (+4) - (+2) = (+2) हुन्छ ।

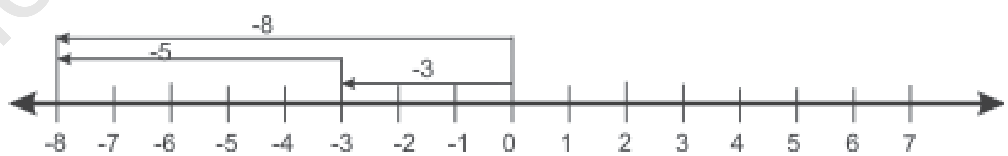
2. (+4) - (+7) = ?



0 बाट (+4) एकाइ दायाँ गएर -7 एकाइ बायाँ जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? 3 एकाइ बायाँ पुगिन्छ ।

त्यसैले, (+4) – (+7) = (-3) हुन्छ ।

3. (-3) + (-5) = ?



0 बाट (-3) एकाइ बायाँ गएर 5 एकाइ बायाँ नै जाँदा कहाँ पुगिन्छ ? (-8) एकाइ बायाँ नै पुगिन्छ ।

त्यसैले, (-3) + (-5) = (-8) हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

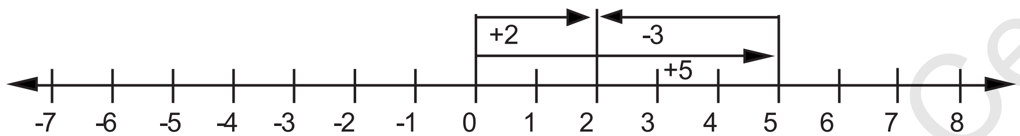
उदाहरण 2

सरल गर :

(क) (+5) - (+3) (ख) (+2) - (+5) (ग) (-2) - (+5)

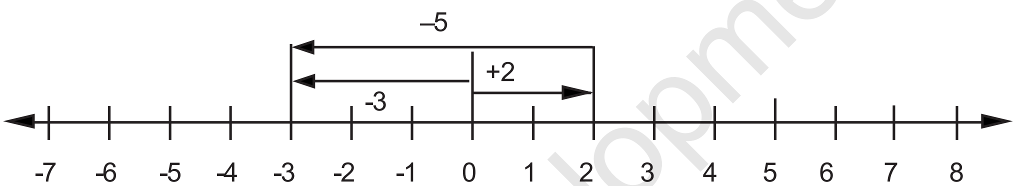
समाधान

(क) **(+5) - (+3)** लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



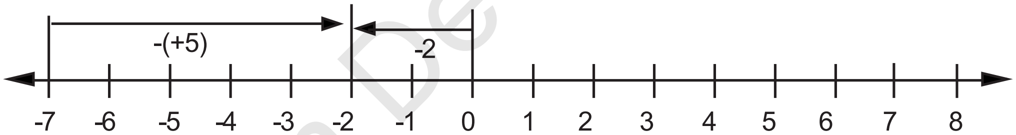
तसर्थ (+5) - (+3) = (+2)

(ख) **(+2) - (+5)** लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



तसर्थ, (+2) - (+5) =-3

(ग) **(-2) - (+5)** लाई सङ्ख्या र रेखामा देखाउँदा,



तसर्थ (-2) - (+5) = -7

अभ्यास 13.1

1. **तल दिइएका पूर्णाङ्कका क्रियाहरूलाई सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :**

   (क) (+3) + (+4) (ख) (+7) + (-4) (ग) (-5) + (+2) (घ) (-4) + (-3)

   (ङ) (-6) - (+2) (च) (+6) - (+2) (छ) (+6) - (-2) (ज) (-5) + (+7)

   (झ) (-4) - (-6) (ञ) (+3) + (-5)

2. **तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको 10 एकाइ दायाँ र 10 एकाइ बायाँ पर्ने पूर्णाङ्क लेख :**

   (क) (-5) (ख) (-3) (ग) 0 (घ) +4 (ङ) (+7) (च) (+10)

Curriculum Development Centre

3. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको विमुख पूर्णाङ्क लेख :

(क) (+4) (ख) (+1) (ग) (-3) (घ) (-5) (ङ) 0 (च) (+7)

4. तल दिइएका पूर्णाङ्कहरूको निरपेक्ष मान निकाल :

(क) |+6| (ख) |-4| (ग) |+10| (घ) |-3| (ङ) |-5| (च) |-7|

5. सरल गर :

(क) (+6) + (+4) + (+3) (ख) (+8) + (-4) + (+3) (ग) (-7) + (+6) + (-5)

(घ) (-12) - (-10) + (+6) (ङ) (+15) - (+10) - (-3) (च) (-35) + (+25) + (+10)

(छ) (+24) + (-20) + (-15) (ज) (-10) - (+10) -(+10)

6. **विनिमय नियम प्रयोग गरी जोड गर :**

(क) (+17) + (+12) + (+20) (ख) (+20) + (-10) + (-10) (ग) (+25) + (20) + (-15)

(घ) (+35) + (+24) + (-18) (ङ) (-46) + (+58) + (-44)

7. (+25) मा कति जोड्दा (-25) हुन्छ ?

8. (-35) बाट कति घटाउँदा (-20) हुन्छ ?

9. सुजनलाई सुन्तला बेचेर रु. 145 नाफा भएको छ । जुनार बेचेर रु. 74 नोक्सान भएछ । कुल कारोबारबाट सुजनलाई नाफा वा नोक्सान के भएछ र कति भएछ ? पत्ता लगाऊ ।

10. दुई ओटा बसहरू एकै स्थानबाट एकै समयमा छुटेछन् । एउटा बसले 127 km पूर्व यात्रा गर्‍यो र अर्को बसले 139 km पश्चिम यात्रा गर्‍यो । ती दुई बसबिचको दुरी पत्ता लगाऊ ।

11. कुनै दुई ओटा पूर्णाङ्कहरूको योगफल -119 छ । यदि ठुलो पूर्णाङ्क 177 भए सानो पूर्णाङ्क कति होला ? पत्ता लगाऊ ।

12. **सङ्घीय नियम प्रयोग गरी सरल गर :**

(क) (+7) + (-25) - (-65) (ख) (+45) + (-146) + (+209)

13. **क्रम विनियम प्रयोग गरी सरल गर :**

(क) (-5) - (+2) (ख) (+2) - (-5)

14. **सरल गर :**

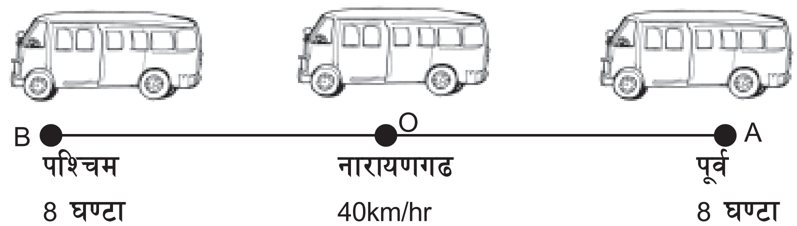
(क) -4 + 14 + 15 + (-52) (ख) (-13) + (+7) - 8 + 14 - 40

Curriculum Development Centre

13.2 पूर्णाङ्कको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Integers)

1. पूर्णाङ्कको गुणन

(क) तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :



पश्चिमबाट पूर्वतर्फ 40km प्रति घण्टाका दरले गुडिरहेको बस नारायणगढबाट 8 घण्टा पूर्व र 8 घण्टा पश्चिमको बसको स्थिति भन्न सक्छौ ।

(क) 8 घण्टाको पश्चिमको स्थिति = (40km/hr) x (8)hr = (320)km = 320km पूर्व

(ख) 8 घण्टा अघिको पूर्वको स्थिति = (40km/hr) x (8hr) = (320)km = 320km पश्चिम

नोट : पूर्वका स्थितिलाई (+) र पश्चिमको स्थितिलाई (-) मान्दा,

त्यसैले,

धनात्मक पूर्णाङ्क x (+)	धनात्मक पूर्णाङ्क (+)	= धनात्मक पूर्णाङ्क (+)
धनात्मक पूर्णाङ्क x (+)	ऋणात्मक पूर्णाङ्क (–)	= ऋणात्मक पूर्णाङ्क (–)

(ख) तल दिइएको पूर्णाङ्कको गुणनको ढाँचा अध्ययन गर :

(+3) x (-3) = - 9
(+2) x (-3) = -6
(+1) x (-3) = -3
(0) x (-3) = 0
(-1) x (-3) = +3
(-2) x (-3) = +6
(-3) x (-3) = +9

त्यसैले, ऋणात्मक पूर्णाङ्क x ऋणात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क हुन्छ ।

उदाहरण 1

गुणन गर (क) (+4) x (+6)(ख) (+7) x (-6) (ग) (-5) x (+8) (घ) (-7) x (-7)

समाधान

(क) (+4) x (+6) = (+24) (ख) (+7) x (-6) = (-42)

(ग) (-5) x (+8) = (-40) (घ) (-7) x (-7) = (+49)

Curriculum Development Centre

2. पूर्णाङ्कको गुणनका नियमहरू (Properties of multiplication of Integers)

पूर्णाङ्कका गुणनका केही महत्त्वपूर्ण नियमहरूलाई तल बुँदागत रूपमा उल्लेख गरिएको छ ।

1. **विनिमय नियम (Commutative Property)** : a x b = b x a

कुनै दुई ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणन फल तिनीहरूका स्थान बदल्दा हुने गुणन फलसँग बराबर हुन्छ ।

जस्तै : (+2) x (+4) = (+4) x (+2) = +8, (-3) x (+7) = (+7) x (-3) = -21 र (-8) x (-6) -= (-6) x (-8) = +48 हुन्छ ।

अत: यदि a र b दुई ओटा पूर्णाङ्कहरू हुन् भने a x b = b x a हुन्छ ।

2. **सङ्घीय नियम (Associative Property):** (a x b) x c = a x (b x c)

कुनै तिन ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणन फल तिनीहरूको पहिला दुई र अन्तिमको गुणनसँग र पहिलो र अन्तिम दुई गुणन गर्दा आउने गुणन फलसँग बराबर हुन्छ ।

जस्तै : [(+2) x (+3)] x (+4) = (+2) x [(+3) x (+4)] हुन्छ ।

[(+5) x (-2)] x (-7) = (+5) x [(-2) x (-7)] हुन्छ ।

अत: यदि a, b र c तिन ओटा पूर्णाङ्करू हुन् भने (a x b) x c = a x (b x c)

3. **पद विच्छेदन नियम (Distributive Property) :** a(b+c) = ab+ac

जस्तै : (+6) [(+5)+(+3)]
= (+6) x (+5)+(+6) x (+3)
= (+30) + (+18)
= (+48)

त्यस्तै, (+6) x [(-5) + (+3)] = (+6) x (-5) + (+6) x (+3) = (-30) + (18) = -12 हुन्छ ।

यदि a, b र c तिन ओटा पूर्णाङ्कहरू छन् भने a(b+c) = ab + ac हुन्छ ।

4. **1 को गुणन नियम (Multiplicative Property of 1)**

जस्तै, (+y) x 1 = +y

(-5) x 1 = -5

1 x (+9) = 9 हुन्छ ।

यदि a एउटा पूर्णाङ्क हो भने ax(+1)=(+1) x (a)=a हुन्छ ।

5. **0 को गुणन नियम (Multiplicative Property of 0)**

जस्तै : 2 x 0 = 0

0 x 2 = 0

100 x 0 = 0

यदि a एउटा पूर्णाङ्क हो भने a x 0 = 0 x a = 0 हुन्छ । 0 x 0 कति हुन्छ होला ?

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

गुणन गर : [(-8)x(-5)]x(-4)

समाधान

[(-8)x(-5)]x(-4) =(+40)x(-4) =-160

उदाहरण 3

सङ्घीय नियम प्रयोग गरी गुणन गर : (+6)x[(-15)x(12)]

समाधान

(+6)x[(-15)x(12)]

= [(+6)x(-15)] x (12)

= (-90) x 12

= - 1080

2. पूर्णाङ्कको भाग (Division of Integers)

भाग क्रिया गुणन क्रियाको विपरीत क्रिया (inverse operation) हो । त्यसैले भाग क्रियामा पनि गुणन क्रियाकै नियम लागु हुन्छन् ।

तलका उदाहरणहरू हेरौँ :

(क) (+12)x (+3) = (+36)
(+36) ÷ (3) = (+12)
(+36) ÷(12)= (+3)

(ख) (-8)x(+4)=(-32)
(-32)÷(+4)=(-8)
(-32)÷(-8)=(+4)

त्यसैले,

धनात्मक पूर्णाङ्कलाई धनात्मक पूर्णाङ्कले भाग गर्दा भागफल धनात्मक हुन्छ ।

धनात्मक पूर्णाङ्कलाई ऋणात्मक पूर्णाङ्कलले भाग गर्दा भागफल ऋणात्मक हुन्छ ।

ऋणात्मक पूर्णाङ्कलाई ऋणात्मक पूर्णाङ्कले भाग गर्दा भागफल धनात्मक हुन्छ ।

ऋणात्मक पूर्णाकलाई धनात्मक पूर्णाङ्कले भाग गर्दा भागफल ऋणात्मक हुन्छ ।

अभ्यास 13.2

1. **गुणन गर ।**

(क) (+5) x (+5)   (ख) (+5) x (-8)   (ग) (-7) x (+8)   (घ) (-9) x (-8)

(ङ) (+4) x (+6) x (+5)   (च) (+7)x(+8)x(-6)   (छ) (+12)x(-8)x(+2)   (ज((+7)x(-5)x(+4)

Curriculum Development Centre

(झ) (+6)x(+4)x(-3)x(-2) (ञ) (+5)x(-4)x(-8)x(-3)

2. **गुणनको सङ्घीय नियम प्रयोग गरी दुवै तरिकाले गुणन फल निकाल :**

(क) (+5)x(+6)x(+7) (ख) (+7)x(-5)x(-3) (ग((-3)x(-3)x(-3)

(घ) (+4)x(+6)x(-5) (ङ) (+8)x(+6)x(-7)

3. **गुणनको पदविच्छेदन नियम प्रयोग गरी सरल गर :**

(क) (+6)x[(-18)+(30)] (ख) (-5)x[(+24)-(-6)] (ग) (+7)x [(-12) – (+6)]

(घ) (+12)x [(-30)+(+45)] (ङ.) (-16)x[(-13)+(-5)]

4. **भागफल निकाल :**

(क) (+30) ÷ (+6) (ख) (-25)÷ (+5) (ग) (+48) ÷ (-6)

(घ) (+95) ÷ (-19) (ङ) (-100)÷(-20) (च) (+120)÷(20)

5. दुई ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणन फल (+49) छ । एउटा पूर्णाङ्क (+7) भए अर्को पूर्णाङ्क पत्ता लगाऊ ।
6. दुई ओटा पूर्णाङ्कहरूको गुणन फल (+60) छ । एउटा पूर्णाङ्क (+5) भए अर्को पूर्णाङ्क पत्ता लगाऊ ।
7. (-5) लाई कतिले गुणन गरे गुणन फल (+80) हुन्छ ?
8. (+72) लाई कतिले भाग गरे भाग फल (+9) हुन्छ ?
9. गुणन फल (-225) बनाउन (15) लाई कति पटक गुणन गर्नुपर्छ ?
10. (-96) लाई (-24) ले कति पटक भाग गर्न सकिन्छ ?

Curriculum Development Centre

13.3 चार साधारण नियमको सरलीकरण
(Simplification of Four Operations)

जोड, घटाउ, गुणन र भाग यी चार ओटा गणितका आधारभूत क्रियाहरू हुन् । यिनीहरूको क्रम मिलाएर सरल गर्नुपर्छ ।

सरलीकरण सम्बन्धी तलका नियमहरू याद गर :

(क) जोड, घटाउ तथा गुणन मिश्रित समस्यामा पहिला गुणनको काम गर्नुपर्छ ।

(ख) जोड, घटाउ तथा भाग क्रिया समावेश भएका समस्याको समाधान गर्दा सबैभन्दा पहिला भाग क्रिया गर्नुपर्छ ।

(ग) गुणन र भाग समावेश भएका समस्यामा पहिला भाग क्रिया गर्ने वा बायाँबाट दायाँतिर सरल गर्दै जाँदा जुन चिह्न पहिला अगाडि आउँछ त्यही क्रिया पहिला गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

सरल गर ।

(+10) + (-5) + (+25)÷(-5)-(-6)x(+8)

= (+10)+(-5)+(-5)-(-6)x(+8)

= (+10)+(-5)+(-5)-(-48)

= (+5) + (-5) - (-48)

= 0-(-48)

= (+48)

उदाहरण 2

15 बाट 5 घटाई 4 ले गुन्दा कति हुन्छ ?

यहाँ दिइएको समस्यालाई गणितीय भाषामा व्यक्त गर्दा,

(15-5)x4

= 10x4

= 40

तसर्थ, आवश्यक सङ्ख्या = 40 हुन्छ ।

अभ्यास 13.3

1. **सरल गर :**

   (क) 20 ÷ 2 + 19   (ख) 45 - 81 x 5

   (ग) 88 - 3 x 20 ÷ 6   (घ) 108 x 3 - 55 ÷ 11 + 105

   (ङ) (-6)x(-4)÷(+4)+(-3)-(-2)

2. 55 बाट 3 को 6 गुणा घटाउँदा कति हुन्छ ?
3. 200 लाई 4 ले भाग गरी 33 जोड्दा कति हुन्छ ?
4. 25 को 2 गुणाको 10 भागबाट 2 घटाई 5 ले गुणन गर्दा कति हुन्छ ?
5. 32 र 20 को फरकलाई 4 ले भाग गरी 15 जोड्दा कति हुन्छ ?

Curriculum Development Centre

एकाइ 14 आनुपातिक सङ्ख्या (Rational Nnumber)

14.1 आनुपातिक र दशमलव सङ्ख्या (Rational and Decimal Number)

1. आनुपातिक सङ्ख्याहरू

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल सङ्ख्याहरूका विभिन्न समूहहरू दिइएका छन् :

1. प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह (N) = {1, 2, 3, 4, 5, ...}
2. पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह (W) = {0, 1, 2, 3, 4, ...}
3. पूर्णाङ्कहरूको समूह (Z) = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...}

अब, कुनै दुई ओटा पूर्णाङ्कहरू (-3) र (+4) लिऊँ । यिनीहरूबिच जोड, घटाउ, गुणन र भाग क्रिया गर्ने प्रयास गरौँ :

1. जोड क्रिया : (-3) र (+4) को योगफल (-3)+(+4)= +1 हुन्छ । यहाँ +1 एउटा पूर्णाङ्क हो ।

2. घटाउ क्रिया : यहाँ (-3) र (+4) को घटाउ फल (-3) - (+4) = (-3) + (-4)= (-7) हुन्छ । यहाँ -7 पनि एउटा पूर्णाङ्क हो ।

3. गुणन क्रिया : (-3) र (+4) को गुणन फल (-3) x (+4) =-12 हुन्छ । यहाँ (-12) पनि एउटा पूर्णाङ्क हो ।

4. भाग क्रिया : (-3) र (+4) को भागफल (-3)÷(+4) हुन्छ । यहाँ (-3)÷ +4)=$-\frac{3}{4}$ एउटा पूर्णाङ्क होइन ।

यसर्थ जोड, घटाउ र गुणनको क्रियाबाट प्राप्त हुने सङ्ख्या पूर्णाङ्कमा पर्दछ भने भाग फल वा अनुपात पूर्णाङ्कमा पर्दैन ।

जस्तै : $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ आदि पूर्णाङ्क होइनन् । यिनीहरू $\frac{a}{b}$ का रूपमा आउँछन् । त्यसैले यस्ता सङ्ख्याहरू आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

(ख) माथिको छलफलबाट आनुपातिक सङ्ख्याको परिभाषा लेख । आफ्नो लेखाइलाई कक्षामा छलफल गर । प्राप्त निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरेर हेर ।

a र b दुई ओटा पूर्णाङ्कहरू हुन् र b $\neq$ 0 भए $\frac{a}{b}$ का रूपमा व्यक्त गरिने सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (rational number) भनिन्छ र यसलाई Q ले जनाइन्छ ।

अत: आनुपातिक सङ्ख्या (Q) = { .... $1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ .... }

त्यसैले, सबै पूर्णाङ्कहरू आनुपातिक सङ्ख्यामा पर्ने भएकाले पूर्णाङ्कको समूह आनुपातिक सङ्ख्याको उपसमूह हो । त्यसैले, $Z \subset Q$ लेख्न सकिन्छ ।

Curriculum Development Centre

2. दशमलव सङ्ख्याहरू

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तलको तालिका भर ।

क्र.सं.	अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या	अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या	पुनरावृत्त दशमलव
1	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{7} = 0.285714285714$	$\frac{1}{3} = 0.3333....$
2.	$\frac{1}{4} = ...$	$\frac{22}{7} = ...$	$\frac{2}{3} = ...$
3			
4.			

माथिको तालिकाका आधारमा थप 5/5 ओटा अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त हुने दशमलव सङ्ख्याहरू पत्ता लगाएर लेख ।

(ख) माथिको तालिकाका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्छौ ? लेख । आफ्नो निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर । प्राप्त निष्कर्षलाई तलको निष्कर्षसँग तुलना गरेर हेर ।

> यसरी आनुपातिक सङ्ख्यालाई दशमलवमा व्यक्त गर्दा अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त हुने दशमलव सङ्ख्यामा व्यक्त गर्न सकिने रहेछ ।

माथि उदाहरणमा $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}.....$ आदि अन्त्य हुने, $\frac{2}{7}, \frac{22}{7},.....$ अन्त्यहीन र $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}.....$ आदि पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्याहरू हुन् ।

3. दशमलव सङ्ख्याका प्रकार

माथिको उदाहरणका आधारमा दशमलव सङ्ख्याहरूका प्रकारलाई तल चर्चा गरिएको छ ।

(क) अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या (Terminating Decimal)

यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरू अन्त्य हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै : $\frac{1}{4} = 0.25$

(ख) अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या (Non-terminating Decimal)

यदि आनुपातिक सङ्ख्याहरूको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरू कहिले पनि अन्त्य हुँदैनन् भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै : $\frac{2}{7} = 0.28571...$

Curriculum Development Centre

(ग) पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या (Recurring Decimals)

यदि आनुपातिक सङ्ख्याहरूको हरले अंशलाई भाग गर्दा भागफलमा दशमलव पछाडिका सङ्ख्याहरूमा एउटै सङ्ख्या दोहोरिएर आइरहन्छन् भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै $\frac{2}{3} = 0.66666...$

नोट :
1. *यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरमा 2 अथवा 5 वा रूढ गुणन खण्ड 2 र 5 हुन्छन् भने त्यो सङ्ख्या अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या हुन्छ । जस्तै :* $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{7}{25}, \frac{17}{30}, ...$
2. यदि आनुपातिक सङ्ख्याको हरमा 2 र 5 बाहेक अरू सङ्ख्या भएमा त्यस्ता दशमलव सङ्ख्या अन्त्यहीन वा पुनरावृत्त हुन्छन् । जस्तै : $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, ...$

2. आनुपातिक सङ्ख्याका विशेषताहरू (Properties of Rational Numbers)

कक्षा 6 मा भिन्नको जोड, घटाउ, गुणन र भाग क्रियाका समस्याहरू समाधान गरिसकेका छौँ । मानौँ, a, b र c कुनै आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

आनुपातिक सङ्ख्याको जोड र गुणनका विशेषताहरू

तलका आनुपातिक सङ्ख्याहरूका विशेषताहरू अध्ययन गरी छलफल गर ।

1. **एकात्मक नियम (Identity Property)** : $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ र $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

जोडको एकात्मक नियम	गुणनको एकात्मक नियम
$\frac{1}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3} + 0 = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{3}{7} + 0 = 0 + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	$\frac{1}{2} \times 1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3} \times 1 = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{3}{7} \times 1 = 1 \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्यामा शून्य (0) जोड्दा आउने सङ्ख्या त्यही सङ्ख्या हुन्छ ।	नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्यालाई एक (1) ले गुणन गर्दा त्यही नै सङ्ख्या आउँछ ।

Curriculum Development Centre

2. विपरीत गुण (Inverse Property)

जोडको विपरीत गुण	गुणनको विपरीत गुण
-1 + 1 = 0 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$ $-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=0$	1 x 1 = 1 $2\times\frac{1}{2}=1$ $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$
नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्या $\frac{a}{b}$ मा $-\frac{a}{b}$ विद्यमान भई $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$ आउँछ भने यस्तो गुणनलाई जोडको विपरीत गुण भनिन्छ ।	नियम : कुनै पनि आनुपातिक सङ्ख्या $\frac{a}{b}$ मा कुनै सङ्ख्या $\frac{b}{a}$ भई $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$ आउँछ भने त्यस्तो गुणलाई गुणनको विपरीत गुण भनिन्छ ।

3. क्रम विनिमय गुण (Commutative Property)

जोडको क्रम विनिमय गुण	गुणनको क्रम विनियम गुण
2 + 3 = 3 + 2 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	2 x 3 = 3 x 2 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}$ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$
नियम : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ लाई जोडको क्रम विनियम भनिन्छ ।	नियम : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$ लाई गुणनको क्रम विनिमय भनिन्छ ।

4. **सङ्घीय नियम (Associative Property)**

जोडको सङ्घीय नियम	गुणनको सङ्घीय नियम
2 + (5 + 7) = (2 + 5) +7 $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{5}$ $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$	2 x (5 x 7) = (2 x 5) x 7 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{5}$ $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$

Curriculum Development Centre

नियम : $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$ लाई जोडको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।	नियम : $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$ लाई गुणनको सङ्घीय नियम भनिन्छ ।

5. **निकटताको नियम (Closure Property)**

जोडको निकटताको नियम	गुणनको निकटताको नियम
$\frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो । $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ भए $\frac{e}{f}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ।	$\frac{1}{2}$ र $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ।
नियम : यदि $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ भए जोडफल $\frac{e}{f}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हुन्छ ।	नियम : यदि $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ भए $\frac{e}{f}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हुन्छ ।

अभ्यास 14.1

1. तलका प्रश्नको उत्तर लेख :
   (क) के सबै प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
   (ख) के सबै पूर्ण सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
   (ग) के सबै पूर्णाङ्क आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
   (घ) के शून्य (0) आनुपातिक सङ्ख्या हो ?
   (ङ) के सबै आनुपातिक सङ्ख्या पूर्णाङ्क हुन् ?

2. तल दिइएका कुन कुन सङ्ख्याहरू अन्त्य हुने, अन्त्यहीन र पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या हुन्, छुट्याऊ :

   (क) $\frac{1}{2}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{2}{7}$ (घ) $\frac{15}{2}$ (ङ) $\frac{17}{13}$

   (च) $\frac{55}{10}$ (छ) $\frac{37}{20}$ (ज) $\frac{25}{17}$ (झ) $\frac{22}{7}$ (ञ) $\frac{12}{25}$

3. तल दिइएका सङ्ख्याको जोडको विपरीत र गुणनको विपरीत सङ्ख्या पत्ता लगाऊ :

   (क) $\frac{2}{5}$ (ख) $-\frac{5}{7}$ (ग) $\frac{22}{7}$ (घ) $\frac{12}{7}$ (ङ) $-\frac{11}{8}$

4. $\frac{1}{2}$ र $\frac{3}{5}$ को बिचमा कुनै दुई ओटा आनुपातिक सङ्ख्या लेख ।

Curriculum Development Centre

एकाइ 15 अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Number)

अनानुपातिक सङ्ख्याको परिचय (Introduction of Irrational Number)

1. अनानुपातिक सङ्ख्या

(क) तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

4 को वर्गमूल $= \sqrt{4} = 2$ (आनुपातिक सङ्ख्या)

9 को वर्गमूल $\sqrt{9} = 3$ (आनुपातिक सङ्ख्या)

$\frac{9}{16}$ को वर्गमूल $= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ (आनुपातिक सङ्ख्या)

2 को वर्गमूल $\sqrt{2} = 1.4421....$ यो आनुपातिक सङ्ख्या होइन, किन ?

