

गणित

कक्षा ९



नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

गणित

कक्षा ९

लेखकहरू
कविता लुईटेल
कृष्ण गोसाईं
नरहरि आचार्य
रमेशप्रसाद अवस्थी

नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

ISBN: 978-9937-601-33-7

© प्रकाशकमा

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०७३

मुद्रक : जनक शिक्षा सामग्री केन्द्र लिमिटेड
सानोठिमी, भक्तपुर

पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट अभिलेखबद्ध गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्य पुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिइदै आएको छ । विद्यार्थीमा राष्ट्र, राष्ट्रिय एकता र लोकतान्त्रिक संस्कारको भावना पैदा गराई नैतिकवान्, अनुशासित र स्वावलम्बी, सिर्जनशील, चिन्तनशील भई समावेशी समाज निर्माणमा योगदान दिन सक्ने, भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण, स्वास्थ्य र जनसङ्ख्या सम्बन्धी ज्ञान र जीवनोपयोगी सिपको विकास गराउनु जरुरी छ । उनीहरूमा कला र सौन्दर्य, मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श र वैशिष्ट्यहरूको संरक्षण तथा संवर्धनप्रतिको भाव जगाउन आवश्यक छ । समतामूलक समाजको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, अपाङ्गता, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रप्रति समभाव जगाउनु र मानव अधिकार तथा सामाजिक मूल्य मान्यताप्रति सचेत भई जिम्मेवारीपूर्ण आचरणको विकास गराउनु पनि आजको आवश्यकता बनेको छ । माध्यमिक शिक्षा पाठ्यक्रम (कक्षा ९-१०), २०७१ लाई मूल आधार मानी शिक्षा सम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तर्क्रियाका निष्कर्ष र विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषणसमेतलाई समेटि यो पाठ्य पुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्य पुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक श्री दिवाकर ढुङ्गेल, प्रा.डा. मीनबहादुर श्रेष्ठ, प्रा.डा. लेखनाथ शर्मा, वैकुण्ठ खनाल, डम्बरध्वज आङदेम्बे, वरुण वैद्य, विजय बानियाँ, गोमा श्रेष्ठलगायतका महानुभावको विशेष योगदान रहेको छ । यसको विषय वस्तु सम्पादन हरीश पन्त र भाषा सम्पादन चिनाकुमारी निरौला तथा टाइप सेटिङ र लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । यस पाठ्य पुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्य पुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । यस पाठ्य पुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । पाठ्य पुस्तकलाई अभै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.सं. २०७३

विषय सूची

पाठ	शीर्षक	पृष्ठ सङ्ख्या
1.	समूह	1-10
2.	नाफा र नोक्सान	11-17
3.	कमिसन तथा कर	18-34
4.	घरायसी अङ्क गणित	35-47
5.	क्षेत्रफल	48-62
6.	ठोस वस्तुहरू	63-75
7.	बीजीय अभिव्यञ्जकहरू	76-80
8.	घाताङ्क	81-86
9.	अनुपात र समानुपात	87-95
10.	रेखीय समीकरण	96-102
11.	वर्ग समीकरण	103-109
12.	त्रिभुज	110-127
13.	समानान्तर चतुर्भुज	128-141
14.	रचना	142-151
15.	समरूपता	152-158
16.	वृत्त	159-165
17.	त्रिकोणमिति	166-178
18.	तथ्याङ्क शास्त्र	179-201
19.	सम्भाव्यता	202-210
	उत्तर माला	212-220

पाठ

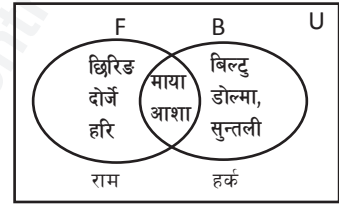
1

समूह (Sets)

1.0 पुनरावलोकन

दिइएको चित्र एउटा विद्यालयको वार्षिक दिवसको अवसरमा खेलकुदमा भाग लिने विद्यार्थीहरूको समूह हो। चित्र अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस्।

- (क) समूहमा जम्मा कति सदस्य छन् ? ती को को हुन् ?
(ख) समूह F बाट कति ओटा उपसमूहहरू बनाउन सकिन्छ ?
(ग) समूह B मा जम्मा कति सदस्य छन् ?
(घ) दुवै समूहका साझा सदस्य को को हुन् ?
(ङ) समूह F र B मध्ये कुनैमा पनि नपर्ने सदस्यहरू कुन कुन हुन् ?
(च) दिइएको भेन चित्रमा जम्मा कति जना सदस्य छन् ?