अथवा $\sqrt{2}$ लाई $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिँदैन ।

(ख) माथिको छलफलका आधारमा अननुपातिक सङ्ख्याको परिभाषा लेख ।

$\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न नसकिने सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।
अर्थात्, अनानुपातिक सङ्ख्यामा नपर्ने सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।
जस्तै : $\left\{..., \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{10}, \right\}$ आदि अनानुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

अनानुपातिक सङ्ख्यालाई Ir ले जनाइन्छ । त्यसैले Q र Ir अलग्गिएका समूह हुन् । अत: $Q \cap Ir = \varnothing$ हुन्छ ।

अभ्यास 15.1

1. तल दिइएका सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या वा अनानुपातिक सङ्ख्या के हुन् ? छुट्याऊ ।

   (क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\sqrt{2}$ (ग) $\sqrt{5}$ (घ) $\frac{2}{5}$ (ङ) $\frac{10}{20}$

   (च) $\frac{1}{3}$ (छ) $\frac{25}{10}$ (ज) $\frac{40}{50}$ (झ) 0.735

2. के सबै आनुपातिक सङ्ख्याहरू अनानुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
3. के सबै पूर्णाङ्क अनानुपातिक सङ्ख्या हुन् ?
4. के आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्या अलग्गिएका समूह हुन् ?

Curriculum Development Centre

एकाइ 16 भिन्न र दशमलव (Fraction and Decimal)

16.1 भिन्नका शाब्दिक समस्या (Word Problems on Fraction)

हामीले कक्षा 6 मा भिन्नका धारणाहरू, भिन्नका जोड र घटाउ, गुणन र सरलीकरणका बारेमा छलफल गरिसकेका छौँ । अब हामी भिन्नका शाब्दिक समस्याहरूका बारेमा छलफल गर्दै छौँ ।

तलका उदाहरण अध्ययन गरी आफूले पनि अभ्यास गर ।

उदाहरण 1

दीपकले प्रत्येक महिना रु 12,000 कमाउँछ । उसको आम्दानीको तिन भागको एक भाग शिक्षामा खर्च गर्छ । त्यस्तै चार भागको एक भाग खानामा खर्च गर्छ । अब उसले जम्मा कति भाग खर्च गर्छ ? जम्मा कति रकम खर्च गर्छ ?

समाधान

दीपकको शिक्षामा खर्च तिन भागको एक भाग र खानामा खर्च चार भागको एक भाग हुन्छ । अब जम्मा खर्च निकाल्दा दुवै खर्च जोड्नुपर्छ ।

जम्मा खर्च = शिक्षाको खर्च + खानाको खर्च = $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$= \frac{4x1+3x1}{12}$

$= \frac{4+3}{12}$

$\frac{7}{12}$ भाग

अब, 3 र 4 हरमा भएका सङ्ख्याको ल.स. = 12

अनि, प्रत्येक हरले ल.स. लाई भाग गरौँ र भागफलले अंशलाई गुणन गरौँ र सरल गरौँ ।

दीपकले जम्मा 12 भागको 7 भाग खर्च गरेको रहेछ । यसर्थ उसले आफ्नो आम्दानीको $\frac{7}{12}$ भाग खर्च गर्छ अब दीपकको जम्मा वास्तविक खर्च = रु. 12,000 को $\frac{7}{12}$ = रु 12,000x$\frac{7}{12}$ = रु. 7000 । यसर्थ दीपकको जम्मा खर्च = रु. 7000 हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा कक्षाका 42 जना विद्यार्थीहरूमध्ये तिन भागको दुई भाग केटा र बाँकी केटी थिए भने केटी कति जना रहेछन् ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

तरिका 1

यहाँ, केटाको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थीको $\frac{2}{3}$ भाग छ, त्यसैले केटाको वास्तविक सङ्ख्या= 42 जनाको $\frac{2}{3}$ भाग = 42 जना x $\frac{2}{3}$ = 28 जना ।

Curriculum Development Centre

यसर्थ जम्मा केटा 28 जना रहेछन् ।

अब, केटीको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या – केटाको सङ्ख्या = (42-28) जना = 14 जना

तसर्थ, केटी 14 जना रहेछन् ।

तरिका 2

यहाँ केटाको सङ्ख्या = जम्मा विद्यार्थीको $\frac{2}{3}$ भाग छ । सो कक्षामा केटा र केटीको सङ्ख्याको योगफल बराबर पुरा विद्यार्थी सङ्ख्या हुन्छ । वा 1 भाग हुन्छ । त्यसैले, केटीको सङ्ख्या = $1-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$ भाग

अब, केटीको सङ्ख्या = 42 जनाको $\frac{1}{3}$ भाग = 42 x $\frac{1}{3}$ = 14 जना

उदाहरण 3

आइतेलाई उसको बुबाले रु. 6,000 दिनुभयो । उसले तिन भागमा एक भागको किताब किन्यो । चार भागमा एक भागको कपडा किन्यो । पाँच भागमा एक भागको यात्रा गरी खर्च गऱ्यो भने कति रकम बचत गरेछ ?

अथवा

आइतेलाई उसको बुबाले रु. 6,000 दिनुभयो । उसले $\frac{1}{3}$ भागको किताब किन्यो । $\frac{1}{4}$ भागको कपडा किन्यो । $\frac{1}{5}$ भागको यात्रा गरी खर्च गऱ्यो भने कति रुपियाँ बचत गरेछ ?

समाधान

यहाँ, आइतेसँग भएको जम्मा रुपियाँ = रु. 6,000

$= \frac{1\times 60-4}{60}$

किताब किन्न खर्च = $\frac{1}{3}$ भाग, कपडा किन्न खर्च = $\frac{1}{4}$ भाग र यात्रा गरेर खर्च = $\frac{1}{5}$ भाग

जम्मा खर्च = $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$ भाग = $\frac{20+15+12}{60}$ भाग = $\frac{47}{60}$ भाग

उसको बचत = $\left(1-\frac{47}{60}\right)$ भाग   भाग = $\frac{60-47}{60}$ भाग = $\frac{13}{60}$ भाग

आइतेको बचत रुपियाँ = रु. 6000 को $\frac{13}{60}$ भाग = रु. 6000 $x\frac{13}{60}$ = रु. 1300

तसर्थ आइतेले जम्मा रु. 1300 बचाएछ ।

उदाहरण 4

सञ्जु, अञ्जु र सन्दीपले जन्मदिनको अवसरमा एउटा केक किनेछन् । सञ्जुले $\frac{1}{2}$ भाग, अञ्जुले $\frac{1}{3}$ भाग र सन्दीपले $\frac{1}{6}$ भाग खाएछन् । सबैभन्दा धेरै केक कसले खाएछ ?

समाधान : यहाँ दिइएअनुसार, सन्जुले खाएको $\frac{1}{2}$ भाग, अञ्जुले खाएको $\frac{1}{3}$ भाग र सन्दीपले खाएको $\frac{1}{6}$ भाग छ ।

Curriculum Development Centre

अब तिनै जनाको भिन्नको हरमा भएका अङ्कको ल.स. निकालौँ । ल.स. = 6

अब सबै भिन्नको हर 6 बनाऔँ :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} x \frac{2}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} x \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

अब अंशमा सबैभन्दा ठुलो 3 भएकोले $\frac{1}{2}$ भाग खाने सञ्जुले सबभन्दा धेरै केक खाइन्छन् ।

अभ्यास 16.1

1. जाडो महिनाको एक दिन कक्षा 7 का जम्मा 70 जना विद्यार्थीमध्ये तिन भागको एक भाग मात्र उपस्थित भएछन् भने कति भाग अनुपस्थित भएछन् ? पत्ता लगाऊ ।
2. प्रगति शिक्षा सदनमा कक्षा 7 मा जम्मा 42 जना विद्यार्थी थिए । 24 जना केटा थिए भने केटा कति भाग थिए ? केटी कति भाग थिए ? पत्ता लगाऊ ।
3. सुजनको मासिक आन्दानी रु. 9,000 छ । उसले $\frac{1}{5}$ भाग खाजामा खर्च गर्छ । $\frac{3}{10}$ भाग कपडामा खर्च गर्छ । $\frac{2}{5}$ भाग यातायातमा खर्च गर्छ । कति भाग बचत गर्छ र कति रुपियाँ बचत गर्छ ? पत्ता लगाऊ ।
4. बुटवल औद्योगिक मेलामा कमलाले आफूसँग भएको रुपियाँको $\frac{1}{5}$ भाग मनोरञ्जनमा खर्च गरिन् । $\frac{1}{2}$ भाग खानाको लागि खर्च गरिन् । $\frac{3}{10}$ भाग लत्ता कपडामा खर्च गरिन् । सबैभन्दा धेरै कुन शीर्षकमा खर्च गरेकी रहिछन् ? पत्ता लगाऊ ।
5. कुनै सङ्ख्याको $\frac{3}{5}$ भाग 90 हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।
6. कुनै रुपियाँको $\frac{4}{5}$ भाग रु. 600 हुन्छ भने $\frac{3}{4}$ भाग बराबर कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ ।
7. राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कमा सुन्दरप्रसादले 10 प्रतिशत प्रति वर्षका दरले एक वर्षको ब्याज बुझाउँदा रु. 30000 तिर्नुपर्‍यो । उसले जम्मा कति रकम ऋण लिएको रहेछ ?
8. एउटा पानी ट्याङ्कीको $\frac{1}{5}$ भाग भर्दा 700 लिटर पानी जम्मा भएछ भने ट्याङ्कीको क्षमता कति रहेछ ? पत्ता लगाऊ ।
9. प्रकृतिकी आमाले उनलाई दिनहुँ एउटा बट्टाको $\frac{3}{10}$ भाग हर्लिक्स खुवाउनुहुन्छ । 30 बट्टा हर्लिक्सले उनलाई जम्मा कति दिनलाई पुग्ला ? पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

16.2 दशमलवको सरलीकरण र शाब्दिक समस्याहरू (Simplification and Word Problems on Decimal)

उदाहरण 1

सरल गर : 5.24+3.01 - 1.92 -5.67

समाधान

5.24+3.01 - 1.92 -5.67

= 8.25-7.59

= 0.66

(1) जोड चिह्न, जोड चिह्न र घटाउ चिह्न, घटाउ चिह्न मिलाएर एकै ठाउँमा राख्ने ।

	चरण 1		चरण 2
(२)	5.24	1.92	8.25
	+ 3.01	+ 5.67	-7.59
	8.25	7.59	0.66

उदाहरण 2 **सरल गर :**

समाधान

(64.32 - 40.64) x 2.22

= (64.32 - 40.64) x2.22

= 23.68 x 2.22

= 52.5696

```
   23.68
  x 2.22
 -------
    4736
   4736
  4736
 -------
 52.5606
```

उदाहरण 3

आयतकार रुमालको लम्बाइ 5.2 cm र चौडाइ 4.8 cm रहेछ भने रुमालको परिमिति निकाल ।

समाधान

आयतकार रुमालको परिमिति $2(l+b)$ हुन्छ ।

अब, लम्बाइ (l) = 5.2 cm र चौडाइ (b) = 4.8 cm छ ।

त्यसैले रुमालको परिमिति : $= 2(l+b)$

= 2(5.2cm+4.8cm)

= 20cm

उदाहरण 4

एउटा 0.45 m अर्धव्यास भएको साइकलको पाङ्ग्राले 100 चक्कर लगाउँदा कति दुरी पार गर्छ ? पत्ता लगाऊ । (π = 3.14)

समाधान

यहाँ साइकलको पाङ्ग्राले एक चक्कर लगाउनु भनेको परिधि निकाल्नु हो । त्यसैले, पाङ्ग्राको एक चक्कर

$= 2\pi r$

$= 2\pi \times 0.45$m

= 2 x 3.14 x 0.45m

Curriculum Development Centre

= 6.28 x 0.45 m

= 2.826 m

पाङ्ग्राले एक चक्कर लगाउँदा 2.826 m दुरी पार गर्छ । 100 चक्कर लगाउँदा =100 x 2.826m

= 282.6m दुरी पार गर्छ ।

अभ्यास 16.2

1. सरल गर :

(क) (7.87 -12.09) x (-3.44)

(ख) (1.44 ÷ 1.2) + 6.2

(ग) {(6.48 ÷ 2.7) x 0.05 + 8.32} - 4.009

(घ) 2(12.75 - 6.28) x 2(5.13 - 4.73) + 6.63

(ङ) 5.7 - 4.-37 + (1.07 + 0.68) x 0.21

(च) 64.27 + 1.1 + 14.24 + 6.37 - 44.44

(छ) $\frac{0.44+5.76+3.24}{2.44+6.32-3.32}$

$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)\times 6.25-15.39+61.09$ (ज)

$\frac{5.8\times5.8-4.2\times4.2}{5.8-4.2}$

(झ)

2. त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x उचाइ हुन्छ । यदि एउटा त्रिभुजको आधार 25.75cm र उचाइ 30.15 cm भए क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

3. एउटा आयताकार बगैँचा 22.65m लामो र 15.65m चौडा छ । सो बगैँचाको परिमिति पत्ता लगाऊ ।

4. एउटा मोटरसाइकलको पाङ्ग्राको परिधि 3.45m छ । 80 चक्कर लगाउँदा पाङ्ग्राले जम्मा कति दुरी पार गर्छ ।

5. वर्गाकार टेबुलको परिमिति 242 मिटर छ । टेबुलको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

6. आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल 215.66m² छ । यदि सो जग्गा 67.35m लामो भए कति फराकिलो होला ?

7. एउटा भोजमा 12.5cm व्यास भएको वृत्ताकार थालको प्रयोग गरिएको थियो । यदि एउटा थालसँग अर्को थाल जोडी लहरै मिलाएर राख्दा 9.375m दुरी ढाकिएछ । त्यो भोजमा जम्मा कति थाल प्रयोग गरिएको थियो ? पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

एकाइ 17 अनुपात, समानुपात र प्रतिशत (Ratio, Proportion and Percent)

17.1 प्रतिशतका सरल समस्याहरू (Simple Problems on Percentage)

प्रतिशत भनेको प्रति सयमा हिसाब गर्नु हो ।

अत: हरमा 100 भएको भिन्न नै प्रतिशत हो ।

जस्तै : 20% भनेको 100 मा 20 अर्थात $\frac{20}{100}$ हुन्छ ।

75% भनेको 100 मा 75 अर्थात $\frac{75}{100}$ हुन्छ ।

त्यस्तै, $\frac{12}{100} = \frac{12}{100} \times 100\% = 12\%$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

भिन्नलाई प्रतिशतमा बदल्दा 100 ले गुणन गरी % चिह्न राख्नुपर्छ । प्रतिशतलाई भिन्नमा बदल्दा 100 ले भाग गरी % लाई हटाउनुपर्छ ।

उदाहरण 1

रु. 150 को 20% कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ रु. 150 को 20%

रु. 150 x $\frac{20}{100}$ (% लाई भिन्नमा बदल्दा 100 ले भाग गरेको)

= रु. 30

अत: रु. 150 को 20% भनेको रु. 30 हुन्छ ।

उदाहरण 2

20 को 15 कति % हुन्छ ?

समाधान

यहाँ 20 भागमध्ये 15 भाग छ । त्यसैले प्रतिशतमा व्यक्त गर्दा $\frac{15}{20} \times 100\%$ हुन्छ ।

20 को 15 लाई भिन्नमा लेख्दा $\frac{15}{20}$ हुन्छ ।

$\frac{15}{20}$ लाई % मा बदल्दा = $\frac{15}{20} \times 100\%$ = 75 %

अत: 20 को 15 भनेको 75% हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अर्को तरिका,

आवश्यक प्रतिशतलाई $x\%$ **मान्दा**

20 को $x\%$ = 15

अथवा, $20 \times \frac{x}{100} = 15$

अथवा, $\frac{x}{5} = 15$

अथवा, $x = 15 \times 5$

$\therefore \quad x = 75\%$

त्यसैले, 20 को 75 % = 15 हुन्छ ।

उदाहरण 3

कति रुपियाँको 25% ले रु 350 हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, आवश्यक रुपियाँलाई x मानौँ ।

x को 25% = रु. 350

अथवा, $x \times \frac{25}{100}$ = रु. 350

अथवा, $\frac{x}{4}$ = रु. 350

अथवा, x = 4 x रु. 350

x = रु. 1400

अत : रु. 1400 रुपियाँको 25% ले रु. 350 हुने रहेछ ।

उदाहरण 4

पुनमले 20 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 16 अङ्क प्राप्त गरिन् भने उनले कति % प्राप्त गरिछन् ?

समाधान

माथिको समस्यालाई गणितीय भाषामा लेख्दा, $\frac{16}{20}$ हुन्छ ।

$\frac{16}{20}$ लाई % मा बदल्दा $\frac{16}{20} \times 100\% = 80\%$ हुन्छ ।

अत: पुनमले 80% अङ्क प्राप्त गरिछन् ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 5

प्रह्लादले आफूसँग भएको रु. 2000 मध्ये 22% खर्च गरेछन् भने कति बचाएछन् ?

समाधान

यहाँ, प्रह्लादले गरेको खर्च रुपियाँ रु. 2000 को 22% = रु. 2,000 x $\frac{22}{100}$ = रु. 440

अब, प्रह्लादको बचत रुपियाँ = जम्मा आम्दानी – खर्च = रु. 2000 - रु. 440 = रु. 1560

अर्को तरिका,

प्रह्लादको बचत % = 100 % - 22% = 78%

प्रह्लादको बचत रुपियाँ = रु 2000 को 78% = रु. $2000 \times \frac{78}{100}$ = रु. 1560

अभ्यास 17.1

1. **मान पत्ता लगाऊ :**

   (क) रु. 50 को 4% (ख) 99 को 15% (ग) 560kg को 80%

   (घ) 875 ltr. को 60% (ङ) 1560 विद्यार्थीको 75%

2. **प्रतिशतमा बदल :**

   (क) 120 को 40 (ख) 246 को 123 (ग) 30 जनामा 18 जना

   (घ) 25km मा 5km (ङ) रु. 650 मा रु. 32.5

3. जाडो महिनाको कुनै दिन 40 जना विद्यार्थी मध्ये 24 जना मात्र उपस्थित भएछन् ।

   (क) कति प्रतिशत उपस्थित भएछन् ? (ख) कति प्रतिशत अनुपस्थित भएछन् ?

4. एउटा कार्यालयमा पुरुष कामदार 32 जना र महिला कामदार 18 जना रहेछन् ।

   (क) पुरुष कामदार कति प्रतिशत रहेछन् ? (ख) महिला कामदार कति प्रतिशत रहेछन् ?

5. कक्षा 6 को अन्तिम परीक्षामा सुमनले 750 पूर्णाङ्कमा 90% अङ्क प्राप्त गरेका रहेछन् । उनले कति अङ्क प्राप्त गरेछन् ?

6. दिपकको 1 महिनाको आम्दानी रु. 12750 मध्ये 20% खर्च गरेछन् भने कति रकम बचाएछन् ?

7. सुदेशको तलब रु. 1200 बाट बढेर रु. 1500 पुगेछ । सुदेशको तलब कति प्रतिशतले बढेछ ?

8. निर्मलको मासिक आम्दानी रु. 14760 छ । उनले 20% शिक्षामा, 10% यातायातमा र 25% घर भाडामा खर्च गर्दछन् । जम्मा कति रुपियाँ बचत गर्छन् ?

9. एक जना विद्यार्थी 250 पूर्णाङ्कमा 90 अङ्क प्राप्त गरी 10 अङ्कले फेल भएछ । उसलाई पास हुन कति प्रतिशत अङ्क आवश्यक पर्छ ?

10. सुन्तलीको तलब 10% वृद्धि भएपछि रु. 22000 भएछ भने सुरुमा कति तलब रहेछ ?

Curriculum Development Centre

17.2 अनुपात र समानुपातका सरल समस्याहरू
(Simple Problems on Ratio and Proportion)

1. अनुपात (Ratio)

के अनुपातको परिभाषा भन्न सक्छौ ?

12 र 15 को अनुपात लेख्ने प्रयास गर,

हो, 12 र 15 को अनुपात $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ = 4:5 हुन्छ ।

दुई ओटा उस्ताउस्तै परिमाणहरू a र b को अनुपात $\frac{a}{b}$ वा a:b हुन्छ । जहाँ a र b लाई क्रमश : a पहिलो पद अंश (antecedent) र b लाई दोस्रो पद हर (consequent) भनिन्छ ।

16 र 20 को अनुपात $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ = 4:5 हुन्छ ।

20 र 25 को अनुपात $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ = 4:5 हुन्छ ।

$\frac{12}{15}, \frac{16}{20}$ र $\frac{20}{25}$ को अनुपात एउटै भएकाले $\frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25}$ ...... आदि समतुल्य भिन्नहरू हुन् ।

उदाहरण 1

18 लिटर दुधमा 15 लिटर शुद्ध दूध र बाँकी पानी मिसाइएको रहेछ भने

(क) पानी र दुधको अनुपात कति होला ? (ख) पानी र शुद्ध दुधको अनुपात कति होला ?

समाधान

18 लिटर दुधमा 15 लिटर शुद्ध दुध छ ।

पानीको मात्रा = 18 लिटर - 15 लिटर = 3 लिटर

(क) पानी र दुधको अनुपात

$= \frac{3 \text{ लिटर}}{18 \text{ लिटर}} = \frac{1}{6} = 1 : 6$

(ख) पानी र शुद्ध दुधको अनुपात

$= \frac{3 \text{ लिटर}}{15 \text{ लिटर}} = \frac{1}{5} = 1:5$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

सुजन र सिफललाई आमाले 90 रुपियाँ 2:3 को अनुपातमा बाँडेर लिन भन्नुभयो भने प्रत्येकले कति कति रुपियाँ पाएछन् ?

समाधान

यहाँ, 90 रुपियाँलाई लगाउनुपर्ने भाग = 2 + 3 = 5 भाग

मानौँ, सुजनले प्राप्त गर्ने रुपियाँ = $2x$ सिफलले प्राप्त गर्ने रुपियाँ = $3x$

अब, $2x + 3x$ = रु. 90

अथवा, $5x$ = रु. 90

अथवा, x = रु. $\frac{90}{5}$

$\therefore x$ = रु. 18

अब, सुजनले पाएको रकम

= $2x$ =2 x रु. 18 = रु. 36 हुन्छ ।

सिफलले पाएको रकम

= $3x$ = 3 x रु. 18 = रु. 54

अर्को तरिका,

सुजनले प्राप्त गर्ने रकम

= रु. 90 को $\frac{2}{5}$ भाग

= रु. $90\times\frac{2}{5}$ = रु. 36

सिफलले प्राप्त गरेको रकम = रु. 90 को $\frac{3}{5}$ भाग

= रु. $90\times\frac{3}{5}$ = रु. 54

उदाहरण 3

मीना र पेम्बाको मासिक आम्दानीको अनुपात 3:4 छ । यदि पेम्बाको मासिक आम्दानी रु. 2,400 भए मीनाको मासिक आम्दानी कति होला ?

समाधान

यहाँ, मीनाको मासिक आम्दानी रु. x मानौँ ।

मीनाको मासिक आम्दानी र पेम्बाको मासिक आम्दानीको अनुपात =3:4

अथवा, रु. $\frac{x}{2400} = \frac{3}{4}$

अथवा, $x = \frac{3}{4}\times 2400$ = (3 x 600) = 1800

$\therefore x$ = रु. 1800

त्यसैले मीनाको मासिक आम्दानी रु. 1800 रहेछ ।

Curriculum Development Centre

2. **समानुपात (Proportion)**

दीपेन्द्रले गणितको 30 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 25 अङ्क प्राप्त गरेछन् । त्यस्तै गरी विज्ञानको 24 पूर्णाङ्कको परीक्षामा 20 अङ्क प्राप्त गरेछन् ।

अब, दीपेन्द्रले गणितमा प्राप्त गरेको अङ्कको अनुपात = $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

दीपेन्द्रले विज्ञानमा प्राप्त गरेको अङ्कको अनुपात = $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

अत : $\frac{25}{30} = \frac{20}{24}$ हुन्छ ।

दुई ओटा अनुपातहरू बराबर भएकाले यी अनुपातलाई समानुपात भनिन्छ । अब, 25 लाई पहिलो पद, 30 लाई दोस्रो पद, 20 लाई तेस्रो पद र 24 लाई चौथो पद भनिन्छ ।

चार ओटा उस्तै प्रकारका परिमाण वा सङ्ख्याहरू a, b, c र d को अनुपातमा a र b को अनुपात c र d को अनुपातसँग बराबर भएको अवस्थालाई समानुपात (proportion) भनिन्छ ।

यसलाई $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ वा a:b::c:d लेखिन्छ ।

वा, a x d = b x c हुन्छ ।

उदाहरण 4

के 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ?

समाधान

यहाँ, 3, 4, 9 र 12 लाई समानुपातको रूपमा लेख्दा,

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

अथवा, $3 \times 12 = 4 \times 9$

अथवा, 36 = 36

दुवैतिर बराबर भएकाले 3, 4, 9 र 12 समानुपातमा छन् ।

उदाहरण 5

4, 7, 20 र X समानुपातमा भए चौथो पद x को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान : यहाँ, *4, 7, 20* र x समानुपातमा भएकाले,

यदि पहिलो, दोस्रो, तेस्रो र चौथो पद क्रमशः $\frac{4}{7} = \frac{20}{x}$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अथवा, $4 \times X = 7 \times 20$

अथवा, $x = \frac{7 \times 20}{4}$

$\therefore X = 35$

अत : चौथो पद $x = 35$ हुन्छ ।

उदाहरण 6

10 ओटा सिसाकलमको मूल्य रु. 30 पर्छ भने कति ओटा सिसाकलमको मूल्य रु. 9 पर्छ ?

समाधान : यहाँ, आवश्यक सिसाकलम = x मानौँ

समानुपातको रूपमा लेख्दा,

$$\frac{10}{30} = \frac{x}{9}$$

अथवा, $10 \times 9 = 30 \times X$

अथवा, $\frac{10 \times 9}{30} = x$

अथवा, $X = 3$

अत: आवस्यक सिसाकलमको सङ्ख्या = 3

अभ्यास 17.2

1. तलका प्रत्यकको अनुपात लेख र लघुत्तम पदमा रूपान्तरण गर :

   (क) 10cm र 2m (ख) रु. 18 र रु. 24 (ग) 540g र 2kg

   (घ) 8 घण्टा र 2 दिन (ङ) 250mℓ र 1ℓ

2. 36 लिटर दुधको मिश्रणमा 30 लिटर शुद्ध दुध र बाँकी पानी मिसिएको छ भने पानी र दुधको मिश्रणको अनुपात निकाल ।

3. रु. 250 लाई राम र सीताले क्रमश: 2:3 को अनुपातमा बाँड्दा प्रत्येक व्यक्तिले कति कति रुपियाँ प्राप्त गर्दछन् होला ?

4. दुई ओटा सङ्ख्याहरूको अनुपात 5:6 छ । पहिलो सङ्ख्या 90 भए दोस्रो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

5. शोभा र किरणको मासिक आम्दानीको अनुपात 5:9 छ । यदि किरणको मासिक आम्दानी रु. 18,000 भए शोभाको मासिक आम्दानी कति होला ?

Curriculum Development Centre

6. **तल दिइएका चार ओटा पदहरू समानुपातमा भए x को मान निकाल :**

(क) 2, 4, 6, x (ख) 6, 10, x, 5 (ग) 18, x, 30, 45

(घ) 50, 150, x, 15 (ङ) x, 40, 30, 20

7. आदर्श उ.मा.वि.मा शिक्षक र महिला शिक्षकको सङ्ख्याको अनुपात 3:4 छ । यदि शिक्षकको सङ्ख्या 12 भए महिला शिक्षकको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

8. 7 ओटा क्याल्कुलेटरको मूल्य रु. 1750 पर्छ भने 12 ओटा क्याल्कुलेटरको मूल्य कति पर्ला ?

9. एउटा बस 160 km यात्रा गर्न 4 घण्टा लगाउँछ भने 6 घण्टामा कति यात्रा पार गर्छ होला ?

10. आदर्श उ.मा.वि.को छात्रावासमा 600 जना विद्यार्थीका लागि 45 दिनको खाना छ । 450 जना विद्यार्थीका लागि सो खाना कति दिनलाई पुग्ला ?

Curriculum Development Centre

एकाइ 18

नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

18.1 प्रतिशतसहितका नाफा र नोक्सानका समस्याहरू

हामीले कक्षा 6 मा प्रतिशत समावेश नभएका नाफा र नोक्सानका समस्याका बारेमा छलफल गरिसकेका छौँ । अब हामी प्रतिशतसहितका नाफा र नोक्सानका समस्यामा छलफल गर्ने छौँ ।

तलको प्रश्नमा आधारित प्रस्तुतिको अध्ययन गरी छलफल गर :

एक जना घडी व्यापारीले 10 ओटा घडी प्रत्येकलाई रु. 75 का दरले किन्यो र रु. 80 का दरले सबै घडी बेच्यो । उसलाई नाफा वा नोक्सान के भयो होला ?

यहाँ, एउटा घडीको क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 75

10 ओटा घडीको क्रय मूल्य(C.P.) = रु 75 $\times$ 10 = रु. 750

एउटा घडीको विक्रय मूल्य (S.P. = रु. 80

10 ओटा घडीको विक्रय मूल्य (S.P.) = रु. 80 $\times$ 10 = रु. 800

यहाँ, क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य धेरै भएकाले उक्त घडी व्यापारीलाई नाफा हुन्छ ।

अब, सूत्रानुसार, नाफा = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य = रु. 800 - रु. 750 = रु. 50

अतः सो व्यापारीलाई जम्मा रु. 50 नाफा भएछ ।

माथिको छलफलबाट नाफा र नोक्सानको सूत्र पत्ता लगाई लेख । तलको सूत्रहरूसँग तुलना गरी हेर ।

1. विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य भएमा नाफा हुन्छ ।
   नाफा = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य
2. क्रय मूल्य > विक्रय मूल्य भएमा नोक्सान हुन्छ ।
   नोक्सान = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

उक्त घडी व्यापारीलाई कति प्रतिशत नाफा भयो होला ?

व्यापारीलाई प्राप्त नाफा = रु 50

उसको सबै घडीको क्रय मूल्य = रु 750

उसले रु. 750 मा रु. 50 नाफा गऱ्यो । यस भनाइलाई प्रतिशतमा बदल्दा,

नाफालाई भिन्नमा लेख्दा $\frac{50}{750}$ हुन्छ ।

नाफालाई प्रतिशतमा बदल्दा $\frac{50}{750}$x100%

Curriculum Development Centre

जम्मा नाफा प्रतिशत = $\frac{50}{750} \times 100\% = \frac{20}{3}\% \qquad = 6\frac{2}{3}\%$

अर्थात्, रु. 750 को रु. 50 भनेको $6\frac{2}{3}\%$ हुन्छ ।

माथिको छलफल र प्रस्तुतिका आधारमा नाफा र नोक्सान प्रतिशत तलको सूत्रहरूबाट पत्ता लगाइन्छ :

1. नाफा % = $\frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}}$ x 100 %

2. नोक्सान % = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}}$ x 100 %

उदाहरण 1

यदि कुनै घडीको क्रय मूल्य = रु. 500, नाफा % = 5% भए विक्रय मूल्य पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, उक्त घडीको क्रय मूल्य रु. 500 मा नाफा 5% निकालेर जोड्नु नै विक्रय मूल्य हुन्छ ।

अब, वास्तविक नाफा = रु. 500 को 5% = रु 500 $\times \frac{5}{100}$ = रु. 25

सूत्रानुसार क्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा = रु. 500 + रु. 25 = रु. 525

त्यसैले उक्त घडीको विक्रय मूल्य = रु. 525

उदाहरण 2

राजुले एउटा टेलिभिजन रु. 13,500 मा किनेर रु. 12,195 मा बेच्दा उसलाई कति प्रतिशत नोक्सान हुन्छ ?

समाधान

यहाँ दिइएअनुसार एउटा टेलिभिजनको क्रय मूल्य = रु. 13,550 र टेलिभिजनको विक्रय मूल्य = रु. 12,195

सूत्रानुसार जम्मा नोक्सान = क्रय मूल्य — विक्रय मूल्य = रु. 13,550 - रु. 12,195 = रु. 1,355

अब,

नोक्सान % = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}}$ x 100%

= $\frac{\text{रु. } 1355}{\text{रु. } 13,550}$ x 100 % = 10 %

तसर्थ, राजुलाई उक्त टेलिभिजनमा जम्मा 10% नोक्सान हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 3

मोबाइल पसलेले एउटा मोबाइल रु. 3750 मा बेचेर 25% नाफा गरेछ भने

(क) क्रय मूल्य कति रहेछ ?

(ख) 30% नाफा गर्न कतिमा बेच्नुपर्थ्यो ?

समाधान : यहाँ, मोबाइलको विक्रय मूल्य = रु. 3750 र मोबाइलमा नाफा % = 25% छ ।

(क) मोबाइलको क्रय मूल्य = x (मानौँ)

अब, सूत्रानुसार विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा हुन्छ ।

त्यसैले, रु. 3750 = x + x को 25 %

अथवा, रु. 3750 = $x + x \times \frac{25}{100}$

अथवा, रु. 3750 = $x + \frac{x}{4}$

अथवा, रु. 3750 = $\frac{4x + x}{4}$

अथवा, रु. 3750 x 4 = 5x

अथवा, रु. $x = \frac{3750 \times 4}{5}$

अथवा, रु. x = 3000

अत: उक्त मोबाइल रु. 3000 मा किनेको रहेछ ।

(ख) 30% नाफा गर्नका लागि बेच्नुपर्ने मूल्य (विक्रय मूल्य) निकाल्दा,

सूत्रानुसार, विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा

= रु 3000 + रु. 3000 को 30%

= रु. 3000 + रु 3000 x $\frac{30}{100}$

= रु. 3000 + रु. 900

= रु. 3900

अत : 30% नाफा गर्न सो मोबाइल रु. 3900 मा बेच्नुपर्छ ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 18.1

1. तल दिइएको अवस्थाहरूमा नाफा वा नोक्सान प्रतिशत के हुन्छ ? पत्ता लगाऊ :

क्र.सं.	क्रय मूल्य (रु.)	विक्रय मूल्य (रु.)
(क)	300	330
(ख)	550	495
(ग)	640	832
(घ)	720	540
(ङ)	1200	1500

2. एउटा व्यापारीले एउटा दराज रु. 3950 मा किनेर 10% नाफा गरी बेच्दा दराज कति मूल्यमा बिक्री गर्नुपर्छ ।
3. एउटा फलफुल पसलेले प्रतिकिलो रु. 12 का दरले 15 किलो सुन्तला किनेछ । रु. 15 का दरले सबै सुन्तला बेच्दा पसलेलाई कति प्रतिशत नाफा हुन्छ ?
4. मुनाले एउटा क्यामरा रु. 1300 मा किनिन् । उनले 15% नोक्सानमा बेचिन् । मुनाले क्यामरालाई कतिमा बेचिन् होला ?
5. राजेशले 100 ओटा बल्बहरू प्रत्येकलाई रु. 25 का दरले किनेछन् । पाकेट खोली हेर्दा 20 ओटा बल्बहरू फुटेका रहेछन् । बाँकी बल्बहरू रु. 30 का दरले बेच्दा राजेशलाई नाफा वा नोक्सान प्रतिशत के भयो ? पत्ता लगाऊ ।
6. एउटा टेलिभिजनलाई रु. 16,000 मा किनेर 15% नाफा गरी बेच्दा कतिमा बेच्नुपर्ला ?
7. एक जना पुस्तक पसलले 250 ओटा कापी प्रत्येकको रु. 25 का दरले किनेछ । 30 ओटा कापी मुसाले नष्ट गरिदिएछन् । अब, बाँकी कापीलाई प्रत्येकको रु. 35 का दरले बेच्दा उक्त पसलेलाई नाफा वा नोक्सान के भएछ ? प्रतिशतमा पत्ता लगाऊ ।
8. रु. 1,500 मा बेचेको एउटा साडीमा 25% नाफा भएछ भने उक्त साडीको क्रय मूल्य कति रहेछ ?
9. एउटा ज्याकेट 12% नोक्सान खाएर रु. 1,540 बेच्यो भने सो ज्याकेट कतिमा किनिएको रहेछ ? यदि 5% नाफा गर्न सो सामान कतिमा बेच्नुपर्‍यो ?
10. चिया पसले साहुनी ज्योतिले 150 ओटा ग्लास किनेकी रहिछन् । तिनीहरूमध्ये 50 ओटा फुटेछन् । बाँकी ग्लासहरूलाई प्रत्येकको रु. 75 मा बेच्दा उनलाई 25% नाफा भएछ भने 150 ओटा ग्लासलाई कतिमा किनेकी रहिछन् ?

Curriculum Development Centre

एकाइ 19

ऐकिक नियम (Unitary Method)

19.1 प्रत्यक्ष परिवर्तन (विचरण) मा आधारित ऐकिक नियमका समस्याहरू

प्रत्यक्ष परिवर्तन (Direct Variation)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तलको तालिकामा सिसाकलम र मूल्य दिइएको छ । उक्त तालिका पुरा गर :

सिसाकलमको सङ्ख्या	5	1	3	7	10
मूल्य रु.	30	?	?	?	?

माथि दिइएको तालिकामा सिसाकलमको सङ्ख्या र मूल्य प्रत्यक्ष परिवर्तनसँग सम्बन्धित छन् ।

माथिको तालिकाका आधारमा 5 ओटा सिसाकलमको मूल्य रु. 30 हुँदा एउटा सिसाकलमलाई कति पर्छ ? पत्ता लगाऊ ।

ऐकिक नियम प्रयोग गरी मूल्य निकाल्दा,

5 ओटा सिसाकलमको मूल्य = रु. 30

एउटा (1 ओटा) सिसाकलमको मूल्य = रु. $\frac{30}{5}$ = रु. 6 हुन्छ ।

3 ओटा सिसाकलमको मूल्य = रु. 6 x 3 = रु. 18 पर्छ ।

हो, 5 ओटा सिसाकलमलाई रु. 30 पर्छ भने एउटा सिसाकलमलाई थोरै (कम) पर्छ त्यसैले रु. 30 लाई 5 ले भाग गर्दा एउटा सिसाकलमको मूल्य आउँछ ।

3 ओटा सिसाकलमको मूल्य एउटाको मूल्यभन्दा धेरै पर्छ, त्यसैले एउटाको मूल्यलाई सङ्ख्या 3 ले गुणन गर्नुपर्छ ।

(ख) 6 ओटा सिसाकलमको मूल्य कति पर्ला ?

यसरी मूल्य थोरै पर्छ वा कम हुन्छ भने भाग गर्नुपर्छ । धेरै पर्छ वा बढी हुन्छ भने गुणन गर्नुपर्छ ।

दुई परिमाणहरूमा एउटामा भएको वृद्धि (वा कमी) ले अर्कोमा पनि त्यही अनुपातमा वृद्धि (वा कमी) हुन्छ भने त्यस्तो परिमाणलाई प्रत्यक्ष परिवर्तन विचरण (direct variation) भएको भनिन्छ ।

उदाहरण 1

12 ओटा सुन्तलाको मूल्य रु. 36 पर्छ भने,

(क) एउटा सुन्तलाको मूल्य कति पर्छ ?

(ख) 5 ओटा सुन्तलाको मूल्य कति पर्ला ?

Curriculum Development Centre

(ग) 20 ओटा सुन्तलाको मूल्य कति पर्ला ?

समाधान

यहाँ 12 ओटा सुन्तलाको मूल्यभन्दा एउटा (1 ओटा) को मूल्य कम पर्छ। त्यसैले उक्त सुन्तलाको जम्मा मूल्यलाई सङ्ख्याले भाग गर्नुपर्छ ।

दिइएअनुसार, 12 ओटा सुन्तलाको मूल्य = रु. 36 पर्छ ।

एउटा (1 ओटा) सुन्तलाको मूल्य = रु. $\frac{36}{12}$ = रु 3 पर्छ ।

5 ओटाको मूल्य 1 ओटा सुन्तलाभन्दा बढी पर्छ त्यसैले सङ्ख्या 5 ले गुणन गर्नुपर्छ ।

5 ओटा सुन्तलाको मूल्य = रु. 3 x 5 = रु. 15

20 ओटा सुन्तलाको मूल्य = रु. 3 x 20 = रु 60 पर्छ ।

उदाहरण 2

5 लिटर पेट्रोलले एउटा कारमा 60 km यात्रा गर्न सकिन्छ । 36 km यात्रा गर्न कति लिटर पेट्रोल आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

60km यात्रा गर्नुभन्दा 36km यात्रा गर्न कम पेट्रोल आवश्यकता पर्छ । त्यसैले यो प्रत्यक्ष परिवर्तन हो ।

60km यात्रा गर्न 5 लिटर पेट्रोल चाहिन्छ ।

1km यात्रा गर्न $\frac{5}{60}$ लिटर पेट्रोल चाहिन्छ ।

36km यात्रा गर्न $\frac{5}{60} \times 36$ = 3 लिटर पेट्रोल चाहिन्छ ।

अत: 36km यात्रा गर्न 3 लिटर पेट्रोल आवश्यकता पर्छ ।

19.2. अप्रत्यक्ष परिवर्तन/विचरण (Indirect Variation) मा आधारित ऐकिक नियमका समस्या

तलको तालिकामा 5 जना मानिसले गाई पालन व्यवसायको टहरो बनाउन 15 दिन लगाउँछन् भन्ने कुरा दिइएको छ । साथीसँग छलफल गरी तालिका भर :

मानिस (जना)	5	1	3
दिन	15	?	?

5 जना मानिसले एउटा उक्त टहरो बनाउन 15 दिन लाग्छ भने 1 जना मानिसले सो टहरो बनाउन धेरै दिन लाग्छ । त्यसैले दिनलाई मानिसको सङ्ख्याले गुणन गर्नुपर्छ ।

Curriculum Development Centre

मानिस	5	1	3
दिन	15	5 x 15 = 75	?

त्यस्तै एक जनालाई 75 दिन लाग्छ भने 3 जनाले काम गर्दा टहरो बनाउन कम दिन लाग्छ ।

त्यसैले एक जनाले काम गर्ने दिनलाई मानिसको सङ्ख्याले भाग गर्नुपर्छ ।

मानिस	5	1	3
दिन	15	75	75 ÷ 3 = 25

अत: 3 जना मिलेर सो टहरो बनाउन 25 दिन लगाउँछन् ।

दुई परिमाणहरूमा एउटामा भएको वृद्धि वा कमीले अर्कोमा पनि त्यही अनुपातमा कमी वा वृद्धि हुन्छ भने त्यस्तो परिमाणलाई अप्रत्यक्ष परिवर्तन/विचरण भएको भनिन्छ ।

उदाहरण 3

12 जना मानिसले कुनै काम गर्न 20 दिन लगाउँछन् भने 16 जना मानिसले सोही काम पुरा गर्न कति दिन लगाउलान् ?

समाधान

12 जना मानिसबाट 16 जना मानिस वृद्धि भएको छ ।

12 जना मानिसले 20 दिन लगाउँदा 16 जना मानिसले कम दिन लगाउँछन् ।

एउटामा वृद्धि हुँदा अर्कोमा कमी भएकोले यो अप्रत्यक्ष विचरण हो ।

12 जना मानिसले एक काम पुरा गर्न 20 दिन लगाउँछन् ।

1 जना मानिसले एक काम पुरा गर्न 20 x12 दिन लगाउँछन् ।

16 जना मानिसले एक काम पुरा गर्न $\frac{20 \times 12}{16} = 15$ दिन लगाउँछन् ।

अत: 16 जना मानिसले सो काम पुरा गर्न 15 दिन लगाउँछन् ।

उदाहरण 4

एउटा छात्राबासमा राखिएको खाना कति दिनमा 180 जनाले सक्छन् जबकि 150 जनाले सो खाना सिध्याउन 60 दिन लगाउँछन् ।

समाधान

यहाँ, मानिसको सङ्ख्या बढ्दा खाना खाने दिन घट्छ ।

मानिसको सङ्ख्या घट्दा खाना खाने दिन बढ्छ ।

त्यसैले यो अप्रत्यक्ष विचरण हो ।

150 जनालाई खाना सिध्याउन 60 दिन लाग्छ ।

1 जनालाई खाना सिध्याउन 60 x 150 दिन लाग्छ ।

Curriculum Development Centre

180 जनालाई खाना सिध्याउन $\frac{60 \times 150}{180}$ = 50 दिन लाग्छ ।

अत: 180 जनालाई सो खाना सिध्याउन 50 दिन चाहिन्छ ।

अभ्यास 19.1

तलका प्रश्नको उत्तर लेख :

1. तलका प्रत्येक उदाहरणहरू प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष परिवर्तनमध्ये के हुन् ? छुट्याऊ ।
   (क) हात र औँलाको सङ्ख्या
   (ख) बराबर क्षेत्रफल भएको आयतको लम्बाइ र चौडाइ
   (ग) मानिसको सङ्ख्या र काम गर्न लाग्ने दिन
   (घ) खानेपानीको पाइपको पानी भर्ने क्षमता र लाग्ने समय
   (ङ) गाडीको गति र निश्चित दुरी पार गर्न लाग्ने समय
2. 3 K.g. चिनीको मूल्य रु. 120 पर्छ भने 5 Kg. चिनीको मूल्य कति पर्छ ।
3. 15 ओटा सुन्तलाको मूल्य रु. 75 पर्छ भने 12 ओटा सुन्तलाको मुख्य कति पर्छ ?
4. काठमाडौँको बागबजारको एउटा पसलको 4 महिनाको भाडा रु. 8,000 हुन्छ । 1 वर्षको भाडा जम्मा कति तिर्नुपर्ला ?
5. एउटा मोटरसाइकल 12 लिटर पेट्रोलले 240 km. गुड्छ । 60 km. यात्रा गर्न कति लिटर पेट्रोलको आवश्यकता पर्ला ?
6. यदि 15 kg. चिनीले 12 kg. मिश्री साट्न सकिन्छ भने 60 kg. मिश्रीले कति kg चिनी साट्न सकिन्छ ?
7. 5 जना मानिसले एउटा काम गर्न 12 दिन लगाउँछन् भने 15 जना मानिसले सो काम गर्न कति दिन लगाउनलान् ?
8. 12 जना मानिसले एउटा खेत खन्न 20 दिन लगाउँछन् भने सोही खेत 8 जनाले खन्न कति दिन लगाउलान् ?
9. एउटा बसले काठमाडौँबाट नेपालगन्ज 40km. प्रति घण्टाका दरले गुड्दा 15 घण्टामा पुऱ्याउँछ । यदि गति बढाएर 50 km प्रति घण्टाका दरले गुडाउँदा कति घण्टामा यात्रा पुरा हुन्छ ?
10. एउटा ब्यारेकमा 250 जना सैनिक जवानको लागि 45 दिनको खाना सञ्चित छ । यदि 300 जना सैनिक जवानले खाने हो भने सोही खाना कति दिनलाई पुग्ला ?
11. एउटा ठेकेदारले एउटा काम 35 दिनमा पुरा गर्न 32 जना कामदार काममा लगाएछ । यदि उसले 40 जना कामदार लगाएको भए सो काम कति दिनमा पुरा हुन्थ्यो होला ?
12. माथि प्रश्न नं. 1 मा दिइए जस्तै गरी 2/2 ओटा समस्याहरू बनाई/खोजी समाधान गर ।

Curriculum Development Centre

एकाइ 20 साधारण ब्याज (Simple Interest)

20.1 साधारण ब्याज (Simple Interest)

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

दिपकले राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कमा रु. 5,000 बचत खातामा जम्मा गरेछ । 2 वर्षपछि उनलाई बैङ्कले रु. 1000 थपेर जम्मा रु. 6,000 फिर्ता दिएछ ।

1. साधारण ब्याजसम्बन्धी शब्दावलीको परिचय

यहाँ, (क) दीपकले बैङ्कमा जम्मा गरेको रकम रु. 5,000 सावाँ (Principal -P) हो ।

(ख) बैङ्कले थपेर दिएको रकम रु. 1000 ब्याज (Intrest -I) हो ।

(ग) बैङ्कले थपेर जम्मा दिएको रकम रु. 6,000 मिश्रधन (Amount -A) हो ।

(घ) बैङ्कले रु. 5,000 मा रु. 1000 थपेर दिएको 2 वर्ष समय (Time -T) हो ।

(ङ) बैङ्कले रु. 5000 मा रु. 1000 थप्यो भने कति प्रतिशत थप्यो होला ?

थपेको प्रतिशत (%) $= \dfrac{\text{रु.}1000}{\text{रु.}\ 5000} \times 100\%$

$= 20\%$

प्रत्येक रु. 100 मा 1 वर्षमा थप्ने रकमलाई ब्याजदर (Interest rate-R) भनिन्छ ।

2. ऐकिक नियमबाट ब्याज निकाल्ने तरिका

रु. 100 को 1 वर्षमा हुने ब्याज = रु 20

रु. 100 को 2 वर्षमा हुने ब्याज = रु. 2×20

रु. 1 को 2 वर्षमा हुने ब्याज = रु. $\dfrac{2 \times 20}{100}$

रु. 6,000 को 2 वर्षमा हुने ब्याज = रु. $\dfrac{6000 \times 2 \times 20}{100}$

यसलाई ब्याज I, रु. 6000 लाई सावाँ P, 2 वर्षलाई समय T, 20 लाई दर R ले जनाउने हो भने

ब्याज $I = \dfrac{PTR}{100}$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अब माथिका क्रियाकलापहरूबाट र सूत्रबाट साँवा (P), समय (T), ब्याजदर (R), मिश्रधन (A) पत्ता लगाउने सूत्र पत्ता लगाऊ ।

1. ब्याज (I) = $\frac{PTR}{100}$

2. साँवा (P) = $\frac{I \times 100}{TR}$

3. समय (T) = $\frac{I \times 100}{PR}$

4. ब्याजदर (R) = $\frac{I \times 100}{PT}$

5. मिश्रधन (A) = P + I

उदाहरण 1

रु. 2,500 को 2 वर्षमा 10% का दरले हुन आउने ब्याज र मिश्रधन पत्ता लगाऊ ।

समाधान : यहाँ, सावाँ (P) = रु. 2,500, समय (T) = 2 वर्ष, ब्याजदर (R) = 10%, ब्याज (I) = ?

मिश्रधन (A) = ?

ब्याज (I) = $\frac{PTR}{100} = \frac{\text{रु. } 2,500 \times 2 \times 10}{100}$ = रु. 500

मिश्रधन (A) = P+I = रु 2500 + रु 500 = रु.3000

त्यसैले, ब्याज रु. 500 र मिश्रधन र 3000 हुन्छ ।

उदाहरण 2

प्रतिवर्ष 12% का दरले 3 वर्षमा रु. 720 ब्याज पाउन कति रकम जम्मा गर्नुपर्छ ?

समाधान : यहाँ, ब्याजदर (R) = 12%, समय (T) = 3 वर्ष, ब्याज (I) = रु. 720, सावाँ (P) = ? छ ।

अब,

सावाँ (P) = $\frac{I \times 100}{TR} = \frac{\text{रु. } 720 \times 100}{3 \times 12}$ = रु. 2,000

अत: सावाँ = रु. 2000 जम्मा गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

सृजनाले नेपाल बैङ्कमा रु 1200 जम्मा गरिछन् । 2 वर्ष 6 महिनापछि एकमुष्ठ रु. 1500 फिर्ता पाइछन् भने कति प्रतिशत ब्याजदर बैङ्कले दिएछ ।

Curriculum Development Centre

समाधान

सावाँ (P) = रु. 1200

समय (T) = 2 वर्ष 6 महिना = 30 महिना = $\frac{30}{12}$ वर्ष = $\frac{5}{2}$ वर्ष = $2\frac{1}{2}$ वर्ष

मिश्रधन (A) = रु. 1500

ब्याजदर (R) = ?

यहाँ, सूत्रानुसार ब्याज (I) = A-P

= रु. 1500- रु. 1200

= रु. 300

ब्याजदर (R) = $\frac{I \times 100}{PT}$ = $\frac{\text{रु. } 300 \times 100}{\text{रु. } 1200 \times \frac{5}{2}}$ = $\frac{300 \times 100 \times 2}{1200 \times 5}$ = 10%

अत: बैङ्कले 10% ब्याजदर दिएको रहेछ ।

उदाहरण 4

कति समयपछि र 3000 को मिश्रधन वार्षिक 15% ब्याजका दरले रु. 3900 हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, सावाँ (P) = रु. 3000

ब्याजदर (R) = 15%

मिश्रधन (A) = रु. 3900

ब्याज (I) = A-P = रु. 3900 - रु. 3000 = रु. 900

समय (T) = ?

सूत्रानुसार, समय (T) = $\frac{I \times 100}{PR}$ = $\frac{\text{रु. } 900 \times 100}{\text{रु. } 3000 \times 15}$ = 2 वर्ष

अत: आवश्यक समय = 2 वर्ष ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 20.1

1. **तलका सूचनाहरूका आधारमा साधारण ब्याज कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ :**

क्र.स.	सावाँ	ब्याजदर	समय
(क)	रु.450	5% प्रतिवर्ष	2 वर्ष
(ख)	रु.900	10% प्रतिवर्ष	3 वर्ष
(ग)	रु.2000	12% प्रतिवर्ष	1 वर्ष 6 महिना
(घ)	रु.3500	प्रतिवर्ष	2 वर्ष

2. **ब्याजदर कति हुन्छ ? पत्ता लगाऊ :**

क्र.सं.	सावाँ	ब्याज	समय
(क)	रु. 600	रु.90	5 वर्ष
(ख)	रु. 1500	रु. 150	2 वर्ष
(ग)	रु. 6000	रु. 2000	1 वर्ष 6 महिना

3. **समय पत्ता लगाऊ :**

क्र.सं.	सावाँ	ब्याज	ब्याजदर (प्रतिवर्ष)
(क)	रु. 800	रु. 120	6%
(ख)	रु. 2000	रु. 360	9%
(ग)	रु. 7,000	रु. 2520	12%

$3\frac{1}{3}\%$

4. **सावाँ पत्ता लगाऊ :**

क्र.सं.	समय	ब्याजदर (प्रतिवर्ष)	ब्याज
(क)	5 वर्ष	6%	रु. 120
(ख)	3 वर्ष	12%	रु.360
(ग)	2 वर्ष 6 महिना	8%	रु. 1,200

5. रु. 1,750 को 4 वर्षमा वार्षिक 10% प्रति वर्षका दरले ब्याज र मिश्रधन कति कति हुन्छ ?