माथिका प्रश्नहरूमा छलफल गरिएका मध्ये फुटबल खेल्ने सदस्यहरू छिरिड, दोर्जे, हरि, माया र आशा हुन्। यसलाई सूचीकरण तरिकाले लेख्दा $F = \{\text{छिरिड, दोर्जे, हरि, माया, आशा}\}$ र बास्केट बल खेल्ने सदस्यहरूलाई व्यवस्थित सूचीकरण विधिले लेख्दा $B = \{\text{बिल्टु, डोल्मा, सुन्तली, माया, आशा}\}$ हुन्छ।

यसरी फुटबल र बास्केट बलमा भाग लिने व्यक्तिको टिमलाई क्रमशः अङ्ग्रेजी वर्णमालाका ठुला अक्षर 'F' र 'B' ले जनाइन्छ।

यसरी निश्चित गुण र विशेषताका आधारमा स्पष्टसँग परिभाषित गर्न सकिने वस्तुहरूको सङ्कलनलाई नै समूह (sets) भनिन्छ।

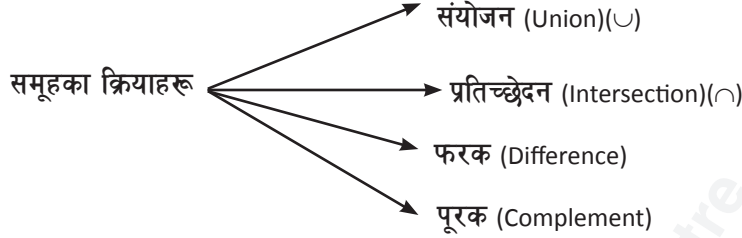
माथि दिइएको भेन चित्रमा समूह F र B मा भएका बाहेकका सदस्यहरू राम र हर्क हुन्। यसरी चित्रमा भएका सबै सदस्यहरू रहेको समूहलाई सर्वव्यापक समूह (universal set) भनिन्छ। यसलाई U ले जनाइन्छ। F र B का सबै सदस्यहरू U का पनि सदस्यहरू हुन्। त्यसैले F र B सर्वव्यापक समूह U का उपयुक्त उपसमूह (proper subsets) हुन्।

यसरी सम्पूर्ण उपसमूह जुन समूहबाट बनेका छन् त्यही समूहलाई ती उपसमूहहरूको सर्वव्यापक समूह (Universal set) भनिन्छ। सर्वव्यापक समूहबाट बन्न सक्ने समूहहरूलाई उपसमूह भनिन्छ।

समूह सम्बन्धी अवधारणालाई आधारभूत सिद्धान्तको रूपमा विकास गर्ने व्यक्ति उन्नाइसौं शताब्दीका जर्मन गणितज्ञ George Cantor (1844 - 1918) हुन्। यसलाई चित्रद्वारा सरलीकरण गर्ने व्यक्ति गणितज्ञ John Euler Venn हुन्। उनकै नामबाट यी चित्रहरूलाई भेन चित्र (Venn diagram) भनिएको हो। समूहको अवधारणा, समूहको सम्बन्ध, समूहका क्रियालाई भेन चित्रको प्रयोगबाट सरल तरिकाले समाधान गर्न सकिन्छ।

1.1 समूहका क्रियाहरू (Set Operations)

अब हामी समूहमा हुने निम्नानुसारका क्रियाहरूका बारेमा अध्ययन गर्दछौं :



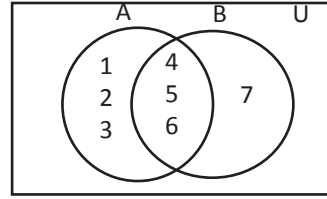
1.1.1 समूहका संयोजन (Union of sets)

दुई समूहहरू A र B को संयोजन एउटा त्यस्तो समूह हो जसमा A र B का सबै सदस्यहरू पर्दछन्। संयोजनलाई गणितीय चिह्न \cup ले जनाइन्छ।

यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ र $B = \{4, 5, 6, 7\}$ भए,

A र B को संयोजनमा 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 पर्दछन्।

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ हुन्छ।



चित्रमा (A) लाई छाया पारेर देखाउनुहोस्।

यहाँ, 4, 5, 6 सदस्यहरू समूह A र B दुवैमा पर्दछन्। त्यसैले ती साभ्ना सदस्यहरूलाई समूह निर्माण सङ्केत विधिअनुसार

$A \cup B = \{x: x \in A \text{ अथवा } x \in B\}$ लेखिन्छ।

यदि $A \subset B$ भए $A \cup B = B$ हुन्छ।

चित्रमा $A \subset B$ छ, त्यसैले $B = A \cup B$ हुन्छ।

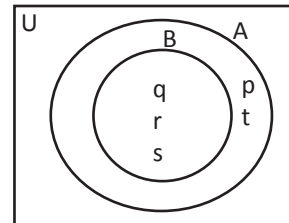
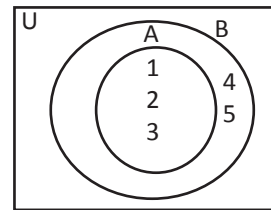
के यसलाई छाया पारेर देखाउन सकिन्छ ?