6. कति ब्याजका दरले रु. 1,050 को 5 वर्षमा मिश्रधन रु. 1575 हुन्छ ?

7. कति समयपछि रु. 6,500 को मिश्रधन 12% प्रतिवर्ष ब्याजका दरले रु.8,450 हुन्छ ?

8. सुजनले श्यामसँग रु. 2,400 वार्षिक 6% का दरले 5 वर्षका लागि ऋण लिए । सोही रु. 2,400 सृजनालाई वार्षिक 10% का दरले 4 वर्षका लागि सापटी दिए । यसरी सुजनलाई नाफा वा नोक्सान के भयो ? र कति भयो ? पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

एकाइ 21 तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

21.1 सञ्चित बारम्बारता तालिका (Cumulative Frequency Table)

सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउनुपूर्व सर्वप्रथम कुनै पनि तथ्याङ्कको सङ्कलन गरिन्छ । यस क्रममा मिलान चिह्नको प्रयोग गरी बारम्बारता निकालिन्छ । यसरी प्राप्त गरी व्यवस्थित गरिएको तथ्याङ्कलाई तथ्याङ्कका गुणहरूको आधारमा छुट्याउनुपर्छ । यस कार्यलाई तथ्याङ्कको तालिकीकरण र प्रस्तुतीकरण भनिन्छ । अब हामी यहाँ सञ्चित बारम्बारता तालिकाको बारेमा छलफल गर्दै छौँ ।

सञ्चित बारम्बारता तालिका भनेको प्राप्त तथ्याङ्कहरूलाई बारम्बारतामा प्रस्तुत गरिसकेपछि क्रमश: बारम्बारताहरू जोड्दै जाँदा बन्ने बारम्बारहरूको योग वा जोड हो ।

1. असमूहगत तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारता तालिका

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर ।

मानौँ कुनै एउटा विद्यालयको कक्षा 7 को 30 जना विद्यार्थीहरूको समूह एकाइको 10 पूर्णाङ्कको एकाइ परीक्षामा प्राप्ताङ्क निम्नानुसारको पाइयो :

6, 8, 10, 6, 2, 8, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, 6, 8, 6, 10, 2, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 8, 6, 4, 6, 8, 6, 10, 6

माथिको कोरा (Raw) तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा देखाउँदा

क्र.सं.	प्राप्ताङ्क	बारम्बारता	मिलान चिह्न
1.	2	4	||||
2.	4	6	𝍸 |
3.	6	10	𝍸 𝍸
4.	8	7	𝍸 ||
5.	10	3	|||
जम्मा		30 जना	

यहाँ 30 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा देखाइएको छ ।

माथिको बारम्बारता तालिकामा बारम्बारताहरूलाई सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाई क्रमश: अघिल्ला बारम्बारताहरू जोड्दै जाँदा बन्ने सञ्चित बारम्बारतालाई प्रक्रियासहित तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

माथिको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारतामा लेख्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
2	4	4
4	6	4 + 6 =10
6	10	10 +10 = 20
8	7	20 +7 =27
10	3	27 + 3 = 30

सञ्चित बारम्बारता निकाल्ने तरिका

1. सञ्चित बारम्बारताको पहिलो पङ्तिमा पहिलो तथ्याङ्कको बारम्बारता लेख्नुपर्छ । जस्तै : प्राप्ताङ्क 2 को बारम्बारता 4 छ । त्यसैले सञ्चित बारम्बारताको पहिलो लहरमा 4 लेखिएको छ ।
2. दोस्रो तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारताको दोस्रो लहरमा पहिलो र दोस्रो बारम्बारता जोडेर लेख्नुपर्छ । जस्तै : 4 + 6 = 10
3. यसै गरी क्रमश: सञ्चित बारम्बारताको तेस्रो, चौथो ... लहरमा बारम्बारताहरू जोड्दै जानुपर्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

तल दिइएको तथ्याङ्कबाट सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)
10	2
20	5
30	12
40	7
50	1

समाधान

माथिको तथ्याङ्कको आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

प्राप्ताङ्क(x)	बारम्बारता(f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10	2	2
20	5	2 + 5 = 7
30	12	7 + 12 =19
40	7	19 +7 =26
50	1	26 +1 =27

उदाहरण 2

तल दिइएको आँकडाको आधारमा भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60
बारम्बारता	5	9	15	12	6	3

समाधान :

यहाँ, भन्दा कमको सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

प्राप्ताङ्क (x)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10 भन्दा कम	5
20 भन्दा कम	9 + 5 = 14
30 भन्दा कम	14 + 15 = 29
40 भन्दा कम	29 + 12 = 41
50 भन्दा कम	41 + 6 = 47
60 भन्दा कम	47 + 3 = 50

Curriculum Development Centre

2. समूहगत तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारता तालिका

उपयुक्त श्रेणीअन्तर राखी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिकाबाट बनाइएको सञ्चित बारम्बारता तालिकालाई समूहगत सञ्चित बारम्बारता तालिका भनिन्छ । यसको उदाहरणलाई तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

श्रेणीअन्तर निकाल्दा तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या कति छ त्यसलाई ध्यान दिनुपर्छ । सामान्यतया 5, 10, 20 आदि राखेर श्रेणीअन्तर निकाल्दा सजिलो हुन जान्छ । तैपनि तथ्याङ्कहरूको विस्तार थोरै छ भने श्रेणीअन्तर सानो सङ्ख्यामा पनि राखिन्छ । त्यसैगरी यदि विस्तार धेरै छ भने श्रेणीअन्तर ठुलो सङ्ख्यामा राखिन्छ । तल श्रेणीअन्तर 10 भएको उदाहरण प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएको आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 -50
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	12	7	3

समाधान :

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क(x)	विद्यार्थी सङ्ख्या(f)	सञ्चित बारम्बारता(cf)
0 - 10	3	3
10 - 20	5	3 + 5 = 8
20 - 30	12	8 + 12 = 20
30 - 40	7	20 + 7 = 27
40 - 50	3	27 + 3 = 30

अभ्यास 21.1

तल दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऊ :

1.

प्राप्ताङ्क	3	6	9	12	15
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	8	6	4

2.

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	10	10	7	3

Curriculum Development Centre

3.

खेल	भलिबल	फुटबल	क्रिकेट	टेबलटेनिस	क्यारमबोर्ड	चेस
विद्यार्थी सङ्ख्या	15	22	30	25	18	10

4.

ज्याला (रुपियाँमा)	10	20	30	40	50
कामदार सङ्ख्या	3	7	10	8	7

5.

प्राप्ताङ्क	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	8	15	12	7

6.

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थी सङ्ख्या	6	8	15	10	6

7.

प्राप्ताङ्क	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
विद्यार्थी सङ्ख्या	15	22	30	20	10

8.

ज्याला (रु.)	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400-500
कामदार सङ्ख्या	6	12	18	14	7

9.

उमेर (वर्ष)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
बिरामी सङ्ख्या	40	30	50	20	10

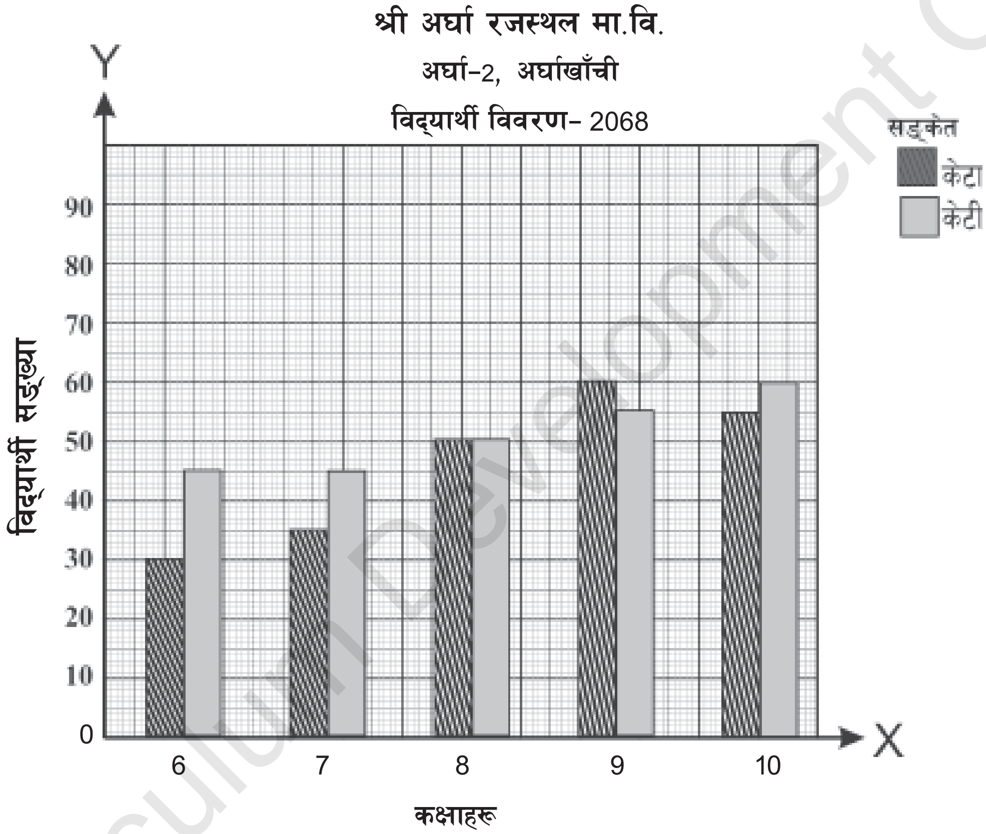
Curriculum Development Centre

21.2 बहुस्तम्भ चित्र (Multiple Bar Diagram)

हामीले साधारण स्तम्भ चित्रका बारेमा अघिल्ला कक्षाहरूमा छलफल गरिसकेका छौँ । कुनै पनि तथ्याङ्कहरूको सङ्कलन गरिसकेपछि प्रस्तुतीकरणलाई आकर्षक र छिटै अध्ययन गर्न सकिने बनाउने उपायहरूमध्ये बहुस्तम्भ चित्र पनि एक हो । यसलाई तलको उदाहरणहरूमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 1

एउटा विद्यालयका कक्षा 6 देखि 10 सम्मका विद्यार्थीहरूको छात्रा र छात्र सङ्ख्यालाई तलको बहुस्तम्भ चित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । यसको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर ।



माथिको तालिकाका आधारमा निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर :

1. बहुस्तम्भ चित्र के कस्तो विषयमा रहेछ ?
2. बहुस्तम्भ चित्रका रेखाहरूमा ठाडो र तेस्रो लहरमा रहेका सङ्ख्याहरूले के के जनाएका छन् ?
3. कुन स्तम्भले केटा र कुनले केटीको सङ्ख्या जनाउँछ ?
4. बहुस्तम्भ चित्रको प्रत्येक ठाडोतिरको ठुलो कोठा एउटा कोठाले कति विद्यार्थी जनाएको छ ?
5. कक्षा 6 मा जम्मा विद्यार्थी कति रहेछन् ?

Curriculum Development Centre

6. सबभन्दा बढी र सबभन्दा कम विद्यार्थी कुन कुन कक्षामा रहेछन् ?

7. कुन कुन कक्षामा छात्रभन्दा छात्राको सङ्ख्या बढी रहेछ ?

8. कुन कुन कक्षामा छात्रा भन्दा छात्रको सङ्ख्या बढी रहेछ ?

9. माथिको बहुस्तम्भ लेखाचित्रबाट अन्य के के सूचनाहरू प्राप्त गर्न सक्छौ ?

एकभन्दा बढी आपसमा सम्बन्धित सूचना तथा तथ्याङ्कहरूलाई प्रस्तुत गरिएको चित्रलाई बहुस्तम्भ चित्र भनिन्छ । बहुस्तम्भ चित्रको रचना गर्दा साधारण स्तम्भ चित्रमा जस्तै प्रत्येक स्तम्भको चौडाइ बराबर हुनुपर्छ । बहुस्तम्भ चित्रहरूको उचाइले सङ्ख्या जनाउँदछ ।

उदाहरण 2

श्री भानु मा.वि. ताप्लेजुङमा 2067 सालमा सञ्चालन भएको आँखा, कान, सामान्य चिकित्सा र दाँत परीक्षण शिविरमा दर्ता भई स्वास्थ्य परीक्षण गराउने व्यक्तिहरूको तथ्याङ्क यसप्रकार पाइयो :

स्वास्थ्य सेवाका नाम	आँखा		कान		सामान्य चिकित्सा		दन्त	
परीक्षण सङ्ख्या	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष
	21	30	22	13	85	56	28	38

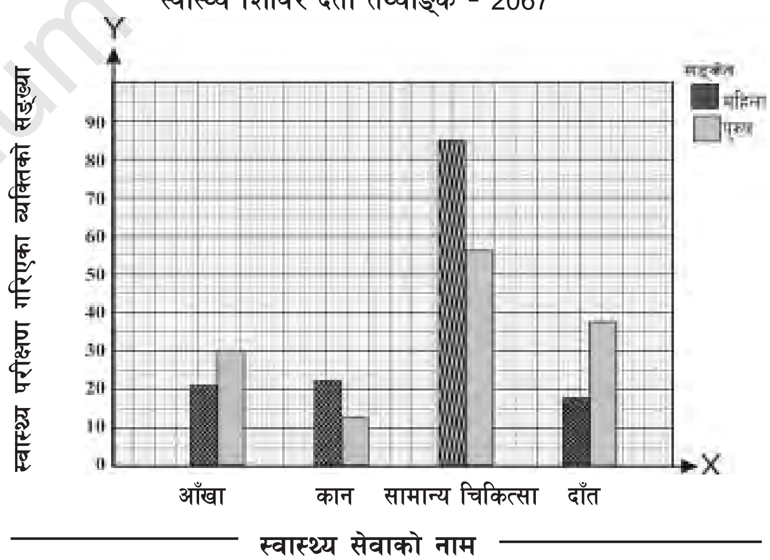
उक्त तथ्याङ्कलाई ग्राफ पेपरमा बहुस्तम्भ चित्रद्वारा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, तथ्याङ्कको तल्लो सीमा 13 र माथिल्लो सीमा 85 छ । त्यसैले ग्राफको प्रत्येक सानो कोठा बराबर एकजना व्यक्ति ठुलो कोठा बराबर 10 जना मानेर बहुस्तम्भ चित्र बनाई तल प्रस्तुत गरिएको छ :

श्री भानु माध्यमिक विद्यालय, ताप्लेजुङ

स्वास्थ्य शिविर दर्ता तथ्याङ्क - 2067



Curriculum Development Centre

क्रियाकलाप

(क) तिम्रो विद्यालयमा भएको वा कुनै अन्य स्रोतबाट प्राप्त बहुस्तम्भ चित्र लिएर त्यसका मुख्य सूचनाहरूलाई लेखेर कक्षामा छलफल गर ।

(ख) तिम्रो विद्यालयमा भएको वा कुनै अन्य स्रोतबाट प्राप्त सूचना तथा तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गरी एउटा बहुस्तम्भ चित्र बनाई कक्षामा छलफल गर ।

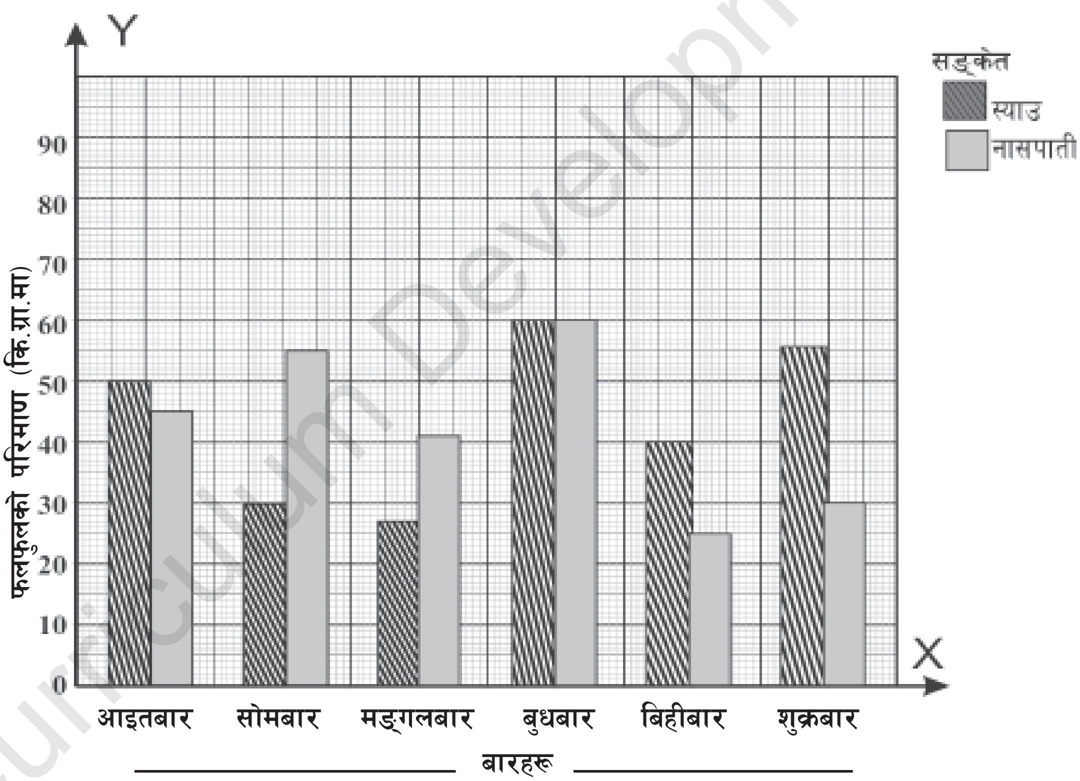
अभ्यास 21.2

1. बहुस्तम्भ चित्र केलाई भनिन्छ ? बहुस्तम्भ चित्रमा कुन कुन विषय वस्तु समावेश गरिएका हुन्छन् ?

2. तल एउटा फलफुल पसलेले 6 दिनमा बेचेको स्याउ र नासपातीको परिमाणलाई बहुस्तम्भ चित्रमा देखाइएको छ :

सानुमाया फलफुल स्टोर

इलाम न.पा. – ३, इलाम



अब माथिको चित्रका आधारमा निम्न लिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख :

(क) आइतबार स्याउ र नासपाती कति कति परिमाण बिक्री भएको रहेछ ?

Curriculum Development Centre

(ख) सोमबार स्याउ र नासपातीमा कुन कति परिमाणमा बढी बिक्री भएको रहेछ ?

(ग) स्याउ सबभन्दा बढी र सबभन्दा कम कुन कुन बारमा कति कति परिमाणमा बिक्री भएको रहेछ ?

(घ) माथिको बहुस्तम्भ चित्रबाट प्राप्त हुने अन्य कुनै दुई ओटा सुचनाहरू लेख ।

3. नेपालको कुनै एउटा पर्यटक क्षेत्रमा आएका पर्यटकहरूमध्ये भारत र अन्य मुलुकका गरी दुई वर्गका तथ्याङ्क निम्नानुसार सङ्कलन गरिएको रहेछ ।

साल (वि.सं.) मा	2064		2065		2066		2067	
पर्यटक सङ्ख्या	भारत	अ.मु	भारत	अ.मु.	भारत	अ.मु.	भारत	अ.मु.
(सयमा)	12	28	15	35	19	36	20	38

माथिको तथ्याङ्कलाई उपयुक्त स्केल दिएर ग्राफ पेपर/ग्राफ कापीमा बहुस्तम्भ चित्र बनाऊ ।

4. सरस्वती मा.वि., धनुषामा विद्यार्थीहरू आउँदा सवारी साधन प्रयोग गरी तथा हिँडेर आउने गरेको तथ्याङ्कलाई तल दिइएको छ :

विद्यालय आउने साधन	हिँडेर		बस		मोटर साइकल		साइकल	
विद्यार्थी सङ्ख्या	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा	छात्र	छात्रा
	35	25	80	42	20	34	85	60

माथिको तथ्याङ्कलाई उपयुक्त स्केल दिएर ग्राफ पेपर/ग्राफ कापीमा बहुस्तम्भ लेखा चित्र बनाऊ ।

5. अमर बिस्कुट फ्याक्ट्री बुटवलले गुलियो र नुनिलो गरी दुई प्रकारका बिस्कुटहरू उत्पादन गर्दो रहेछ । वैशाख महिनाको पहिलो 5 दिनमा गरेको उत्पादनलाई तल तालिकामा दिइएको छ :

उत्पादन बार	आइतबार		सोमबार		मङ्गलबार		बुधबार		बिहीबार	
उत्पादित परिमाण किलोग्राममा	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो	गुलियो	नुनिलो
	30	29	45	56	71	65	77	59	79	55

माथिको तथ्याङ्कलाई उपर्युक्त स्केल दिएर ग्राफ पेपर/ग्राफ कापीमा बहुस्तम्भ लेखा चित्र बनाऊ ।

6. तिम्रो विद्यालयका कक्षा 1 देखि 5 सम्मका विद्यार्थीहरूको छात्र र छात्राहरूको तथ्याङ्क सङ्कलन गरी बहुस्तम्भ चित्र बनाऊ । आफूले बनाएको बहुस्तम्भ चित्रलाई कक्षामा प्रस्तुत गर ।

Curriculum Development Centre

21.3 असमूहगत तथा समूहगत आँकडा (Ungrouped and Grouped Data)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर ।

जनजागृति मा.वि., बुटवलका कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीहरूले 20 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको अङ्क :

8, 15, 17, 8, 13, 15, 8, 17, 8, 13, 13, 15, 18, 10, 12, 10, 12, 10, 13, 13

(क) यस प्राप्ताङ्कलाई मिलान चिह्नमा प्रस्तुत गरेर हेरौँ ।

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता
8	||||	4
10	|||	3
12	||	2
13	~~||||~~	5
15	|||	3
17	||	2
18	|	1

माथिको तालिकामा दिइएका तथ्याङ्कहरू असमूहगत तथ्याङ्कहरू हुन् । यदि कुनै पनि तथ्याङ्कमा भएका राशिहरूको सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको फरक ठुलो भएमा असमूहगत तथ्याङ्कबाट बारम्बारता तालिका निकाल्न झन्झटिलो र गाह्रो हुन्छ । धेरै भएको आँकडालाई समूह बनाई तालिका बनाउन सकिन्छ ।

माथिकै तालिकाबाट समूहगत तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

सर्वप्रथम सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको अन्तर निकाल्नुपर्छ ।

अत: सबभन्दा ठुलो मान - सबभन्दा सानो मान = 18 - 8 = 10 हुन्छ ।

यहाँ अन्तर 10 छ । त्यसैले यदि 4 ओटा श्रेणी सङ्ख्या बनाउने हो भने वर्गान्तर $\frac{10}{4} = 2.5 =$ करिब 3 को अन्तरमा बनाउनुपर्छ ।

माथिको तथ्याङ्कलाई 3 को अन्तरमा वर्गान्तर गरी तल दिइएअनुसार समूहगत बारम्बार तालिकामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

वर्गान्तर	मिलान चिह्न	बारम्बारता
8 - 11	~~||||~~ ||	7
11 - 14	|||| ||	7
14 - 17	~~||||~~	5
17 - 20	|||	3

समूहगत आँकडा बनाउँदा ध्यान दिनुपर्ने कुराहरू ।

(क) सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको फरक निकाल्ने

(ख) सबभन्दा ठुलो मान र सबभन्दा सानो मानको फरकलाई वर्गान्तरले भाग गर्ने । (वर्गान्तर आफैँले छान्ने वा छान्न दिइन्छ ।)

(ग) वर्गान्तरको तल्लो सीमा (lower limit) सोही वर्गान्तरमा पर्छ भने माथिल्लो सीमा (upper limit) अघिल्लो वा अर्को वर्गान्तरमा पर्छ ।

(घ) मिलान चिह्नले दिएको मानलाई बारम्बारतामा राख्ने ।

उदाहरण 1

कक्षा 7 का 40 जना विद्यार्थीहरूको तौल तल दिइएको छ । यसबाट असमूहगत तथ्याङ्क बनाऊ ।

38, 37, 36, 35,34, 33,38, 34, 35, 32, 30, 31, 34, 30 31, 32, 30, 33, 32, 30, 33, 31, 37, 36, 35, 34, 32, 31, 30, 39, 38, 37, 30, 31, 32, 37, 30, 32, 37, 39

तौल (कि.ग्रा.मा)	मिलान चिह्न	बारम्बारता
30	𝍸 ||	7
31	𝍸	5
32	𝍸 |	6
33	|||	3
34	||||	4
35	|||	3
36	||	2
37	𝍸	5
38	|||	3
39	||	2

उदाहरण 2

तल दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा समूहगत तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिका बनाऊ :

5, 19, 14, 17, 20, 21, 35, 39, 30, 31, 6, 8, 14, 28, 27, 39, 30, 31, 32, 25, 26, 10, 11, 12, 15, 28, 30, 31, 24, 22

समाधान : अन्तर = ठुलो मान – सानो मान = 39 - 5 = 34

वर्गान्तर	मिलान चिहन	बारम्बारता
5 – 10	|||	3
10 – 15	𝍸	5
15 – 20	|||	3
20 – 25	||||	4
25 – 30	𝍸	5
30 – 35	𝍸 ||	7
35 – 40	|||	3

Curriculum Development Centre

अभ्यास 21.3

1. तल दिइएको आँकडाबाट असमूहगत तथ्याङ्कको बारम्बारता तालिका बनाऊ :

   (क) कक्षा 7 को गणित विषयको एउटा एकाइ परीक्षामा 22 जना विद्यार्थीले 10 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क :

   4, 6, 5, 3, 2, 4, 5, 6, 3, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4, 3, 6, 8, 9, 3

   (ख) कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीको तौल (कि.ग्रा.मा) :

   25, 27, 30, 25, 32, 36, 27, 30, 25, 32, 30, 25, 36, 30, 36, 32, 27, 27, 25, 30

   (ग) कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीको उचाइ (से.मि.मा) :

   130, 148, 135, 130, 142, 148, 142, 135, 130, 142, 48, 135, 130, 142, 130, 135, 135, 142, 148, 130

   (घ) 40 जना विद्यार्थीको जेठ महिनाको उपस्थिति दिन :

   17, 18, 22, 25, 24, 16, 17, 22, 25, 18, 17, 16, 10, 17, 16, 22, 25, 16, 17, 22, 24, 25, 22, 18, 17, 10 ,16, 22, 18, 17, 25, 25, 16, 17, 24, 22, 17, 16, 18, 10

2. तल दिइएको आँकडाबाट समूहगत बारम्बारता बनाऊ :

   (क) 15 जना विद्यार्थीले 20 पूर्णाङ्कको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क :

   4, 14, 13, 18, 19, 7, 6, 3,10,12, 15, 16, 18, 14, 9

   (ख) 20 जना विद्यार्थीको उमेर (वर्षमा) :

   12, 13, 15, 14, 12, 12, 13, 14, 12, 10, 8, 16, 18, 19, 12, 13,14, 15, 16, 8, 15

   (ग) कक्षा 7 को गणित विषयको 20 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरको प्राप्ताङ्क :

   10, 14, 16, 14, 12, 15, 12, 14, 10, 12, 14, 15, 8, 7, 10, 12, 18, 19, 14, 10, 16, 12, 4, 7, 9, 8, 13, 12, 14, 16

   (घ) कुनै उद्योगमा कार्यरत 40 जना कामदारको दैनिक ज्याला रु. मा :

   70, 75, 80, 70, 90, 95, 100, 110, 80, 85,115, 80, 75, 85, 70, 95, 105, 115, 100, 90

   80, 70, 60, 75, 80, 65, 65, 60, 70, 75, 90, 100, 115, 105, 110, 75, 85, 90, 90, 95

Curriculum Development Centre

21.4 असमूहगत आँकडाको अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean of Ungrouped Data)

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गर र छलफल गर

सुजन र सुमनले गणित, अङ्ग्रेजी, विज्ञान र नेपालीमा 100 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल दिइएको छ :

	गणित	अङ्ग्रेजी	विज्ञान	नेपाली	जम्मा
सुजन	85	80	75	72	312
सुमन	70	85	60	77	292

दिइएका विषयमा सुजन र सुमन कसले राम्रो गरेका रहेछन् ।

सुजनको औसत अङ्क कति रहेछ ? साथीसँग छलफल गर ।

सुमनको औसत अङ्क कति रहेछ ? साथीसँग छलफल गर ।

सुजनको औसत अङ्क = $\frac{312}{4} = 78$

सुमनको औसत अङ्क = $\frac{292}{4} = 73$

यसरी चार ओटा विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कको आधारमा सुजनको औसत अङ्क 78 सुमनको औसत अङ्क 73 भन्दा धेरै भएकाले सुजनको नतिजा राम्रो छ भन्न सकिन्छ । यही औसत अङ्कलाई अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic mean) भनिन्छ । अङ्क गणितीय मध्यकलाई साधारणतया मध्यक (mean) पनि भनिन्छ ।

$\frac{\sum x}{N} = \frac{128}{10} = 12.8$

अत: मध्यक $(\bar{x}) = \dfrac{\text{जम्मा परिणाम } (\sum x)}{\text{परिणाम सङ्ख्या (N)}}$

उदाहरण 1

तल दिइएको कक्षा 7 का 10 जना विद्यार्थीले गणित विषयको 20 पूर्णाङ्कको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ । यो तथ्याङ्कबाट मध्यक पत्ता लगाऊ ।

15, 16, 12, 10, 8, 4, 15, 19, 17, 12

समाधान :

यहाँ 10 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई जोड्दा,

जम्मा परिणाम x= 15 + 16 + 12 + 10 + 8 + 4 + 15 +19 +17 + 12 = 128

विद्यार्थी सङ्ख्या (N) = 10

मध्यक $(\bar{x})$ = x

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

कक्षा 7 का 20 जना विद्यार्थीको तौल (kg मा) तल दिइएको छ । यो आँकडाबाट बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पत्ता लगाऊ ।

20, 22, 30, 34, 25, 26, 20, 20, 22, 25, 26, 30, 22, 25, 26, 26, 25, 20, 22, 25

समाधान दिइएको आँकडालाई बारम्बारता तालिकामा देखाउँदा

तौल (x)	मिलान चिह्न	बारम्बारता (f)	fX
20	||||	4	20 x 4= 80
22	||||	4	22 x 4 = 88
25	~~||||~~	5	25 x 5 = 125
26	||||	4	26 x 4 = 104
30	||	2	30 x 2 = 60
34	|	1	34 x 1 = 34
जम्मा		= 20	fx = 491

त्यसैले, मध्यक $(\bar{x}) = \dfrac{\text{जम्मा योगफल } (\sum fx)}{\text{विद्यार्थी सङ्ख्या } (\sum f)}$

$= \dfrac{491}{20} = 24.$

उदाहरण 3

तल दिइएको बारम्बारता तालिकाको आधारमा मध्यक निकाल :

प्राप्ताङ्क (x)	40	50	55	62	75	80
विद्यार्थी सङ्ख्या (N)	4	6	10	8	5	2

समाधान :

तालिकालाई ठाडो रूपमा लेख्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	fx
40	4	40 x 4 = 160
50	6	50 x 6 = 300
55	10	55 x 10 = 550
62	8	62 x 8 = 496
75	5	75 x 5 = 375
80	2	80 x 2 = 160
जम्मा	N = $\sum f$ = 35	fx = 2041

Curriculum Development Centre

त्यसैले, मध्यक ($\bar{x}$) = $\dfrac{\text{जम्मा प्राप्ताङ्क } (\sum fx)}{\text{विद्यार्थी सङ्ख्या } \quad f}$ = = 58.31

अभ्यास 21.4

1. **तल दिइएको आँकडाबाट अङ्क गणितीय मध्यक निकाल :**

   (क) 4, 6, 7, 5, 8, 4, 3, 9, 8, 6 (ख) 5, 7, 12, 15, 11, 10, 15, 19, 10, 8

   (ग) 6, 7, 8, 5, 4, 6, 7, 8, 3, 6, 9, 7 (घ) 16, 20, 25, 22, 21, 16, 17, 18, 25, 20,

   (ङ) 40, 50, 60, 70, 80, 90

2. **तल दिइएको विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कबाट बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पत्ता लगाऊ :**

   (क) 1, 5, 6, 9, 8, 4, 1, 9, 8, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 4, 1, 5, 4, 6

   (ख) 9, 8, 12, 15, 20, 22, 24, 22, 15, 9, 12, 8, 9, 20, 8, 12, 8, 15, 20, 24, 22, 15, 12, 9, 8

   (ग) 10, 20, 20, 40, 50, 20, 20, 30, 30, 30, 40, 50, 30, 20, 40, 30.

   (घ) 30, 32, 33, 32, 31, 33, 33, 31, 30, 31, 32, 33, 32, 30, 30, 33, 31, 30

   (ङ) 120, 130, 120, 125, 125, 130, 135, 120, 130, 120, 135, 130

3. **तल दिइएको बारम्बारता तालिकाको अङ्क गणितीय मध्यक निकाल :**

$\frac{(2041)}{35}$

(क)

प्राप्ताङ्क (x)	4	8	12	16	20
बारम्बारता (f)	2	3	5	4	1

(ख)

प्राप्ताङ्क (x)	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	4	7	10	8	6	5

(ग)

तौल (कि. ग्रा. मा) (x)	30	31	32	33	34	35
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	5	8	15	14	9	5

(घ)

उचाइ (x)	120	125	130	135	140
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	2	5	8	4	1

(ङ)

ज्याला (x)	80	90	100	110	120	130
कामदार सङ्ख्या (f)	95,	95	10	12	20	15

4. तल दिइएको 45 जना कामदारको दैनिक ज्यालाको आधारमा उनीहरूको औसत दैनिक ज्याला रुपियाँमा पत्ता लगाऊ । (असमूहगत आँकडाको अङ्क गणितीय मध्यकका आधारमा)

   80, 90, 110, 105, 95, 95, 110, 95, 85, 80, 80, 85, 90, 105, 100, 100, 100, 95, 85, 80, 110, 105, 80, 90, 95, 95, 100, 105, 110, 110, 90, 80, 85, 90, 95, 80, 85, 90, 90, 95, 100, 110, 105, 80, 90

Curriculum Development Centre

एकाइ 22

बीजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression)

22.1 बहुपदीयको परिचय तथा वर्गीकरण

(Introduction and Classification of Algebric Expression)

पदका आधारमा बहुपदीयको वर्गीकरण

तलको तालिका अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नमा छलफल गरौँ :

क्र.सं.	एक पदीय	द्विपदीय	त्रिपदीय	बहुपदीय नहुने
1.	$2x$	$2x + 5$	$x^2 - 7x + 6$	$\frac{2x+5}{x^2}$,
2.	xy	$x^2 + y$	$x^2 + y^2 + z^2$	$x^2 + 4\frac{1}{x^3}$
3.	$-y^2z$, x^0	$x + y^3$	$x^4 + 8x^3 + 6x^2$	$x^2 - 7x + \frac{6}{x^2}$

(क) माथि दिइएका सबै गणितीय सङ्केतहरूलाई के भनिन्छ ?

(ख) माथिका पहिलो चार ओटै अभिव्यञ्जकका उदाहरणहरूमा के के समानता र फरक पाउँछौ । $\frac{\sqrt{3}}{x} = x^{-1}$

(ग) एक पदीय अभिव्यजकमा कति ओटा पदहरू छन् ?

(घ) द्विपदीय र त्रिपदीय अभिव्यञ्जकमा कति कति ओटा पदहरू छन् ?

(ङ) बहुपदीयको अभिव्यञ्जकमा कति ओटासम्म पदहरू छन् ?

(च) किन अन्तिमका उदाहरण अभिव्यञ्जक भएनन् होला ?

माथि दिइएका सबै उदाहरणहरूमा सङ्ख्या र चलराशिहरू समावेश भएका छन् । त्यसैले यी सबै बीजीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् । बीजीय अभिव्यञ्जकहरूका पदको सङ्ख्याका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जक एक पदीय तथा बहुपदीय हुन्छन् । बहुपदीय अभिव्यञ्जकहरू पनि द्विपदीय, त्रिपदीय, ... आदि हुन्छन् ।

(छ) माथिको छलफलका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जकको परिचय (अर्थ) र यससँग सम्बन्धित तथ्यहरू पत्ता लगाई लेख र तलका तथ्यहरूसँग तुलना गरी हेर ।

केही महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू

1. चल वा अचल राशिका बिचमा गणितीय क्रियासूचक चिह्नहरू प्रयोग भई गणितीय सङ्केतमा लेखिएका भनाइहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ ।
2. एउटा मात्र पद भएको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई एक पदीय अभिव्यञ्जक (monomial expression) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

3. दुई ओटा मात्र पद भएको अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जक (binomial expression) भनिन्छ । त्यस्तै तिन ओटा पद भएको अभिव्यञ्जकलाई त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (trinomial expression) भनिन्छ ।
4. एक वा एकभन्दा बढी पदहरू भएको बीजीय अभिव्यञ्जकमा चलहरूको घाताङ्क पूर्ण सङ्ख्या भएमा त्यस्तो अभिव्यञ्जकलाई बहुपदीय अभिव्यञ्जक (polynomial expression) भनिन्छ । यसरी बहुपदीयलाई पदका आधारमा एक पदीय, द्विपदीय, तिन पदीय .... गरी वर्गीकरण गर्न सकिन्छ ।
5. बहुपदीय अभिव्यजकहरू पनि दुई पदीय, त्रिपदीय .... आदि हुन्छन् ।

2. डिग्रीका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जकहरू

तलको तालिका अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नमा छलफल गरौँ :

डिग्री 1	डिग्री 2	डिग्री 3	....
$2x$	$4m^2$	$5p^3$	....
$-5y$	$2m+7mn$	$7p^2 + 5p^2q + 9q^2$	....
$\frac{3z}{2}+2$	$3m^2 + 6mn + 4n^2$	$5x^3+7xy^2+\frac{2}{3}y^3$	....

(क) डिग्री 1 मा प्रत्येक पदको चल (x, y र z) को घाताङ्कहरू कति कति छन् ?

(ख) डिग्री 2 मा प्रत्येक पदको चलका घाताङ्कहरू कति कति छन् ?

(ग) 2m + 7mn कसरी 2 डिग्रीको भएको होला ?

(घ) ($7p^2 + 5p^2q + 9q^2$) कसरी डिग्री 3 को बीजीय अभिव्यञ्जक भयो होला ?

- माथि डिग्री 1 मा सबै बीजीय अभिव्यञ्जक $2x$, -5y र $\frac{3z}{2}+2$ का चलराशिहरूका घाताङ्कहरूको मान 1 छ । त्यसैले यिनीहरू डिग्री 1 का बीजीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् ।
- 7mn मा चलहरू m र n को घाताङ्कको योग 1 + 1 = 2 छ । त्यसैले 2m + 7mn डिग्री 2 को बीजीय अभिव्यञ्जक भयो ।
- $7p^2 + 5p^2q + 9q^2$ मा $5p^2q$ पदको डिग्री सबभन्दा बढी = 2 + 1 = 3 छ । त्यसैले यसको डिग्री 3 हुन्छ ।

केही महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू

1. कुनै पनि बीजीय अभिव्यञ्जकका पदहरूका चलराशिहरूको अधिकतम घाताङ्कको मानलाई त्यस अभिव्यञ्जकको डिग्री भनिन्छ ।
2. यदि चलहरू कुनै एउटा पदमा 2 वा 2 भन्दा बढी छन् भने तिनीहरूको घाताङ्कलाई जोडेर डिग्री पत्ता लगाइन्छ ।
3. यदि दुई वा दुईभन्दा बढी पद भएको बीजीय अभिव्यञ्जक छ भने जुन पदको डिग्री सबैभन्दा बढी छ त्यही डिग्री नै सो बीजीय अभिव्यञ्जकको डिग्री हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

तलका दिइएका प्रत्येक बहुपदीयहरू, एक पदीय, द्विपदी वा तिन पदीय के हुन् ? छुट्याएर लेख :

(क) a^3 (ख) $4a^2 + 2a$ (ग) $3x^2 + 7x^2y + 9y^2$

समाधान :

(क) a^3 मा एउटा मात्र पद छ । त्यसैले a^3 एक पदीय अभिव्यञ्जक हो ।

(ख) $4a^2 + 2a$ मा $4a^2$ र $+2a$ गरी दुई ओटा पदहरू छन् । त्यसैले $4a^2 + 2a$ दुई पदीय अभिव्यञ्जक हो ।

(ग) $3x^2 + 7x^2y + 9y^2$ गरी 3 ओटा पदहरू छन् । त्यसैले $3x^2 + 7x^2 + 9y^2$ त्रिपदीय अभिव्यञ्जक हो ।

उदाहरण 2

$5x^3 + 7x^2y^2 + 7y^3$ को डिग्री पत्ता लगाऊ ।

समाधान : $5x^3 + 7x^2y^2 + 7y^3$ मा सबभन्दा धेरै घाताङ्क $(2+2) = 4$ भएको पद $7x^2y^2$ छ । त्यसैले $5x^3 + 7x^2y^2 + 7y^3$ को डिग्री 4 भयो ।

उदाहरण 3

$6x^4y^2 + 8x^2y^5z + 7xy^5$ को डिग्री पत्ता लगाऊ ।

समाधान :

यहाँ प्रत्येक पदको घाताङ्कको जोड निकालौँ ।

$6x^4y^2$ मा घाताङ्कहरूको जोड $= 4 + 2 = 6$

$8x^2y^5z$ मा घाताङ्कहरूको जोड $= 2 + 5 + 1 = 8$

र $7xy^5$ मा घाताङ्कहरूको जोड $= 1 + 5 = 6$

सबभन्दा धेरै घाताङ्को योग 8 भयो । तसर्थ $6x^4y^2 + 8x^2y^5z + 7xy^5$ को डिग्री 8 हुन्छ ।

अभ्यास 22.1

1. तलका अभिव्यञ्जकहरू कुन प्रकारका बहुपदीय हुन् छुट्याऊ र लेख :

   (क) $5x^4 + 7x - 18$ (ख) $-12x^2y^{-2}$ (ग) $x^2 + 6x$

   (घ) $3x + xy - 8y^2$ (ङ) $5x - 4y + 3z$ (च) $\frac{7a^4 - 5}{8x^4}$

   (छ) 5/5 ओटा बहुपदीय भएका र बहुपदीय नभएका अभिव्यञ्जकहरूलेख र साथीसँग छलफल गर ।

2. तल दिइएका बहुपदीयको डिग्री पत्ता लगाऊ :

   (क) $5x^2 + 6x^2y + 7y^2$ (ख) $7x^3 + 8xy^4 + y^2$

   (ग) $a^3y^4 + 3a^5y + y^6$ (घ) $9xy^4 + 10x^6y^2 + y^{12}$

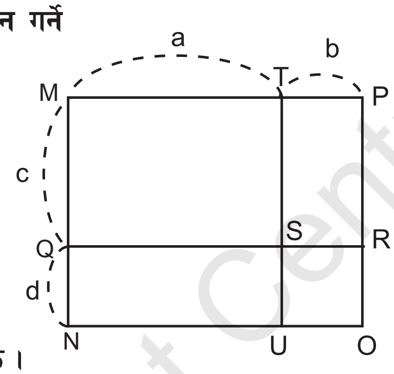
   (ङ) डिग्री 1 देखि डिग्री 5 सम्मका 2/2 ओटा बहुपदीय लेख ।

3. एक/एक ओटा एक पदीय, दुई पदीय, त्रिपदीय अभिव्यञ्जकहरू लेख ।

Curriculum Development Centre

22.2 बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणन (Multiplicaiton of Algebric Expressions)

1. द्विपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले गुणन गर्ने



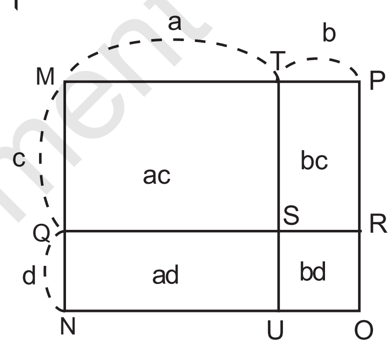
तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) दिइएको चित्रमा MNOP एउटा आयत छ ।
यसको क्षेत्रफल कति होला ?

(ख) आयत MNOP को क्षेत्रफल = (a+b) (c+d) हुन्छ, कसरी ?

(ग) MTSQ को क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

(घ) त्यस्तै TSRP, QNUS र SUOR को क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।



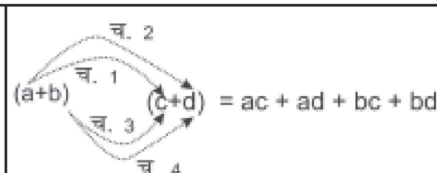
(ङ) यहाँ, आयात MNOP को क्षेत्रफल = 4 ओटा आयतहरू MTSQ, TSRP, QNUS र SUOR को क्षेत्रफलहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ, कसरी ?

अथवा (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd हुन्छ ।

अब, (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd को सम्बन्ध खोजौं ।

यहाँ, (a+b) ले (c+d) लाई गुणन गर्नु भनेको a ले (c+d) लाई र +b ले (c+d) लाई गुणन गर्नु भनेको हो ।

बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणनको प्रक्रियालाई तल प्रस्तुत गरिएको छ :

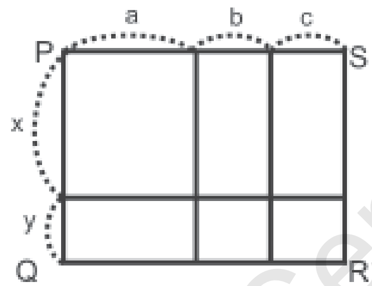
चरण 1 र 2 : a(c+d) = ac + ad **चरण 3 र 4** : +b(c+d) = bc + bd तसर्थ, (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd हुन्छ ।	 तसर्थ, (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd

> दुई पदीय अभिव्यञ्जकले दुई पदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा एउटा अभिव्यञ्जकको प्रत्येक दुई पदले अर्को अभिव्यञ्जकको प्रत्येक पदलाई क्रमशः गुणन गर्दै जानुपर्छ । अनि सबै पदलाई एकै ठाउँमा जम्मा गर्नुपर्छ । यस्तो अवस्थामा गुणनको पद विच्छेदन नियम (distributive law of multiplication) प्रयोग गरिन्छ ।

Curriculum Development Centre

2. त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई द्विपदीय अभिव्यञ्जकले गुणन गर्ने

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गरौँ :



(क) दिइएको आयत PQRS को जम्मा लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ?

(ख) आयत PQRS लाई कति भागमा बाँडिएको छ ?

(ग) प्रत्येक भागको क्षेत्रफल निकाल र प्रत्येक कोठाभित्र लेख ।

(घ) आयत PQRS को क्षेत्रफल कसरी निकालिन्छ ? कति होला ?

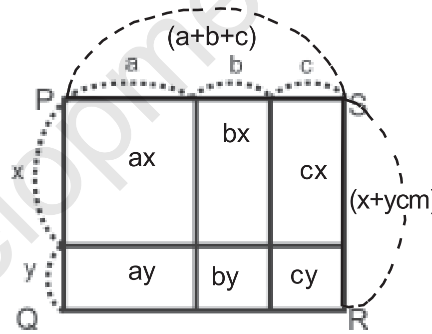
- माथिको आयत PQRS मा लम्बाइ (a+b+c) र चौडाइ (x+y) छ ।
- चित्रबाट आयत PQRS को क्षेत्रफल

  = 6 ओटा कोठाको क्षेत्रफल ax + bx + cx + ay + by + cy हुन्छ ।
- यसरी छलफल गर्दा,

  (x+y) (a + b + c)

  = x(a+b+c) + y(a+b+c)

  = ax + bx + cx + ay + by + cy

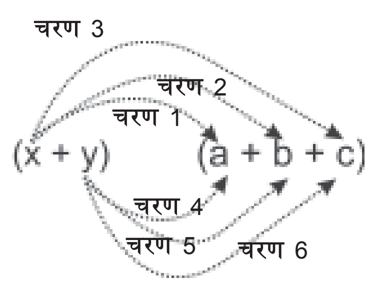


तसर्थ, आयत PQRS को क्षेत्रफल

= (ax + bx + cx + ay + by + cy)cm^2

द्विपदीय अभिव्यञ्जकले त्रिपदीय अभिव्यञ्जकलाई गुणन गर्दा द्विपदीयका प्रत्येक पदले त्रिपदीयको प्रत्येक पदलाई अलग अलग गुणन गरिन्छ । अनि सबै पदहरूलाई एकै ठाउँमा जम्मा पारिन्छ ।

गुणन गर्ने प्रक्रिया

चरण 1, 2 र 3 : x(a+b+c) = ax + bx + cx **चरण 4, 5 र 6 :** y(a+b+c) = ay + by + cy तसर्थ, (x+y) (a+b+c) = ax + bx + cx + ay + by + cy	 तसर्थ, (x + y) (a+b+c) = ax + bx + cx + ay + by + cy

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

गुणन गर : $(2x + 3y)(5x - 2y)$

समाधान

$(2x + 3y)(5x - 2y)$

$= 2x(5x - 2y) + 3y(5x - 2y)$

$= 10x^2 - 4xy + 15xy - 6y^2$

$= 10x^2 + 11xy - 6y^2$

उदाहरण 2

गुणन गर : $(3a - 2b)(6a + 7b - 8c)$

समाधान

$(3a - 2b)(6a + 7b - 8c)$

$= 3a(6a + 7b - 8c) - 2b(6a + 7b - 8c)$

$= 18a^2 + 21ab - 24ac - 12ab - 14b^2 + 16bc$

$= 18a^2 + 21ab - 12ab - 24ac + 16bc - 14b^2$

$= 18a^2 + 9ab - 24ac + 16bc - 14b^2$

उदाहरण 3

एउटा आयतकार नर्सरीको लम्बाइ $(12x - 2y)$m र चौडाइ $(6x - 4y)$m छ भने त्यस नर्सरीको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, आयतको लम्बाइ $(\ell) = (12x - 2y)$m, चौडाइ $(b) = (6x - 4y)$m र क्षेत्रफल $(A) = ?$

सूत्रअनुसार, आयतको क्षेत्रफल $(A) = \ell \times b$

$= (12x - 2y)(6x - 4y)m^2$

$= 12x(6x - 4y) - 2y(6x - 4y)m^2$

$= (72x^2 - 48xy - 12xy + 8y^2)m^2$

$= (72x^2 - 60xy + 8y^2)m^2$

तसर्थ, उक्त नर्सरीको क्षेत्रफल $(72x^2 - 6oxy + 8y^2)m^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा आयतकार कक्षा कोठाको लम्बाइ $(5x + 2y - 5)$ र चौडाइ $(3x - y)$ छ भने त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आयतको लम्बाइ $(l) = (5x + 2y - 5)$, चौडाइ $(b) = (3x - y)$ र क्षेत्रफल $(A) = ?$

Curriculum Development Centre

सूत्रअनुसार, आयतको क्षेत्रफल (A) = $\ell \times b$

$= (3x - y)(5x + 2y - 5)$

$= 3x(5x + 2y - 5) - y(5x + 2y - 5)$

$= 15x^2 + 6xy - 15x - 5xy - 2y^2 + 5y$

$= 15x^2 + 6xy - 5xy - 15x + 5y - 2y^2$

$= 15x^2 + xy - 15x + 5y - 2y^2$

तसर्थ उक्त कक्षा कोठाको क्षेत्रफल $(15x^2 + xy - 15x + 5y - 2y^2)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

अभ्यास 22.2

1. गुणन गर :

(क) $a(3a - 2b)$ (ख) $\frac{2}{3}x(x^2 - y^2)$ (ग) $c(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b)$ (घ) $(2m - 3n) \times 3p$

2. सरल गर :

(क) $5x^2(2x + 3) + 6x(2x - 3)$ (ख) $\frac{1}{2}m(m-3) + 2m(\frac{5}{3}m - 2)$

(ग) $6y - 3(5-y) + 7(3x - y)$ (घ) $p^2(q^2 - r^2) + q^2(r^2 - p^2) + r^2(p^2 - q^2)$

3. गुणन गर :

(क) $(x+y)(x+y)$ (ख) $(p - q)(p-q)$ (ग) $(m+n)(m-n)$

(घ) $(3x + 5y)(3x - 5y)$ (ङ) $(a^2 + b^2)(2a - 3b)$ (च) $(3c - 5d)(5c - 3d)$

(छ) $\left(\frac{k}{3} + \frac{l}{2}\right)\left(\frac{k}{3} - \frac{l}{2}\right)$ (ज) $(2.5a^2 + 5.2b^2)(6.2a^2 + 2.6b^2)$

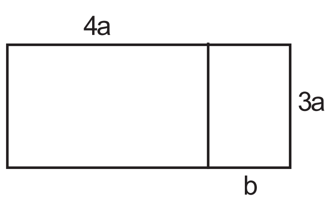
(झ) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (ञ) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4. $(5p + 3)$ र $(3p - 2)$ को गुणन फल निकाल । यदि $p = 2$ भए उक्त गुणन फलको मान कति हुन्छ ?

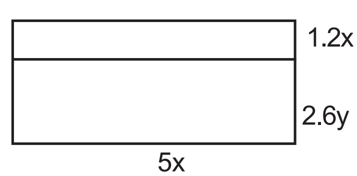
5. $(5a^2 - 4b^2)(2a + 5b)$ को गुणन फल निकाल । यदि $a = 2$ र $b = -3$ भए उक्त गुणन फलको वास्तविक मान कति होला ?