त्यस्तै यदि $B \subset A$ भए $A \cup B = A$ हुन्छ।

साथै $A \cup U = U$ हुन्छ।

प्रत्येक समूह त्यसको सर्वव्यापी समूहको उपसमूह हुन्छ।

चित्रमा, $B \subset A$ छ त्यसैले $A \cup B = A$ हुन्छ।



1.1.2 समूहको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets)

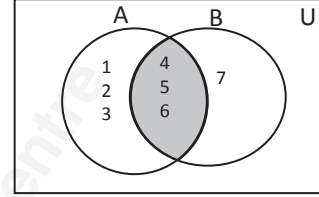
दुई समूहहरू A र B को प्रतिच्छेदन एउटा त्यस्तो समूह हो, जसमा दुवै समूहका साझा सदस्यहरू रहन्छन्। दुई समूहको प्रतिच्छेदनलाई $A \cap B$ ले जनाइन्छ। जस्तै : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ र $B = \{4, 5, 6, 7\}$ भए $A \cap B = \{4, 5, 6\}$ हुन्छ। (चित्रमा छाया परेको भागले दुवैका साझा सदस्यहरूको समूहलाई सङ्केत गर्दछ।)

प्रतिच्छेदनलाई समूह निर्माण सङ्केत विधिअनुसार

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ र } x \in B\} \text{ लेखिन्छ।}$$

यदि $A \subset B$ भए

$A \cap B = A$ हुन्छ। साथै $A \cap U = A$ हुन्छ, किनभने प्रत्येक समूह त्यसको सर्वव्यापी समूहको उपसमूह हुन्छ।



1.1.3 समूहको फरक (Difference of Sets)

दुई ओटा समूहहरू A र B को फरक भन्नाले समूह A मा मात्र भएका तर B मा नभएका सदस्यहरूको समूहलाई जनाउँछ। यसलाई $A - B$ ले जनाइन्छ।

जस्तै : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ र

$$B = \{4, 5, 6, 7\}$$

दुई ओटा समूहहरू छन् भने $A - B = \{1, 2, 3\}$ हुन्छ।

चित्रमा $(A - B)$ लाई छाया पारी देखाउनुहोस्।

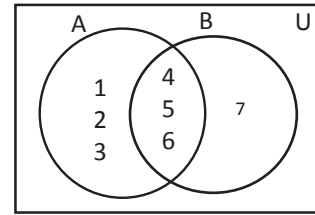
चित्रमा हेरेर $(A - B)$ लाई अर्को तरिकाले लेख्दा,

$A - B = A - (A \cap B) = \{1, 2, 3\}$ हुन्छ। त्यस्तै, $B - A = \{7\} = B - A \cap B$ हुन्छ।

यदि $A - B$ र $B - A$ को संयोजन लिने हो भने पनि यसबाट अर्को समूह बन्छ। यसरी बन्ने समूहलाई सममितीय फरक (symmetric difference) भनिन्छ। यसलाई $A \Delta B$ ले जनाइन्छ।

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ हुन्छ।}$$

$$= \{1, 2, 3\} \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 7\}$$



1.1.4 समूहको पूरक (Complement of a Set)

समूह A मा नपर्ने तर सर्वव्यापी समूहमा पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई A को पूरक समूह भनिन्छ। A को पूरकलाई \bar{A} ले जनाइन्छ। U मा पर्ने A मा नपर्ने हुनाले यसलाई $\bar{A} = U - A$ पनि लेखिन्छ।

जस्तै : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ र $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

भए, $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\} = U - A$ हुन्छ ।

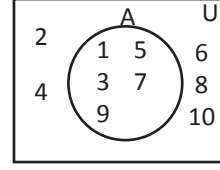
समूह निर्माण सङ्केत विधिअनुसार

$\overline{A} = \{x: x \in U, x \notin A\}$ हुन्छ ।

चित्रमा, \overline{A} लाई छाया पारेर देखाउनुहोस् ।

जहाँ A मा नपर्ने सर्वव्यापी समूह U का सदस्यहरू रहेका छन् ।

भेन चित्र अवलोकन गरेर $U = \overline{A} \cup A$ र $\overline{A} \cap A = \emptyset$ हुन्छ भन्न सकिन्छ ।