6. तलका प्रत्येक चित्रका आधारमा आयतकार वस्तुको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :

(क)

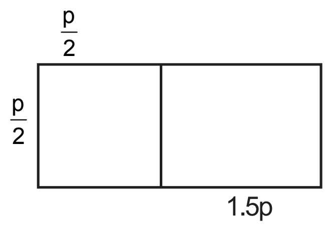


(ख)

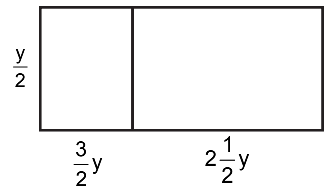


Curriculum Development Centre

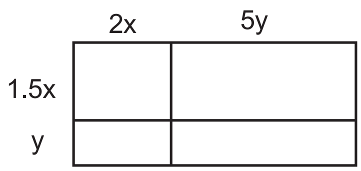
(ग)



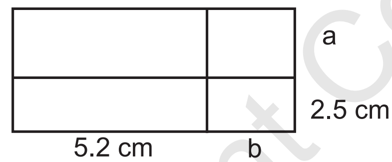
(घ)



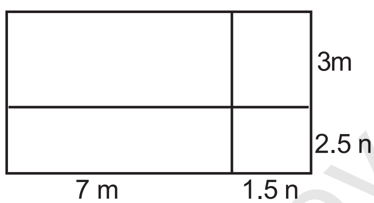
(ङ)



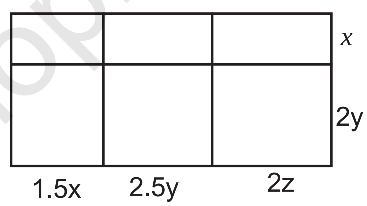
(च)



(छ)



(ज)



7. एउटा आयतकार कोठाको लम्बाइ $(5a + 2b)$m र चौडाइ $(4a - b)$m रहेछ भने

   (क) त्यस कोठाको क्षेत्रफल निकाल ।

   (ख) यदि $a = 3$m र $b = 2$m भए त्यस कोठाको वास्तविक क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

8. एउटा आयतकार करेसाबारीको लम्बाइ $(12a - 3b)$m र चोडाइ $(6a - 2b - 2c)$m छ भने,

   (क) त्यस करेसाबारीको क्षेत्रफल निकाल ।

   (ख) यदि $a = 5$, $b = 2$ र $c = -1$ भए त्यस करेसाबारीको वास्तविक क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

22.3 बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको भाग (Division of Algebraic Expression)

1. दुई पदीय अभिव्यञ्जकले बहुपदीय अभिव्यञ्जकलाई भाग गर्ने

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

एउटा आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल $(a^2 + 5a + 6)$ वर्ग एकाइ र लम्बाइ $(a+3)$ एकाइ रहेछ भने चौडाइ पत्ता लगाउने कोसिस गरौँ ।

(क) माथिको समस्या जनाउने चित्र तयार गरी विचार गरौँ ।

यहाँ दिएअनुसार, क्षेत्रफल $(A) = (a^2 + 6a + 6)$, लम्बाइ $= (a+3)$ र $b = ?$ छ ।

माथिको समस्यामा चौडाइ (b) पत्ता लगाउनु छ । आयतकार वस्तुको क्षेत्रफल $A = l \times b$ अथवा $b = \frac{A}{l}$ हुन्छ । त्यसैले यो समस्या भागसँग सम्बन्धित छ ।	$l = (a+3)$ $b = ?$ $\boxed{A = (a^2 + 5a + 6)}$

(ख) अब, सूत्रअनुसार चौडाइ $(b) = \frac{A}{l} = \frac{a^2 + 5a + 6}{a + 3}$ हुन्छ ।

अथवा $b = (a^2 + 5a + 6) \div (a+3)$ हुन्छ ।

चौडाइ पत्ता लगाउन लम्बाइ $(a+3)$ ले क्षेत्रफल $(a^2 + 5a + 6)$ लाई भाग गर्नुपर्छ ।

(घ) अब चरणअनुसार भाग गर्दै जाऔँ,

$a+2$	**चरणहरू**
$a+3)\overline{a^2 + 5a + 6}$	**चरण 1 :** a ले a^2 लाई कति पटक भाग जाला ?
$\underline{\overset{-}{}a^2 \overset{-}{+} 3a}$	**चरण 2 :** $(a+3) \times a = ?$
$2a + 6$	**चरण 3 :** अब 2a लाई a ले कति पटक भाग जाला ?
$\underline{\overset{-}{}2a \overset{-}{+} 6}$	**चरण 4 :** $(a+3) \times 2 = ?$
0	

अत: उक्त जग्गाको चौडाइ = $(a+2)$ एकाइ हुन्छ ।

(घ) अब जाँचेर हेरौँ :

$(a+3)(a+2) = a(a+2) + 3(a+2) = a^2 + 2a + 3a + 6 = a^2 + 5a + 6$

दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल आयो । त्यसैले हाम्रो भाग गरेको हिसाब मिल्यो ।

(ङ) यदि $a = 15$ मिटर भए उक्त जग्गाको लम्बाइ, चौडाइ र क्षेत्रफल निकाल्ने प्रयास गरौँ ।

लम्बाइ	चौडाइ	क्षेत्रफल
$(a+3)$ $= (15+3)$m $= 18$m	$(a+2)$ $= (15+2)$m $= 17$m	$(a^2 + 5a + 6)$ $= (15^2 + 5 \times 15 + 6)$m $= (225 + 75 + 6)$m $= 306$m

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

$(m^2 - 7m + 12)$ लाई $(m-3)$ ले भाग गर र जाँचेर पनि हेर ।

समाधान

भाग गरेर हेर्दा,

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rl}
 & m - 4 \\
m - 3) & \overline{m^2 - 7m + 12} \\
 & \underline{\underset{-}{m^2}\ \underset{+}{-}\ 3m} \\
 & -4m + 12 \\
 & \underline{\underset{+}{-}4m\ \underset{-}{+}\ 12} \\
 & 0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\text{जाँचेर हेर्दा,} \\
(m-3)(m-4) \\
= m(m-4) - 3(m-4) \\
= m^2 - 4m - 3m + 12 \\
= m^2 - 7m + 12
\end{array}
\end{array}$$

जाँच्दा मिल्यो । त्यसैले भाग गरेको ठिक छ ।

तसर्थ $m^2 - 7m + 12$ लाई $m-3$ ले भाग गर्दा $(m- 4)$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

(क) $(4y^2 - 13y - 21)$ लाई $(y -8)$ ले भाग गर ।

(ख) भागफल र शेष छुट्याएर लेख ।

(ग) समाधानलाई जाँचेर पनि हेर ।

(घ) यदि $(y = 2cm)$ भए $4y^2 - 13y - 21$ को मान निकाल ।

समाधान

(क) भाग गर्दा

$$\begin{array}{rl}
 & 4y + 19 \\
y - 8) & \overline{4y^2 - 13y - 21} \\
 & \underline{\underset{-}{4y^2}\ \underset{+}{-}\ 32y} \\
 & 0 + 19y - 21 \\
 & \underline{\underset{-}{19y}\ \underset{+}{-}\ 152} \\
 & 0 + 131
\end{array}$$

(ख) जाँचेर हेर्दा

$(y - 8)(4y + 19) + 131$

$= y(4y + 19) - 8(4y + 19) + 131$

$= 4y^2 + 19y - 32y - 152 + 131$

$= 4y^2 - 13y - 21$

$4y^2 - 13y - 21$ प्रश्नमा दिइएको भाज्य हो ।

अत: भागफल $= (4y+19)$ र शेष $= 131$

अत: हाम्रो भाग गरेको हिसाब मिलेको छ ।

अब माथिको उदाहरणका आधारमा बीजीय अभिव्यञ्जकको भागमा भाज्य, भाजक, भागफल र शेषको सम्बन्ध पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

भाज्य = (भाजक x भागफल) + शेष

जहाँ, शेषको डिग्री $<$ भाजकको डिग्री हुन्छ ।

(घ) अब $y = 2cm$ मानलाई $(4y^2 - 13y - 21)$ मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$4y^2 - 13y - 21 = (4 \times 2^2 - 13 \times 2 - 21)cm = (4 \times 4 - 26 - 21)cm = (16 - 47)cm = -31cm$

उदाहरण 3

यदि (m+8) जनालाई रु. $(2m^2 + 13m - 24)$ बराबर गरी बाँडियो भने,

(क) प्रत्येकले कति कति रकम पाउलान् ?

(ख) यदि m = Rs 10 भए प्रत्येकले जम्मा कतिका दरले रकम पाएछन् ?

(ग) जम्मा रकम कति रहेछ ?

समाधान

माथि दिइएको समस्या भागको समस्या हो ।

अब भाग गरी हेर्दा

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2m - 3 \\
\cline{2-2}
m+8) & 2m^2 + 13m - 24 \\
 & \underset{-}{2m^2} \underset{-}{+} 16m \\
\cline{2-2}
 & 0 - 3m - 24 \\
 & \underset{+}{-} 3m \underset{+}{-} 24 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

चरणहरू

1. $(m+8) \times 2m = 2m^2 + 16m$
2. $+13m - 16m = -3m$
3. $(m + 8)(-3) = -3m - 24$
4. $(-3m - 24) - (-3m - 24) = 0$

(क) त्यसैले प्रत्येकले रु. $(2m - 3)$ रकम पाउँछन् ।

(ख) यदि m = रु. 10 भए प्रत्येकले पाउने रकम = रु. $(2m - 3)$ = रु. $(2 \times 10 - 3)$ = रु. $(20 - 3)$ = रु. 17 हुन्छ ।

(ग) जम्मा रकम = रु. $(2m^2 + 13m - 24)$ = रु. $(2 \times 10^2 + 13 \times 10 - 24)$

= रु. $(2 \times 100 + 130 - 24)$ = रु. $(200 + 106)$

= रु. 306

Curriculum Development Centre

अभ्यास 22.3

1. भाग गर :

(क) $\frac{10a-15b+30}{5}$ (ख) $\frac{5m^6-3m^5+5m^3}{m^3}$

(ग) $(4x^2 + 12x) \div (2x + 6)$ (घ) $(m^2 + 4m + 4) \div (m+2)$

(ङ) $(a^2 + 7a + 12) \div (a+3)$ (च) $(3m^2 - 5m - 28) \div (3m+7)$

(छ) $(2y^2 + 13y + 15) \div (y + 5)$ (ज) $(16p^2 + 24pq + 9q2) \div (4p + 3q)$

(झ) $(2\ell^3 - 5\ell^2 - 24\ell - 18) \div (2\ell + 3)$

(ञ) माथि दिए जस्तै गरी एक पदीय, द्विपदीय र बहुपदीयले भाग गर्ने 2/2 ओटा समस्याहरू बनाई/खोजी समाधान गर । साथीसँग एक आपसमा साटेर समाधान गरी उत्तर जाँचेर हेर ।

2. एउटा सलाईको एउटा आयतकार सतह क्षेत्रफल $15x^2 + 12x$ वर्ग एकाइ छ । त्यसको एउटा भुजाको लम्बाइ 3x एकाइ भए,

(क) अर्को भुजाको चौडाइ कति होला ?

(ख) यदि x = 5cm भए उक्त सतहको क्षेत्रफल, लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

3. एउटा टेबलको माथिल्लो सतहको चौडाइ $4x - 3y$ र क्षेत्रफल $24x^2y - 18xy^2$ रहेछ भने,

(क) लम्बाइ पत्ता लगाऊ,

(ख) यदि x = 12cm र y = 6cm भए उक्त सतहको क्षेत्रफल, लम्बाइ र चौडाइको वास्तविक मान निकाल ।

4. यदि (x+2) जनालाई रु. $(x^2 + 6x + 8)$ बराबर गरी बाँडियो भने,

(क) प्रत्येकले कति कति रकम पाउलान् ?

(ख) यदि x = रु. 15 भए वास्तविक जम्मा रकम, मानिसको सङ्ख्या र प्रत्येकको भागमा परेको रकम पत्ता लगाऊ ।

5. एउटा आयतकार घडेरीको लम्बाइ (5x + 10)m र क्षेत्रफल $(x^2 - 25x – 70)m^2$ रहेछ भने ।

(क) चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

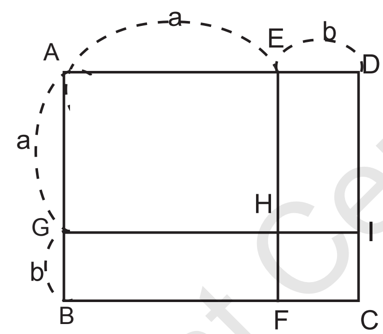
(ख) यदि x = 10m भए उक्त घडेरीको वास्तविक लम्बाइ, चौडाइ र क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

22.4 $(a\pm b)^2$ को ज्यामितीय धारणा र प्रयोग [Geometrical Concept and Application of $(a\pm b)^2$]

1. $(a+b)^2$ को ज्यामितीय धारणा

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :



(क) कुनै एउटा वर्ग ABCD खिचौँ ।

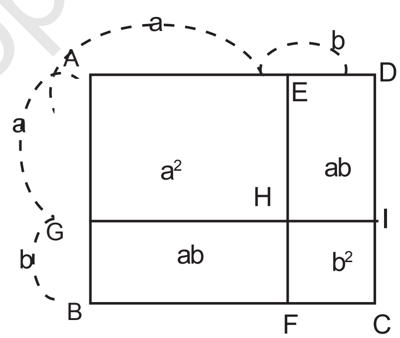
(ख) वर्ग ABCD को लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ? पत्ता लगाऊ ।

(ग) अब प्रत्येक आयत र वर्गको क्षेत्रफल निकालेर चित्रमा भर ।

(घ) अब वर्ग ABCD को जम्मा क्षेत्रफल = $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$ = ?

माथिको चित्रमा वर्ग ABCD का प्रत्येक भुजाको लम्बाइ $(a+b)$ छ । अर्थात् लम्बाइ = $(a+b)$ र चौडाइ = $(a+b)$ नै छ । प्रत्येक भित्री वर्ग र आयतलाई तलको चित्रमा भरेर देखाइएको छ । अत: वर्ग ABCD को क्षेत्रफल

(A) = $(a+b)^2 = (a^2 + ab + ab + b^2) = (a^2 + 2ab + b^2)$ हुन्छ ।



जाँचेर हेरौँ अत: सूत्र $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$= a(a+b) + b(a+b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$ प्रमाणित भयो ।

2. $(a-b)^2$ को ज्यामितीय धारणा

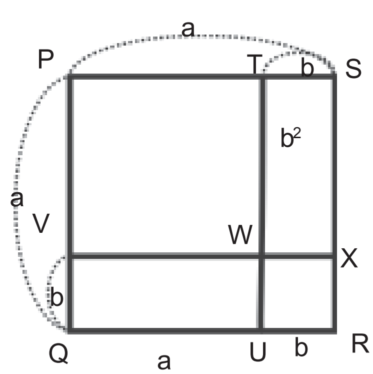
तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) एउटा भुजा a एकाइ भएको वर्ग PQRS खिच ।

(ख) भुजा PS = a मा TS = b तथा भुजा QR मा UR = b हुने गरी काट र अब T र U जोड ।

(ग) त्यस्तै अर्को भुजा PQ = a मा VQ = b हुने गरी काट । त्यस्तै भुजा XR = b हुने गरी काट । अब V र X जोड ।

(घ) TU र VX ले आपसमा काटिएको बिन्दुलाई W नाम देऊ ।



Curriculum Development Centre

(ङ) अब तलका प्रत्येक ज्यामितीय चित्रको नाप पत्ता लगाई चित्रमा भर :

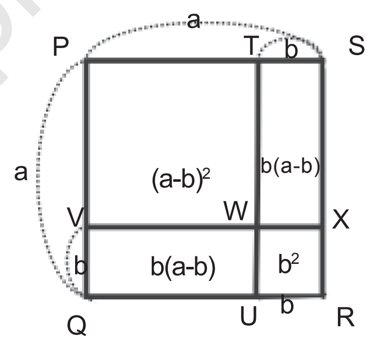
1. PV = ?	2. VW = ?	3. TW = ?	4. PT = ?
5. WU = ?	6. UR = ?	7. WX = ?	8. XR = ?
9. SX = ?	10. QV = ?	11. QU = ?	12. TS = ?
13. वर्ग PVWT = ?	14. आयत TWXS = ?	15. आयत VQUW = ?	
16. वर्ग WURX = ?	17. वर्ग PQRS = ?		

(च) अब $(a-b)^2$ लाई छाया पारेर देखाऊ ।

(छ) $(a-b)^2$ बराबर कति हुन्छ होला ? चित्रका आधारमा पत्ता लगाऊ ।

माथिको चित्रमा PV = VW = TW = PT = (a-b) हुन्छ । वर्ग PVWT को क्षेत्रफल (A) = $(a-b)^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ । त्यसैले आयत TWXS को क्षेत्रफल = b(a-b) वर्ग एकाइ, आयत VQUW को क्षेत्रफल = b(a-b) वर्ग एकाइ र वर्ग WURX को क्षेत्रफल = b^2 वर्ग एकाइ हुन्छ । त्यस्तै वर्ग PQRS को क्षेत्रफल = a^2 वर्ग एकाइ हुन्छ ।

अब, ठुलो वर्ग PQRS = वर्ग PVWT + आयत VQUW + आयत TWXS + वर्ग WURX हुन्छ ।



अथवा $a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b) + b^2$

अथवा, $a^2 = (a-b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2$

अथवा, $a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$

अथवा, $-(a-b)^2 = -a^2 + 2ab - b^2$

अथवा, $(a-b)^2 = -(-a^2 + 2ab - b^2)$

अत: सूत्र : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

अब $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ लाई जाँचेर हेरौँ :

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ प्रमाणित भयो ।

केही महत्त्वपूर्ण सूत्रहरू

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2 + 4ab$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

$(x + 3)$ को वर्ग निकाल :

(क) सूत्र प्रयोग गरेर

(ख) सूत्र प्रयोग नगरिकन

(ग) $(x+3)$ लाई ज्यामितीय चित्रमा देखाऊ ।

(घ) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ प्रमाणित गर ।

समाधान

(क) सूत्र प्रयोग गरेर

$x+ 3$ को वर्ग $= (x+3)^2$

$= x^2 + 2.\,x.3 + 3^2$ [किनकि $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$= x^2 + 6x + 9$

(ख) सूत्र प्रयोग नगरिकन

$(x + 3)$ को वर्ग $= (x+3)\,(x+3)$

$= x(x+3) + 3(x+3)$

$= x^2 + 3x + 3x + 9$

$= x^2 + 6x + 9$

(ग) ज्यामितीय चित्रमा देखाउँदा

$(x+3)^2 = x^2 + x + x + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

अत: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ प्रमाणित भयो ।

	x	1	1	1
	x^2	x	x	x
1	x			
1	x			
1	x			

उदाहरण 2

$(3x - 2y^2)$ को वर्ग निकाल :

समाधान

$(3x - 2y^2)$ को वर्ग $= (3x-2y^2)^2$

$= [(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2y^2 + (2y^2)^2]$

$= 9x^2 - 12xy^2 + 4y^4$

उदाहरण 3

$(a+b+c)$ को वर्ग निकाल :

(क) सूत्र प्रयोग गरेर

(ख) सूत्र प्रयोग नगरिकन

समाधान

(क) $(a+b+c)$ को वर्ग $= (a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$

$= [(a+b)^2 + 2(a+b) \times c + c^2]$

$= [a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2]$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)$

(ख) $(a+b+c)^2 = (a+b+c)\,(a+b+c)$

$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$

$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + b\,c + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 4

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$ को वर्ग निकाल :

समाधान : $x^2-\frac{1}{x}$ को वर्ग $=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2=\left[(x^2)^2-2\times x^2\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]\ =x^4-2x+\frac{1}{x^2}$

उदाहरण 5

यदि $p+\frac{1}{p}=4$ भए मान पत्ता लगाऊ (क) $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2$ (ख) $p^2+\frac{1}{p^2}$

समाधान

(क) $\left(p+\frac{1}{p}\right)$ को वर्ग $=\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=4^2=16$

(ख) $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=p^2+2\times p\times\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}$ $\left[\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2\right]$

अथवा, $4^2=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)+2\times p\times\frac{1}{p}$

अथवा, $\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)+2=16$

अथवा, $p^2+\frac{1}{p^2}=16-2$

अथवा, $p^2+\frac{1}{p^2}=14$

अत : $p^2+\frac{1}{p^2}$ को मान 14 हुन्छ ।

उदाहरण 6

यदि $x-\frac{1}{x}=10$ भए मान पत्ता लगाऊ : (क) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (ख) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

Curriculum Development Centre

समाधान

(क) यहाँ, $x-\frac{1}{x}=10$

अथवा, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=10^2$

अथवा, x^2 - $2x.\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=100$ + 2 = 102

अथवा, $x^2+\frac{1}{x^2}=10^2$

(ख) यहाँ, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ = x^2 + $2x.\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

= $x^2+\frac{1}{x^2}+2$

= 102 + 2

= 104

तसर्थ, $x^2+\frac{1}{x^2}=102$ र

= $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=104$ हुन्छ ।

उदाहरण 7

$\left(x-\frac{1}{x}\right)=5$ भए, प्रमाणित गर : (क) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=27$ (ख) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=29$

समाधान

(क) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left[x^2-2\times x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$

अथवा, $5^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)$

अथवा, $x^2+\frac{1}{x^2}=25+2$

Curriculum Development Centre

अथवा, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 27$ प्रमाणित भयो ।

(ख) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4\times x\times\frac{1}{x}$ $\left[\because (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab\right]$

अथवा, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = (5)^2 + 4$

अथवा, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 25 + 4$

अथवा, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 29$ प्रमाणित भयो ।

$\boxed{\text{उदाहरण 8}}$

सरल गर :

(क) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(ख) $(a-b)^2 - (a+b)^2$

समाधान

(क) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

(ख) $(a-b)^2 - (a + b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2)$

$= -4ab$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 22.4

1. सूत्र प्रयोग गरेर र नगरिकन दुवै तरिकाले वर्ग पत्ता लगाऊ । ज्यामितीय चित्र पनि बनाऊ :

   (क) $(a+1)$ (ख) $(b + 2)$ (ग) $(c-1)$ (घ) $(c - 5)$

   (ङ) $(2p+3q)$ (च) $(6m-5n)$

2. प्रश्न नं. 1 जस्तै गरी $(a+b)^2$ र $(a - b)^2$ रुपका दुई/दुई ओटा समस्या बनाई समाधान गर : साथीसँग आपसमा समाधान गरी उत्तर जाँचेर हेर ।

3. विस्तार गर :

   (क) $(a^2 - 3y)^2$ (ख) $(xy + ab)^2$ (ग) $(p^2q + q^2r)^2$ (घ) $(-5p^4 - 6a)^2$

   (ङ) $\left(m^2 - \frac{1}{m}\right)^2$ (च) $\left(3q^3 + \frac{1}{6q^3}\right)^2$

4. यदि $p + \frac{1}{p} = 7$ भए, मान निकाल :

   (क) $p^2 + \frac{1}{p^2}$ (ख) $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2$

5. यदि $\left(x - \frac{1}{x}\right) = 12$ भए मान निकाल :

   (क) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ख) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

6. सरल गर :

   (क) $(3c + 2d)^2 + (5c - 6d)^2$ (ख) $17(k-5)^2 - 21(k - 5)(k + 6)$

7. गुणन फल निकाल :

   (क) $(g+h)(g^2 - gh + h^2)$ (ख) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (ग) $(\ell - m)(\ell^2 + \ell m + m^2)$

8. यदि $e + \frac{1}{e} = 11$ भए प्रमाणित गर :

   (क) $e^2 + \frac{1}{e^2} = 119$ (ख) $\left(e - \frac{1}{e}\right)^2 = 117$

9. यदि $f - \frac{1}{f} = 15$ भए प्रमाणित गर :

   (क) $f^2 + \frac{1}{f^2} = 227$ (ख) $\left(f + \frac{1}{f}\right)^2 = 229$

Curriculum Development Centre

एकाइ 23 घाताङ्क (Indices)

23.1 घाताङ्कका नियमहरू (Laws of Indices)

1. घात र घाताङ्क

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

तल एउटै गुणन खण्डलाई लगातार गुणन गर्ने तरिका सम्बन्धी ढाँचा दिइएको छ, यसलाई पुरा गर ।

गुणन खण्ड	छोटकरी रूप	पढ्ने तरिका
2 x 2 = 4 (दुई ओटा 2 को गुणन फल)	$2^2 = 4$	2 को घाताङ्क 2
2 x 2 x 2 (तिन ओटा 2 को गुणन फल)	$2^3 = 8$	2 को घाताङ्क 3
2 x 2 x 2 x 2 (4 ओटा 2 को गुणन फल)	$2^4 = 16$	2 को घाताङ्क 4
................(.....................)	... = ...	....
................(.....................)	... = ...	....
2 x 2 x 2 .....(n ओटा 2 को गुणन फल)	$2^n = 2^n$	2 को घाताङ्क 2
a x a x a .....(n ओटा a को गुणन फल)	a^n	a को घाताङ्क n

यहाँ 2^3 मा 2 आधार हो भने 3 घाताङ्क हो ।

त्यस्तै a^n मा a आधार हो भने n घाताङ्क हो ।

यसलाई तल अझ स्पष्टका साथ देखाइएको छ :

2^3 → घाताङ्क, → आधार	a^n → घाताङ्क, → आधार

1. यसरी एउटै सङ्ख्या लगातार धेरै पटक गुणन गर्नुपर्ने क्रियालाई जनाउन घाताङ्क (exponents) को प्रयोग गरिन्छ ।
2. a^n मा a लाई आधार र n लाई घाताङ्क भनिन्छ । त्यस्तै गरी a^n लाई घात (power) भनिन्छ । यहाँ a धनात्मक वा भिन्नात्मक जे हुन पनि सक्छ ।

Curriculum Development Centre

2. घाताङ्कका नियमहरू

नियम 1: एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन : ($a^m \times a^n = a^{m+n}$)

तलको क्रियाकलापको ढाँचा अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्ने तरिकाको ढाँचा दिइएको छ, यसलाई पुरा गर ।

$2^1 \times 2^1 = 4 = 2^2 = 2^{1+1}$	$3^1 \times 3^1 = 9 = 3^2 = 3^{1+1}$
$2^1 \times 2^2 = 8 = 2^3 = 2^{1+2}$	$3^1 \times 3^2 = 27 = 3^{1+2}$
....	....
....	....
$2^1 \times 2^n = 2^{1+n} = 2^{n+1}$	$3^1 \times 3^n = 3^{1+n} = 3^{n+1}$
$a^1 \times a^n = a^{1+n}$	$b^1 \times b^n = b^{1+n} =$ ....
$a^m \times a^n =$	$b^m \times b^n =$ ....

(ख) अब माथिको तालिकाका आधारमा एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्दा बन्ने घाताङ्कको नियम पत्ता लगाऊ । आफ्नो नियमलाई साथीसँग छलफल गर र निष्कर्षलाई तलका नियमसँग दाँजेर हेर :

घाताङ्कको नियम 1 : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ हुन्छ । जहाँ m र n पूर्ण सङ्ख्या हुन् ।
एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ । तर घाताङ्कहरू भने जोडिन्छन् ।

नियम 2: एउटै आधार भएका घातहरूको भाग : ($a^m \div a^n = a^{m-n}$)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्ने तरिकाको ढाँचा दिइएको छ । यसलाई पुरा गर ।

$2^2 \div 2^1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2^1 = 2^{2-1}$	$3^2 \div 3^1 = \frac{3 \times 3}{3} = 3^1 = 3^{2-1}$
$2^3 \div 2^1 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2} = 2^2 = 2^{3-2}$	$3^3 \div 3^1 = \frac{3 \times 3 \times 3}{3} = 3^2 = 3^{3-1}$
....	....
....	....
$2^n \div 2^1 =$	$3^n \div 3^1 =$ ....
$a^n \div a^1 =$	$b^n \div b^1 =$ ....
$a^m \div a^n =$	$b^m \div b^n =$ ....

Curriculum Development Centre

अब माथिको तालिकाको आधारमा एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा बन्ने घाताङ्कको नियम पत्ता लगाऊ ।

घाताङ्कको नियम 2 : $a^m \div a^n = a^{m-n}$ हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$, $m > n$ तथा m र n दुवै धनात्मक सङ्ख्या हुन् । एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ तर अंशको घाताङ्कबाट हरको घाताङ्क घटाइन्छन् ।

नियम 3: शून्य घाताङ्क : ($a^0 = 1$)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल एउटै आधार र शून्य घाताङ्कको ढाँचा दिइएको छ । यसलाई पुरा गर :

$2 \div 2 = \frac{2}{2} = 1 = 2^{1-1} = 2^0$	$3 \div 3 = \frac{3}{3} = 1 = 3^{1-1} = 3^0$
$2^2 \div 2^2 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 1 = 2^{2-2} = 2^0$	$3^2 \div 3^2 = \frac{3 \times 3}{3 \times 3} = 1 = 3^{2-2} = 3^0$
$2^3 \div 2^3 =$	
....	....
....	....
$2^m \div 2^m =$	$3^n \div 3^n =$
$a^m \div a^m =$	$b^n \div b^n =$

$\therefore 3^3 \div 3^3 =$

(ख) अब माथिको तालिकाको आधारमा घाताङ्क शून्य भएका घातको घाताङ्कको नियम पत्ता लगाऊ ।

घाताङ्कको नियम 3 : $a^0 = 1$ हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$ छ । शून्यबाहेक कुनै पनि सङ्ख्याको घाताङ्क शून्य छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ ।

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गरी आफूले पनि समाधान गर्ने प्रयास गर :

उदाहरण 1

तलका लगातार गुणन क्रियालाई घाताङ्कमा व्यक्त गर :

(क) (-4) x (-4) x (-4) x (-4)

(ख) (-5y) x (-5y)x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y)

समाधान

(क) (-4) x (-4) x (-4) x (-4) = $(-4)^4$ = $(4)^4$ [$\because$ - लाई चार पटक गुणन गर्नु भनेको '+' हो ।]

(ख) (-5y) x (-5y)x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) x (-5y) = $(-5y)^9$ = $-(5y)^3$

[- लाई तिन पटक गुणन गर्दा '-' नै हुन्छ ।]

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

गुणनफल निकाल :

(क) $3^5 \times 5^2$ (ख) $(5a)^2 \times (2b)^3$

समाधान

(क) $3^5 \times 5^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5) = 243 \times 25 = 6075$

(ख) $(5a)^2 \times (2b)^3 = (5a \times 5a) \times (2b \times 2b \times 2b) = 25a^2 \times 8b^3 = 200a^2b^3$

उदाहरण 3

9000 लाई 10 को घातको रूपमा व्यक्त गर :

समाधान

यहाँ $9000 = 9 \times 1000 = 9 \times (10)^3 = 9 \times 10^3$

उदाहरण 4

864 लाई रूढ खण्डीकरण गरी घातको रूपमा व्यक्त गर :

समाधान

यहाँ, 864 को रुढ गुणन खण्ड निकाल्दा :

2	864	यहाँ, $864 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
2	432	$= 2^5 \times 3^3$
2	216	
2	108	
2	54	
3	27	
3	9	
	3	

$$\frac{y^9 \times y^5}{y^8}$$

उदाहरण 5

घाताङ्कको नियम प्रयोग गरी सरल गर :

(क) $5q^2 \times 15q^9$ (ख) (ग) $\frac{15b^2 \times 20b^{10}}{55b^{12}}$

समाधान

(क) $5q^2 \times 15q^9 = 75q^{2+9} = 75q^{11}$ $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

Curriculum Development Centre

(ख) [$\because a^m \times a^n = a^{m+n}$]

$= y^6$

(ग) $\frac{15b^2 \times 20b^{10}}{150b^{12}}$ $\left[\because a^m \times a^n = a^{m+n}\right]$

$= 2b^{12-12}$ [$\because a^m \div a^m = a^{m-n}$]

$= 2b^0$

$= 2 \times 1$ [$a^0 = 1$]

$= 2$

उदाहरण 6

मान पत्ता लगाऊ :

(क) यदि $z = 5$ भए $z^5 = ?$

$= \frac{y^9 \times y^5}{y^8} = \frac{y^{9+5}}{y^8} = y^{14-8}$ [$\because a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

(ख) यदि $a = 4$ र $b = 3$ भए $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

(ग) यदि $x = 15$ र $y = 20$ भए $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

समाधान

(क) यहाँ $z^5 = (5)^5 = 3125$

(ख) यहाँ $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{4^2+3^2}{4+3} = \frac{16+9}{7} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$

(ग) यहाँ, $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)}$

$= (x-y)^{2-1}$ [$\because a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= x - y$

$= 15 - 20$

$= -5$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 23.1

1. तलका हिसाबलाई घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गर :

(क) 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 (ख) (-15) x (-15) x (-15) x (-15)

(ग) (3x) x (3x) x (3x) (3x) (घ) (-64) x (-64) x (-64) x (-64) x (-64) x (-64)

2. तलका प्रत्येक घातलाई लगातार गुणन क्रियामा व्यक्त गर :

(क) 6^3 (ख) 3^{15} (ग) $(-6)^8$ (घ) $(2x)^7$ (ङ) $(-2b)^9$

3. तलका प्रत्येक सङ्ख्यालाई 10 को घातमा व्यक्त गर :

(क) 100 (ख) 200 (ग) 5000 (घ) 3,50000 (ङ) 6,90,00,000

4. मान पत्ता लगाऊ :

(क) 2×10^2 (ख) 5×10^5 (ग) $15 \times (-10)^3$ (घ) $18 \times (2^6)$ (ङ) $5 \times (-5)^3$
(च) $2^3 \times 4^2$

5. सानो र ठुलो छुट्याऊ :

(क) 3^2 वा 2^3 (ख) 5^3 वा 3^5 (ग) 3^4 वा 4^3 (घ) 2^{10} वा 10^2 (ङ) 0^{100} वा 100^1
(च) 2^8 वा 10^3

6. रूढ खण्डीकरण गरी घातको रूपमा व्यक्त गर :

(क) 64 (ख) 500 (ग) 1256 (घ) 1728 (ङ) 864000

$$\frac{q^3 \times q^5}{q^3}$$

7. घाताङ्कको नियमहरू प्रयोग गरी सरल गर र घाताङ्कमै उत्तर लेख :

(क) $3^5 \times 3^2$ (ख $5^8 \times 5^4$ (ग) $x^3 \times x^5$ (घ) $a^2 \times a^{(-3)}$ (ङ) $(x)^3 \times (x)^6$

(च) $(-b)^3 \times (-b)^5$ (छ) (ज) $\frac{(5x)^6 \times (5x)^7}{(5x)^{11}}$

8. तलका प्रत्येक अवस्थामा मान पत्ता लगाऊ :

(क) 2^0 (ख) 2×100^0 (ग) $(-5)^0$ (घ) X^0 (ङ) $105y^0$ (च) $\frac{2m^{17} \times m^3}{m^{20}}$

9. मान पत्ता लगाऊ :

(क) यदि y = 3 भए $y^3 = ?$ (ख) यदि $x = 5$ भए $17x^2 = ?$

(ग) यदि a = 10, b = 2 भए $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b} = ?$

(घ) यदि x = 5 र y = 3 $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = ?$ (ङ) यदि $l = 5$ भए $\frac{l^2 \times l^{10} \times l^7}{l^{19}} = ?$

Curriculum Development Centre

एकाइ 24

समीकरण, असमानता र लेखाचित्र

(Equation, Inequality and Line Graph)

24.1 एक चलयुक्त रेखीय समीकरणका समस्या (Problems of linear Equation on in One Variables)

1. एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको परिचय

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) $y + 5 = 7$ मा कति ओटा चल राशि छन् ? कति ओटा अचल राशि छन् ?

(ख) के $y + 5 = 7$ गणितीय खुला वाक्य हो ? कसरी ?

(ग) y को मान कति हुँदा खुला वाक्य $y + 5 = 7$ साँचो वाक्य हुन्छ ?

यहाँ, $y + 5 = 7$ मा एउटा मात्र चल राशि y छ ।(+5) र (+7) अचल राशि हुन् । $y + 5 = 7$ गणितीय खुला वाक्य हो । यसमा y को घाताङ्क 1 छ । $y + 5 = 7$ एउटा समीकरण पनि हो । यस्तो समीकरणलाई एक चलयुक्त रेखीय समीकरण भनिन्छ ।

(घ) माथिको छलफलका आधारमा एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको परिभाषा लेख्न सक्छौ ? लेखेर साथीसँग छलफल गर । निष्कर्षलाई तलको परिभाषासँग दाँजेर हेर :

बराबर चिह्न '=' समावेश भएको, घाताङ्क 1 भएको तथा एउटा मात्र चल राशि भएको समीकरणलाई एक चलयुक्त रेखीय समीकरण भनिन्छ ।

(ङ) $y + 5 = 7$ जस्तै अन्य 5 ओटा एक चलयुक्त रेखीय समीकरण लेखेर देखाऊ ।

2. एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको समाधान

कुनै एउटा एक चलयुक्त समीकरण $y + 5 = 7$ लेऊ ।

(क) y को मान कति हुँदा $y + 5 = 7$ हुन्छ ?

(ख) अब $y + 5 = 7$ बाट y को मान निकाल्ने छोटो तरिका कुन होला ?

यहाँ $y + 5 = 7$ छ ।

अथवा, $(y + 5) - 5 = 7 - 5$ [दुवैतिर 5 घटाउँदा]

अथवा, $y + 5 - 5 = 2$

अथवा, $y + 0 = 2$

अथवा, $y = 2$

जाँचेर हेर्दा,

y को मान 1, 2, 3, 4, 5 राख्दै जाऔँ ।

$y + 5 = 7$

$1 + 5 = 7$ मान्य भएन ।

$\boxed{2 + 5 = 7 \quad \text{मान्य भयो ।}}$

$3 + 5 = 7$ मान्य भएन ।

जाँचेर हेर्दा,

$y + 5 = 7$

अथवा $2 + 5 = 7$

अथवा $7 = 7$ प्रमाणित भयो ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

हल गर र उत्तर जाँचेर हेर : $17x - 5 = 15$

समाधान

हल गर्दा	जाँचेर हेर्दा
$17x - 5 = 19$ अथवा $(17x - 5) + 5 = 19 + 5$ [दुवै तिर 5 जोड्दा] अथवा, $17x - 5 + 5 = 34$ अथवा $17x = 34$ अथवा $\frac{17x}{17} = \frac{34}{17}$ [दुवैतिर 17 ले भाग गर्दा] अथवा $x = 2$	$17x - 5 = 29$ अथवा, $17 \times 2 - 5 = 29$ अथवा, $34 - 5 = 29$ अथवा, $29 = 29$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

तलको समस्या हल गर र उत्तर जाँचेर हेर :

$$17k - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

समाधान

हल गर्दा	जाँचेर हेर्दा
$17k - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ अथवा, $17 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ [दुवैतिर $\frac{3}{5}$ जोड्दा] अथवा, $17k = \frac{25+9}{15}$ अथवा, $\frac{17k}{17} = \frac{34}{15x17}$ [दुवैतिर 17 ले भाग गर्दा] $k = \frac{2}{15}$	$17k - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ अथवा, $17 \times \frac{2}{15} - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ अथवा, $\frac{34-9}{15} = \frac{5}{3}$ अथवा, अथवा, $\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ प्रमाणित भयो ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 3 हल गर र जाँचेर हेर : $10n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{2}{3}$

हल गर्दा	जाँचेर हेर्दा
समाधान : $10n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{2}{3}$	$10n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}$
अथवा, $10n-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}n+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ [दुवैतिर $\frac{1}{4}$ जोड्दा]	अथवा, $10\times\frac{11}{114}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{11}{114}+\frac{2}{3}$
अथवा, $10n=\frac{n}{2}+\frac{8+3}{12}$	अथवा, $\frac{220-57}{228}=\frac{11+152}{228}$
अथवा, $\frac{10n}{1}-\frac{n}{2}=(\frac{n}{2}+\frac{11}{12})-\frac{n}{2}$ [दुवैतिर $\frac{n}{2}$ घटाउँदा]	अथवा, $\frac{163}{228}=\frac{163}{228}$
अथवा, $\frac{20n-n}{2}=\frac{11}{12}$	प्रमाणित भयो ।
अथवा, $\frac{19n}{2}\times\frac{2}{19}=\frac{11}{12}\times\frac{2}{19}$	
अथवा, $n=\frac{11}{6x19}=\frac{11}{114}$	

उदाहरण 4

एउटा विद्यालयको कक्षा 7 मा जम्मा 27 विद्यार्थी रहेछन् । यदि छात्राको सङ्ख्या छात्रको भन्दा 3 ले बढी रहेछ भने,

(क) विद्यार्थी सङ्ख्या जनाउने एउटा समीकरण लेख ।

(ख) छात्र र छात्राको वास्तविक सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, मानौं छात्रको सङ्ख्या = x छ ।

त्यसैले छात्राको सङ्ख्या = $x + 3$

(क) अब, छात्र + छात्रा = जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या

अथवा $x + (x+3) = 27$

अथवा $x + x + 3 = 27$

अथवा, $2x + 3 = 27$ दिइएको समीकरण हो ।

Curriculum Development Centre

(ख) $2x + 3 = 27$ लाई हल गर्दा,

अथवा, $2x + 3 - 3 = 27 - 3$ [दुवैतिर 3 घटाउँदा]

अथवा, $2x = 24$

अथवा, $\frac{2x}{2} = \frac{24}{2}$ [दुवैतिर 2 ले भाग गर्दा]

अथवा, $x = 12$

त्यसैले छात्र सङ्ख्या = 12 जना

छात्राको सङ्ख्या = $x + 3 = 12 + 3 = 15$ जना

उदाहरण 5

एउटा आयतको चौडाइ लम्बाइ भन्दा 5 cm ले कम छ । यदि परिमिति 30cm भए,

(क) सो आयतको लम्बाइ र चौडाइ जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) सो आयतको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ग) सो आयतको क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान :

(क) यहाँ आयतको लम्वाइ (l) = x cm (मानौँ)

त्यसैले चौडाइ (b) = $x - 5$ हुन्छ ।

परिमिति (p) = 30 cm छ ।

अब सूत्र $p = 2(l + b)$ अनुसार

अथवा $2\{x + (x - 5)\} = 30$

अथवा $2(x + x - 5) = 30$ अथवा, $2(2x - 5) = 30$

अथवा, $4x - 10 = 30$

अथवा, $2x - 5 = 30$ चाहिएको समीकरण हो ।

(ख) $4x - 10 = 30$ लाई हल गर्दा,

अथवा $4x - 10 = 30$

अथवा, $4x-10+10 = 30+10$ [दुवैतिर 10 जोड्दा]

अथवा, $4x = 40$

अथवा $\frac{4x}{4} = \frac{40}{4}$ [दुवैतिर 4 ले भाग गर्दा]

अथवा, $x = 10$cm

त्यसैले लम्बाइ (l) = x = 10 cm

अब चौडाइ (b) = $(x - 5) = (10 - 5)$ cm = 5 cm

(ग) क्षेत्रफल (A) = ?

सूत्रअनुसार, आयतनको क्षेत्रफल (A) = ℓ x b

$$= (10\ cm) \times (5\ cm) = 50\ cm^2$$

उदाहरण 6

दुई ओटा क्रमैसँग आउने पूर्ण सङ्ख्याहरूको योगफल 21 छ भने ती दुई सङ्ख्याहरू कुन कुन रहेछन् ? पत्ता लगाऊ ।

समाधान

मानौँ, एउटा सङ्ख्या = x भए अर्को सङ्ख्या = $x + 1$ हुन्छ ।

दिएअनुसार $x + (x+1) = 21$

अथवा $2x + 1 = 21$

अथवा $2x = 21 - 1$

अथवा $x = \frac{20}{2}$

अथवा $x = 10$

अब, एउटा सङ्ख्या, $x = 10$

अर्को सङ्ख्या = $x+1 = 10+1 = 11$

तसर्थ ती दुई सङ्ख्याहरू 10 र 11 हुन् ।

उदाहरण 7

आइते तामाङ उसको बाबुभन्दा 22 वर्षले कान्छो छ । 5 वर्ष पहिले बाबुको उमेर उसको उमेरभन्दा दोब्बर थियो । अब उसको हालको उमेर पत्ता लगाऊ ।

समाधान

मानौँ, आइतेको हालको उमेर = x वर्ष छ ।

त्यसैले बाबुको उमेर = $x + 22$ वर्ष हुन्छ ।

5 वर्ष पहिले आइतेको उमेर = $(x - 5)$ वर्ष

5 वर्ष पहिले बाबुको उमेर = $x + 22 - 5 = x + 17$ वर्ष

अत: $2(x-5) = 1(x+17)$

अथवा, $2x - 10 = x + 17$

अथवा, $x = 27$ वर्ष

तसर्थ, आइतेको हालको उमेर = 27 वर्ष

बाबुको उमेर = $x + 22 = 27+22 = 49$ वर्ष

Curriculum Development Centre

अभ्यास 24.1

1. तलका समीकरणहरु बराबरी तथ्य प्रयोग गरी हल गर । उत्तर पनि जाँचेर देखाऊ :

(क) $a + 3 = 15$ (ख) $x - 7 = 78$ (ग) $7m = 8m + 6$

(घ) $- 8x = 2x - 4$ (ङ) $\frac{3}{5}y = 6 + 7y$ (च) $1.2 + 6\ell = -2.1\ell - 1.2$

(छ) $5.4x - 1 = \frac{x}{3} + 7.5$

2. हल गर र उत्तर पनि जाँचेर देखाऊ :

(क) $5 (p - 10) = 10 + 7p$ (ख) $(10 - k) 6 = -8k - 10$

(ग) $4 . 3 - 3 (4 r - 3) = 0 . 7 (6 r - 10)$

(घ) $\frac{2}{3}(3 - 5t) = \frac{6}{2}(-2 - t)$

3. तलका भनाइहरू सत्य वा असत्य के हुन्, छुट्याऊ :

(क) $x + 5 = 4$ मा x चल राशि हो ।

(ख) $x - 2 = 5$ मा 5 र 2 चल राशिहरू हुन् ।

(ग) $y + 10 = 0$ दुई चलयुक्त समीकरण हो ।

(घ) $- 2 + p = 3$ एक चलयुक्त खुला वाक्य हो ।

4. तलका प्रश्नहरूको जवाफ लेख :

(क) बराबर चिह्न प्रयोग भएको र एउटा मात्र चल राशि भएको समीकरणलाई के भनिन्छ ?

(ख) एक चलयुक्त समीकरणको अर्थ उदाहरणसहित लेख ।

(ग) $a + 2 = 10$ मा a को घाताङ्क कति हुन्छ ?

(घ) $b + 5 = 9$ साँचो वाक्य हुनका लागि b बराबर कति हुनुपर्ला ?

5. एउटा कक्षामा 28 जना विद्यार्थी रहेछन् । छात्राको सङ्ख्या छात्रको भन्दा 4 ले बढी रहेछ भने,

(क) सबै विद्यार्थीलाई जनाउने एउटा समीकरण लेख ।

(ख) समीकरण हल गरी छात्र छात्राको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

6. एउटा विद्यालयमा जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या 555 जना छन् । यदि छात्रको सङ्ख्या छात्राको भन्दा 55 ले बढी भए छात्र र छात्राको वास्तविक सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

7. एउटा घरको आयताकार आँगनको लम्बाइ, चौडाइभन्दा 2m ले बढी छ । यदि पुरा परिमिति 132m भए,

(क) सो आँगनको चल राशि प्रयोग गरी नमुना चित्र बनाऊ ।

(ख) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ग) सो आँगनको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(घ) सोही आँगनको क्षेत्रफल पनि पत्ता लगाऊ ।

8. एउटा क्षेत्रफल $200m^2$ भएको पार्टी प्यालेसको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर रहेछ भने,

(क) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ख) परिमिति जनाउने चल राशि प्रयोग भएको नमूना चित्र बनाऊ ।

(ग) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(घ) परिमिति निकाल ।

9. एउटा विद्यालयमा अनुसन्धानको क्रममा एक दिनको हाजिरी अभिलेख हेरिएछ, जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याको दुई तिहाई विद्यार्थी मात्र उपस्थित हुँदा 6 जना मात्र गयल भएका रहेछन् भने,

(क) जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) उपस्थित भएका विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

10. दुई ओटा क्रमैसँग आउने पूर्ण सङ्ख्याहरुको योगफल 51 छ भने,

(क) ती सङ्ख्या जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) ती सङ्ख्याहरू कति कति होलान् ?

11. पेम्बाले आफ्नो जन्म दिनमा साथीलाई बाँड्न दुई प्याकेट चकलेट किनेछन् । एउटा प्याकेटमा जति चकलेट छन्, त्यसको तेब्बर अर्को प्याकेटमा छन् । दुवै प्याकेटका चकलेट एकै ठाउमा जम्मा पार्दा 120 चकलेट भएछन् भने,

(क) जम्मा चकलेट जनाउने समीकरण बनाऊ ।

(ख) प्रत्येक प्याकेटमा कति कति चकलेट रहेछन् ।

12. एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याको तेब्बर छ । यदि दुवैको योगफल 48 भए,

(क) दुवै सङ्ख्याको योगफल जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) ती दुई सङ्ख्या कति कति होलान् ?

13. एउटा आयतकार रुमालको चौडाइ, लम्बाइभन्दा 10cm कम रहेछ । यदि परिमिति 110cm भए,

(क) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

14. माथि प्रश्न नं. 1 देखि 7 सम्म दिइए जस्तै एउटा/एउटा समस्या बनाऊ । साथीहरूसँग छलफल गरी समाधान गर ।

Curriculum Development Centre

24.2 असमानतालाई सङ्ख्या रेखामा देखाउने

(Representation of Inequality in Number)

तलको क्रियाकलाप हेर र छलफल गर :

(क) **यदि a र b दुई ओटा पूर्णाङ्क हुन् भने a र b बिचमा के के गणितीय सम्बन्ध हुन सक्छ ?**

कि त a र b बराबर हुन्छ कि त a र b बराबर हुँदैन । a र b बराबर हुँदैन भने कि त $a > b$ हुन्छ कि $a < b$ हुन्छ । कुनै पूर्णाङ्क 3 लिऔँ, अब भन त 3 भन्दा ठुला कति सङ्ख्या हुन सक्छन् ?

$4 > 3$, $5 > 3$

$6 \ngtr 3$, $10 > 3$

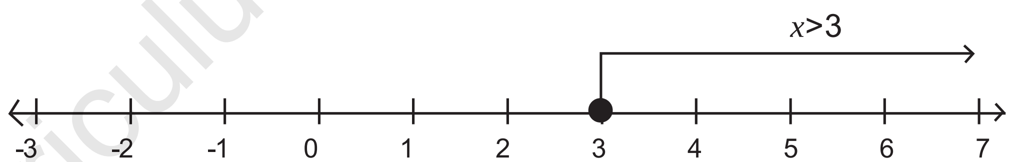
$x > 3$

(ख) **$x > 3$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :**

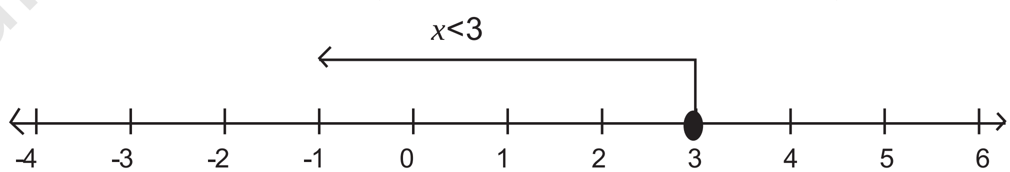
3 भन्दा ठुला सङ्ख्यालाई x ले किन जनाइए होला ? x चल राशि भएको र 3 भन्दा ठुला धेरै सङ्ख्या भएकाले $x > 3$ लेखिएको हो । यहाँ $x > 3$ मा 3 भन्दा ठुला सङ्ख्याहरू मात्र पर्ने भएकाले 3 मा थोप्लो (O) मात्र लगाइएको छ ।

(ग) **$x > 3$ र $x < 3$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।**

यहाँ $x > 3$ भनेको x चल राशी 3 वा 3 भन्दा ठुलो छ भन्ने बुझाउँछ । त्यस्तै, $x < 3$ भनेको x चल राशी 3 वा 3 भन्दा सानो भन्ने बुझाउँछ । तलको सङ्ख्या रेखामा हेरौँ ।



$x > 3$ मा 3 पनि पर्ने भएकाले सङ्ख्या रेखाको 3 लाई गोलो थोप्ला लगाई रङ्गाइएको हो ।



$x < 3$ मा 3 पनि पर्ने भएकाले सङ्ख्या रेखामा 3 लाई गोलो थोप्ला लगाई रङ्गाइएको हो ।

Curriculum Development Centre

महत्वपूर्ण तथ्यहरू

(क) यदि a र b दुई ओटा पूर्णाङ्क हुन् र जसमा $a > b$ र c अर्को पूर्णाङ्क हो भने -

जोड तथ्य : $(a + c) > (b + c)$

घटाउ तथ्य : $(a - c) > (b - c)$

गुणन तथ्य : $ac > bc$ जहाँ c धनात्मक छ ।

भाग तथ्य : $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, $c \neq 0$ जहाँ c धनात्मक छ ।

$ac < bc$ जहाँ c ऋणात्मक छ ।

$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ $c \neq 0$ जहाँ c ऋणात्मक छ ।

(ट्रिकोटोमी (trichotomy)को < वा > चिह्न समावेश भएको गणितीय वाक्यको दुवैतिर ऋणात्मक पूर्णाङ्कले गुणन वा भाग गर्दा वाक्यमा भएका चिह्नहरू (< वा >) बदलिन्छन् ।)

(ख) यदि दुई ओटा पूर्णाङ्क a र b मा $a = b$ छ र अर्को कुनै पूर्णाङ्क c छ भने -

$(a + c) = (b + c)$ (बराबरी योग तथ्य)

$(a - c) = (b - c)$ (बराबरी घटाउ तथ्य)

$ac = bc$ (बराबरी गुणन तथ्य)

$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ जहाँ $c \neq 0$ (बराबरी भाग तथ्य)

उदाहरण 1

$x + 1 > 3$ लाई हल गरी सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :

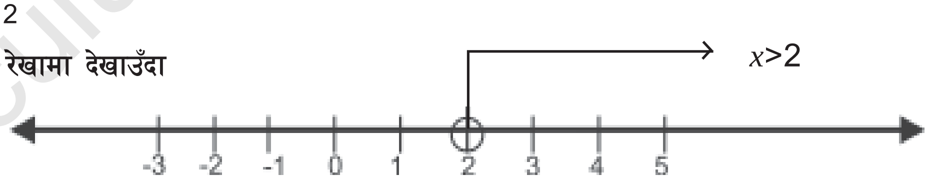
समाधान

यहाँ $x + 1 > 3$ छ। अब दुवैतिर 1 लाई घटाउँदा,

$x + 1 - 1 > 3 - 1$

or, $x > 2$

सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा



उदाहरण 2

$2x - 3 < -7$ लाई हल गर र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ :

समाधान

यहाँ, $2x - 3 < -7$ छ । (दुवैतिर +3 जोड्दा)

Curriculum Development Centre

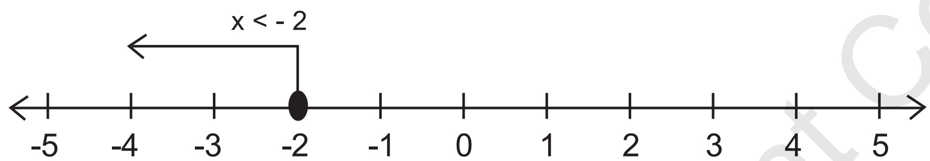
अथवा, $2x\ 3 + 3 < -7 + 3$

अथाव, $2x \leq 4$

अथवा, $x < -\frac{4}{2}$

अथवा, $x < -2$

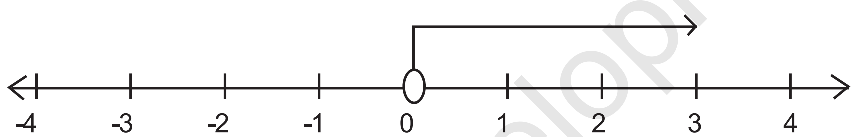
अब, सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा



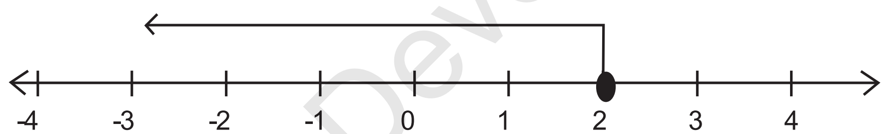
उदाहरण 3

तल दिइएको सङ्ख्या रेखाका आधारमा असमानता लेख :

(क)

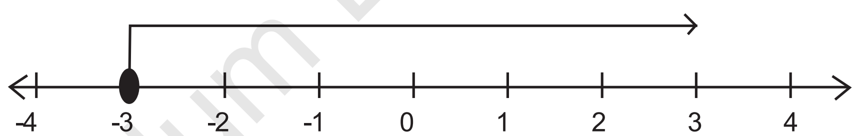


(ख)



$-\frac{2}{2}$

(ग)



समाधान

यहाँ (क) मा 0 मा मात्र गोलो लगाइएको छ तर गोलो नरङ्गाइएकाले 0 त्यस असमानतामा पर्दैन । अब यस सङ्ख्या रेखामा 0 भन्दा दायाँतिर Arrow दिइएकाले 0 भन्दा ठुला सङ्ख्या पर्दछन् । त्यसैले यसलाई असमानता चिह्न प्रयोग गर्दा $x>0$ लेखिन्छ ।

यहाँ (ख) मा 2 मा गोलो लगाई रङ्गाइकाले 2 पनि असमानतामा पर्छ । 2 भन्दा बायाँतिर Arrow लगाइएकाले 2 र 2 भन्दा साना सङ्ख्याहरू त्यस असमानतामा पर्दछन् ।

त्यसैले $x< 2$ हुन्छ ।

त्यस्तै (ग) मा -3 मा गोलो लगाई रङ्गाइकाले -3 र -3 भन्दा ठुला सङ्ख्याहरू त्यस असमानतामा पर्दछन् ।

त्यसैले $x > -3$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 24.2

1. तलका प्रत्येक असमानतालाई छुट्टाछुट्टै सङ्ख्या रेखा बनाई सङ्ख्या रेखामा रङ लगाई देखाऊ :

   (क) $x>1$ (ख) $x<-2$ (ग) $x > 5$ (घ) $x < -4$ (ङ) $x + 5 > -1$

   (च) $x - 3 < 6$ (छ) $2x + 5 > -1$ (ज) $5x + 3 < 18$ (झ) $3x + 2 > x + 6$

   (ञ) $2x-5 > - x + 10$

2. तल दिइएका ट्रिकोटोमी **(trichotomy)** का नियमअनुसार तलका भनाइहरू ठिक वा बेठिक के हुन्, छुट्याऊ :

   2, 3 र -4 पूर्णाङ्कहरू हुन् भने,

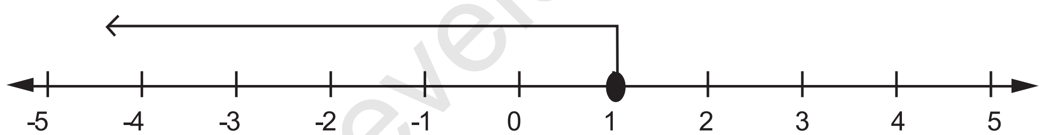
   (क) $2 + (-4) = 3 + (-4)$ (ख) $2x (-4) = 3x (-4)$ (ग) $2 + (-4) > 3 + (-4)$

   (घ) $2 + (-4) < 3 + (-4)$ (ङ) $2-(-4)>3-(-4)$ (च) $2x(-4) > 3x(-4)$

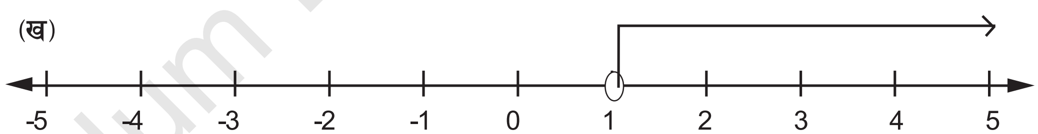
   (छ) $2x(-4) < 3x(-4)$ (ज) $2÷(-4) > 3÷ (-4)$

3. तल दिइएका सङ्ख्या रेखाका आधारमा असमानता लेख :

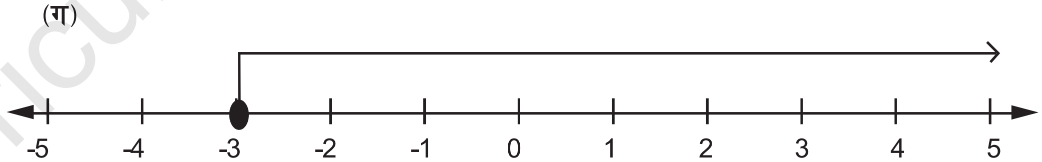
(क)



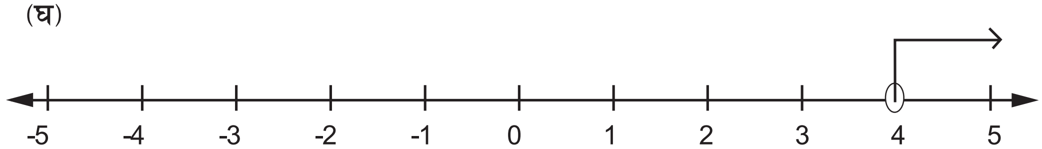
(ख)



(ग)



(घ)



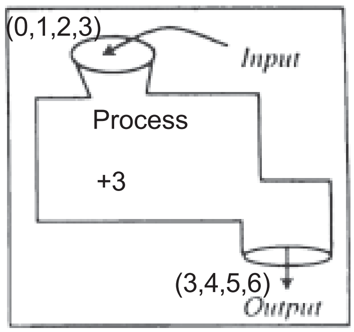
Curriculum Development Centre

24.3 फलन यन्त्रबाट दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणमा चल राशिको सम्बन्ध

(Relation of Simultaneous Equaiton in Two Variables from Function Machine)

तलका क्रियाकलापहरू अध्ययन गरी छलफल गर :

(क) तल दिइएको मेसिनमा 0 राख्दा मेसिनले +3 बनाएर निकाल्यो । त्यस्तै 1, 2, 3 राख्दा क्रमश: 4, 5, 6



निकाल्यो । यहाँ Input = {0.1, 2, 3} र Output = {3, 4, 5, 6} हुन्छ ।

यहाँ के प्रक्रियाले गर्दा मेसिनले Inputs (0, 1, 2, 3) लाई Outputs (3, 4, 5, 6) बनाए होला ?

यहाँ, मेसिनले गरेको कार्य हेरौँ :

0+3 = 3

1+3 = 4

2+3 = 5

3+3 = 6

सबै Input मा 3 जोड्दा output आउँछ । यही जोड्ने क्रियालाई मेसिनको प्रक्रिया भनिन्छ । मेसिनमा राखेको अङ्कलाई लगानी (input) भनिन्छ । मेसिनले दिइएको अङ्कलाई उत्पादन (output) भनिन्छ ।

माथिको क्रियाकलापमा (input) लाई x ले जनाउने हो भने उत्पादन (output) लाई y ले जनाऔँ ।

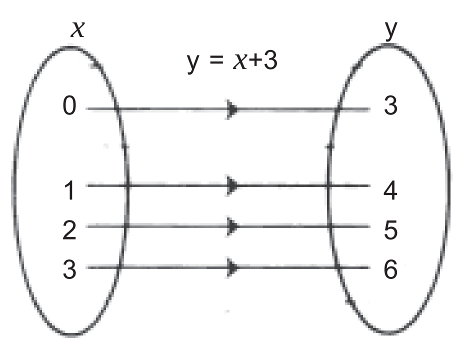
अब दुई चलयुक्त समीकरण

अब, $y = x + 3$ हुन्छ, जहाँ x र y दुवै चल राशी हुन् ।

माथिको क्रियाकलापलाई तालिका बनाएर पनि देखाउन सकिन्छ । जस्तै :

x	0	1	2	3
y	3	4	5	6

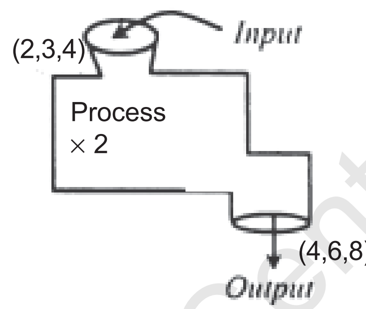
त्यस्तै माथिको क्रियाकलापलाई Arrow चिह्न दिएर दुई समूह input लाई x र output लाई y बनाएर पनि देखाउन सकिन्छ । जस्तै :



Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

चित्रमा देखाइएको फलन यन्त्रमा output के हुन्छ ?



समाधान

यहाँ, Input मा 2, 3, 4 छन् ।

मेसिनले 2 गुणा वा x 2 बनाएर output दिन्छ ।

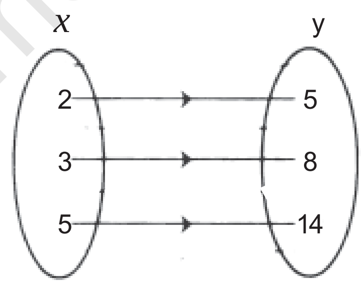
2 लाई 2 ले गुणा गर्दा 4 हुन्छ । त्यसैले 2 को output 4 हुन्छ ।

4 को output 4x2 = 8 हुन्छ । अत: output हरू 4, 6, 8 हुन् ।

उदाहरण 2

तल दिइएको Arrow चित्रबाट फलन यन्त्रको प्रक्रियालाई x र y को सम्बन्धको रूपमा लेख ।

समाधान : यहाँ, Input 2 दिँदा output 5 बन्यो ।



त्यस्तै Input 3 गर्दा output 8 बन्यो

यिनीहरूबिचको सम्बन्ध हेरौँ,

5 = 2 x 3 - 1

8 = 3 x 3 -1

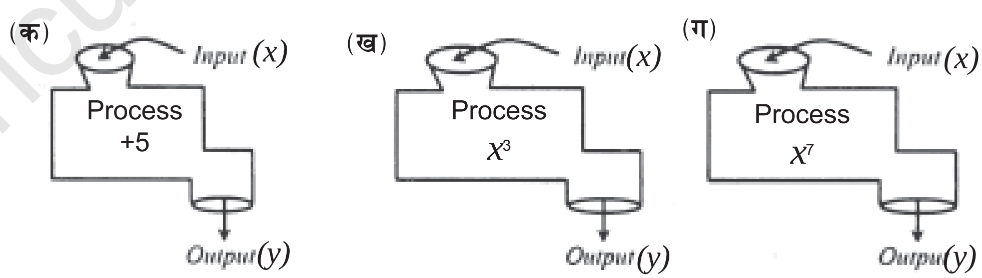
14 = 5 x 3 - 1

सबै Input हरूलाई 3 ले गुणन गरेर 1 घटाइएको छ ।

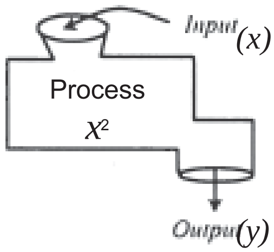
त्यसैले, y =3x - 1 हुन्छ ।

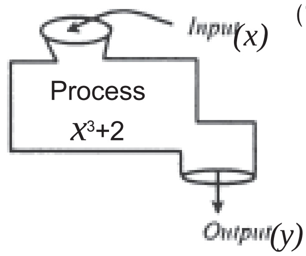
अभ्यास 24.3

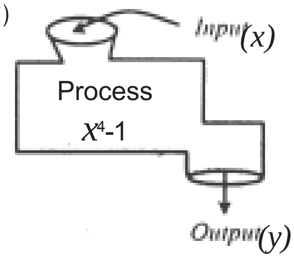
1. **तलका प्रत्येक फलन यन्त्रमा 1 देखि 5 सम्मका सङ्ख्याहरू राख्दा आउने प्रतिफल** (output) **लाई तालिका बनाई व्यक्त गर :**



Curriculum Development Centre

(घ)


(ङ)


(च)


2. प्रश्न नं. 1 मा Input गरेको सङ्ख्यालाई x र प्रतिफल (output) लाई y मानेर x र y बिचको सम्बन्ध गणितीय भाषामा लेखेर देखाऊ ।

3. प्रश्न नं. 1 को सम्बन्धलाई Arrow चित्र खिचेर देखाऊ ।

4. **Input र output को आधारमा खाली ठाउँमा मिल्ने सङ्ख्या राख :**

(क)

Inputs	1	2	3	4	5	8	10	15
Outputs	3	4	5	6	?	?	12	?

(ख)

Inputs	2	3	4	6	9	12
Outputs	0	1	2	?	?	10

(ग)

Inputs	4	5	6	1	2	3	9	10
Outputs	8	10	12	?	?	?	18	?

(घ)

Inputs	2	3	4	6	5	7
Outputs	7	10	13	?	?	?

(ङ)

Inputs	1	2	3	?	5	?	7	8
Outputs	4	8	12	16	20	24	28	?

5. **दिइएको सम्बन्धमा 1 देखि 5 सम्मका सङ्ख्या Input (x) गरी आउने output (y) पत्ता लगाऊ :**

(क) $y = x + 1$ (ख) $y = x + 4$ (ग) $y = x + 7$ (घ) $y = 3x$ (ङ) $y = 4x$

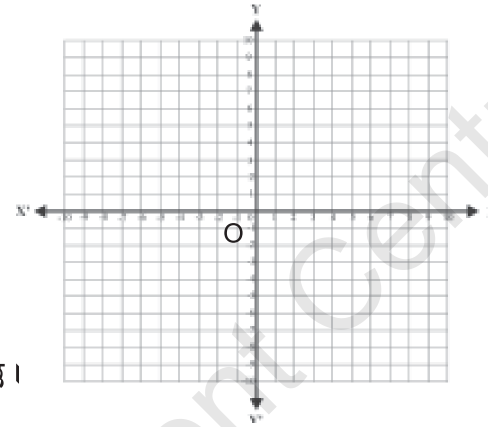
(च) $y = 2x + 3$ (छ) $y = 4x + 1$ (ज) $y = 5x - 2$

Curriculum Development Centre

24.4 दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको लेखाचित्र
(Graph of Simultaneous Equation in Two Variables.)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

1. चतुर्थांशहरू (Qudrants)



दिइएको चित्रमा XOX' र YOY' आपसमा लम्ब हुने गरी O बिन्दुमा काटिएका छन् ।

XOX' लाई X- अक्ष भनिन्छ भने YOY' लाई Y- अक्ष भनिन्छ । XOX' र YOY' काटिएको बिन्दु O लाई उद्गम बिन्दु भनिन्छ ।
XX' र YY' ले आपसमा बाँड्दा चार ओटा चतुर्थांशहरू बन्छ ।

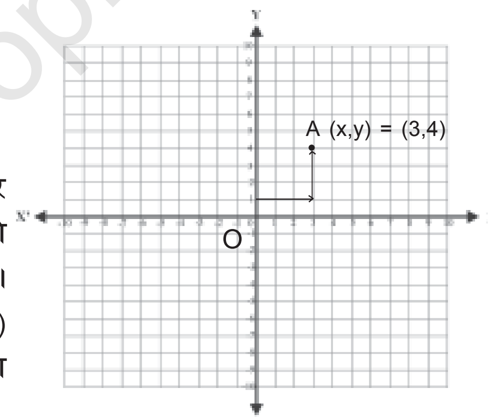
XOY लाई पहिलो चतुर्थांश भनिन्छ ।

X'OY लाई दोस्रो चतुर्थांश भनिन्छ ।

X'OY' लाई तेस्रो चतुर्थांश भनिन्छ ।

Y'OX लाई चौथो चतुर्थांश भनिन्छ ।

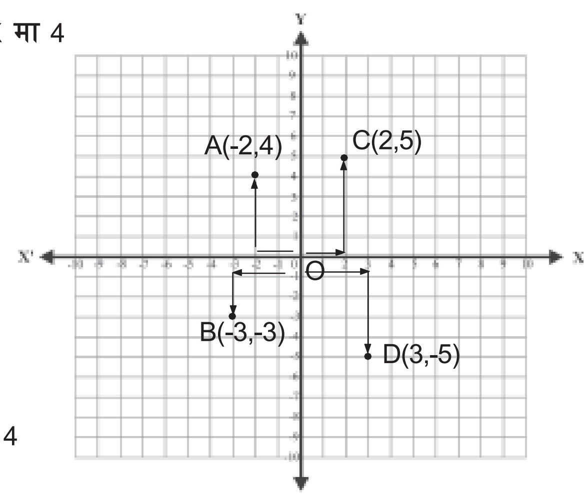
2. क्रमजोडा (Orderd of Pairs)



बिन्दु (3,4) लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,

उद्गम बिन्दुबाट X- अक्ष तिर तेस्रो दुरी र Y- अक्षतिर ठाडो दुरी जनाउने कुनै बिन्दु A को जोडीलाई A(x,y) को रूपमा देखिन्छ । A(x,y) लाई क्रमजोडा भनिन्छ । जस्तै : बिन्दु A उद्गम बिन्दुबाट X- अक्षको दायाँ (+3) एकाइ र Y- अक्षको ठाडो रेखामा (+4) एकाइ दुरीमा पर्छन् भने यसलाई A(3,4) लेखिन्छ ।

OX मा 3 एकाइ उद्गम बिन्दुबाट दायाँ र OX मा 4 एकाइ ठाडो लम्ब हुने रेखा OY को बिन्दु नै हामीलाई चाहिएको बिन्दु हो ।



उदाहरण 1

बिन्दुहरू (2,5), (-2, 4), (-3,-3) र (3,-5) लाई लेखाचित्रमा देखाऊ :

माथिको लेखाचित्रमा,

(क) (-2, 4) लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा
OX' -2 एकाइ बायाँमा जाऊ र त्यहींबाट 4

Curriculum Development Centre

एकाइ ठाडो OY सँग समानान्तर बनाई जाऊ । त्यस बिन्दुलाई A नाम देऊ ।

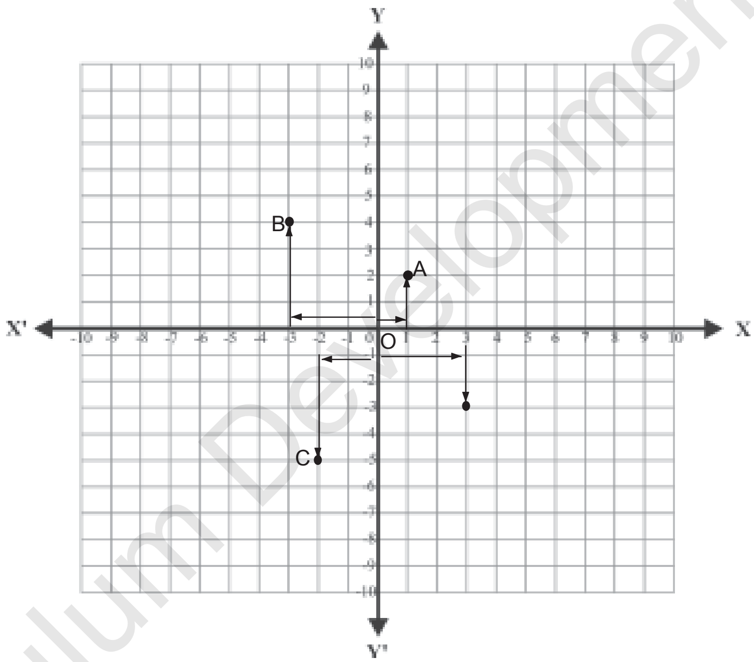
(ख) (-3, -3) मा पनि -3 एकाइ बायाँ OX' मा जाऊ । त्यसपछि -3 एकाइ तल जाऊ । त्यस बिन्दुलाई B नाम देऊ ।

(ग) बिन्दु (2,5) मा पनि 2 एकाइ उद्गम बिन्दुबाट दायाँ OX तिर जाऊ । 5 एकाइ ठाडो जाऊ र त्यस बिन्दुलाई C नाम देऊ ।

(घ) बिन्दु (3, -5) मा पनि 3 एकाइ उद्गम बिन्दुबाट दायाँ OX तिर जाऊ । -5 एकाइ तल OY' तिर जाऊ र त्यस बिन्दुलाई D नाम देऊ ।

उदाहरण 2

लेखाचित्रमा दिइएको बिन्दुहरू A, B, C र D को निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ :



(क) उद्गम बिन्दु O बाट XX' को दायाँ बिन्दु A सम्मको दुरी 1 एकाइ र उद्गम बिन्दुबाट बिन्दु A को YY' को ठाडो रेखासम्मको दुरी 2 एकाइ छ । त्यसैले बिन्दु A को निर्देशाङ्क A(x,y) = A(1,2) हुन्छ ।

(ख) 'क' मा जस्तै गरी बिन्दु B को निर्देशाङ्क B(x,y) = B(-3, 4) हुन्छ ।

(ग) त्यसै गरी C बिन्दुको निर्देशाङ्क C(x,y) = C(-2,-5) हुन्छ ।

(घ) त्यसै गरी बिन्दु D को निर्देशाङ्क D(x,y) = D(3,-3) हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

3. दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणको लेखाचित्र

(Graph of Simultaneous Equation in Two Variables)

तलको क्रियाकलाप अध्ययन गरी छलफल गर :

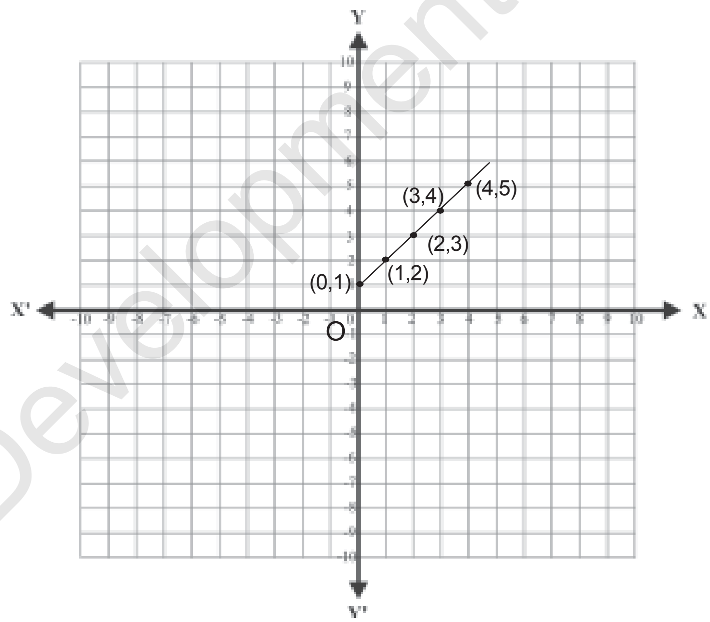
मानौं कुनै दुई चलयुक्त समीकरण $y = x + 1$ छ ।

(क) यसबाट x र y का मानहरूको तालिका बनाऊ :

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

यहाँ x को सदस्यमा 1 जोड्दा y को सदस्य आउँछ ।

समूह x मा जुनसुकै अङ्क राख्न सकिन्छ तर x को समूह नै दिइएको छ भने त्यही समूहका सदस्य मात्र राख्नुपर्छ । त्यसैले समूह y का सदस्य समूह x मा भएका सदस्यमा निर्भर गर्दछन् ।



अत: समुह X का सदस्यलाई स्वतन्त्र चल राशि (independent variables) र समूह Y का सदस्यलाई पराधीन चल राशि (dependent variables) भनिन्छ ।

अब, $y = x + 1$ सम्बन्धमा, x को मान 0 राख्दा y को मान 1 हुन्छ ।

यहाँ, y को मान 1 हुन पहिला x को मान 0 हुनुपर्छ । अन्यथा y को मान 1 हुन सक्दैनन् ।

माथिको तालिकाबाट बनेका क्रमजोडाहरू क्रमश: लेख : (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) हुन् ।

(ख) माथिका क्रमजोडालाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरेर देखाऊ ।

उदाहरण 3

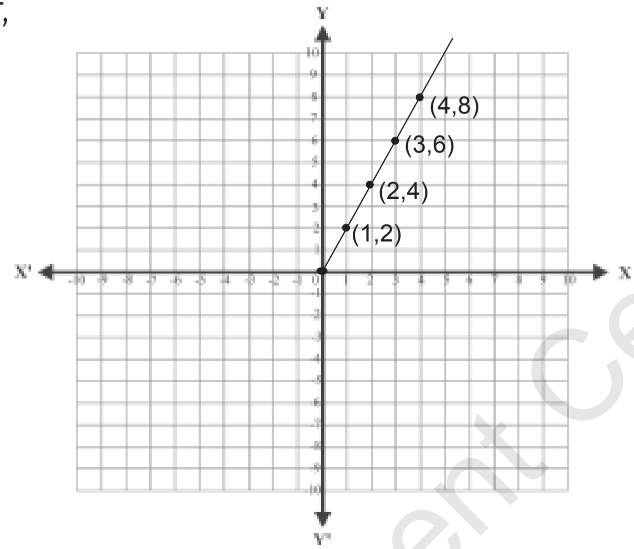
$y = 2x$ सम्बन्धलाई input (x) 0 देखि 4 सम्म राखी output (y) निकाल्दा बन्ने क्रमजोडालाई लेखाचित्रमा देखाऊ ।

समाधान यहाँ y= 2x लाई तालिका बनाऊ :

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

Curriculum Development Centre

उक्त तालिकालाई लेखाचित्रमा देखाउँदा,



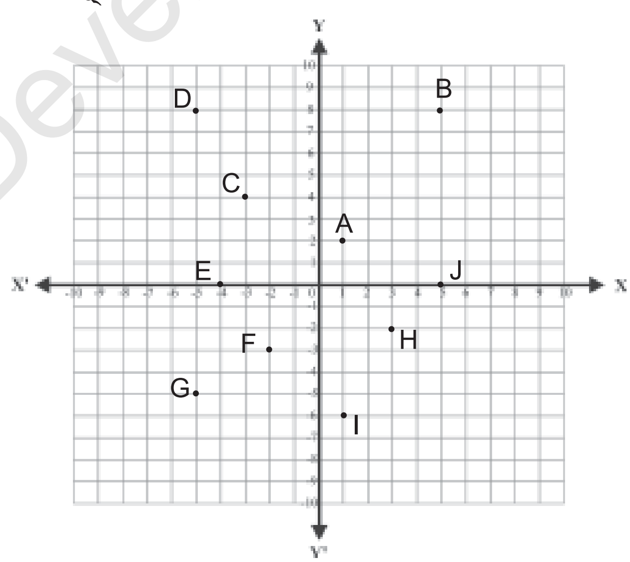
अभ्यास 24.4

1. **तलका बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा देखाऊ :**

(क) A(3,2) (ख) B(-2,3) (ग) C(-5,2) (घ) D(-3,-4) (ङ) E(-6,-1)

(च) F(0,6) (छ) G(-5,0) (ज) H(5,-2) (झ) I(4,1) (ञ) J(6,-6)

2. **तल लेखाचित्रमा दिइएका बिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ :**



3. **तलका सम्बन्धमा input (x) 0 देखि 5 सम्म राखी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर :**

(क) $y = x + 3$ (ख) $y = x - 2$ (ग) $y = 2x$ (घ) $y = 3x$

(ङ) $y = 2x + 1$ (च) $y = 3x - 1$ (छ) $y = 2x - 3$ (ज) $y = 2x + 3$

(झ) $y = x + 8$ (ञ) $y = 4x - 1$

Curriculum Development Centre