उदाहरण 1

यदि $U = \{x: x=1 \text{ देखि } 20 \text{ सम्मका धनात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरू}\}$

$A = \{x: x \geq 6\}$, $B = \{x: x \leq 8\}$

$C = \{x: 10 < x < 15\} = \{10 \text{ र } 15 \text{ बिचका पूर्ण सङ्ख्याहरू}\}$

छन् भने निम्न क्रियाहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $B \cup C$ (iv) $A - B$ (v) $\overline{A \cup B}$

समाधान,

यहाँ $U = \{x: x ; 1 \text{ देखि } 20 \text{ सम्मका धनात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरू}\}$
 $= \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

$A = \{x: x \geq 6\} = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\}$

$B = \{x: x \leq 8\} = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$

$C = \{x: 10 < x < 15\} = \{11, 12, 13, 14\}$

अब, (i) $A \cup B = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\} \cup \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$,

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 20\} = \{x: 1 \leq x \leq 20\}$,

(ii) $A \cap B = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\} \cap \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$,

$= \{6, 7, 8\} = \{x: 6 \leq x \leq 8\}$

(iii) $B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\} \cup \{11, 12, 13, 14\}$

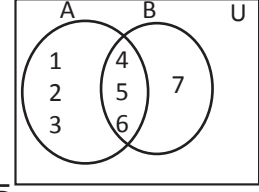
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14\}$

(iv) $A - B = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\} - \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\} = \{9, 10, 11, \dots, 19, 20\}$

(v) $\overline{A \cup B} = U - (A \cup B) = \{1, 2, 3, \dots, 20\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 19, 20\}$
 $= \emptyset$

अभ्यास 1.1

1. दिइएको भेन चित्रका आधारमा तलका प्रत्येक समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् एवम् प्रत्येक सम्बन्ध र क्रियाहरू पत्ता लगाई छुट्टाछुट्टै छाया पारी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



- (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $\overline{A \cup B}$ (iv) $\overline{A \cap B}$
 (v) $\overline{A \cup B}$ (vi) $A - B$ (vii) $U - \overline{A}$ (viii) $U - \overline{B}$
2. यदि $U = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \}$
 $A = \{ a, c, d, f \}$, $B = \{ g, h, i \}$ र $C = \{ e, i \}$ भए
- (क) निम्न समूहहरू निर्माण गर्नुहोस् :
- (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $\overline{A \cup B}$ (iv) $\overline{A \cap B}$
- (ख) प्रश्न नं. (क) मा बनाइएका समूहहरूमध्ये कुन कुन बराबर समूह हुन्छन् ? किन ?
- (ग) निम्न समूहहरू निर्माण गरी भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :
- (i) \overline{A} (ii) \overline{B} (iii) $\overline{\overline{A}}$
3. यदि $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$, $A = \{ 1, 2, 6, 7 \}$, $B = \{ 2, 3, 5, 6 \}$ र $C = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ भए, पुष्टि गर्नुहोस् :
- (i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. यदि $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 19, 20 \}$,
 $P = \{ x: x \text{ रूढ सङ्ख्या हो} \}$
 $Q = \{ y: y, 18 \text{ को गुणन खण्ड हो} \}$ र
 $R = \{ z: z, 20 \text{ भन्दा साना 3 का अपवर्त्य हुन्} \}$ भने
- (क) बेगलाबेगलै भेनचित्र बनाई निम्न लिखित समूहका सदस्यहरूको सूची तयार गर्नुहोस् :
- (i) $P \cup Q$ (ii) $(P \cup Q) \cap R$ (iii) $\overline{P \cup Q}$ (iv) $\overline{P \cap Q}$
 (v) $P - Q$ (vi) $Q - P$ (vii) $P \cup (Q \cap R)$
- (ख) प्रश्न नं. (क) मा बनाइएका समूहहरूमध्ये कुन कुन बराबर हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.2 समूहको गणनात्मकता (Cardinality of Sets)

1.2.1 समूहको गणनात्मकता भन्नाले के बुझिन्छ ?

कुनै पनि समूहमा जम्मा कति सदस्य सङ्ख्या छन् ती सदस्य सङ्ख्यालाई नै समूहको गणनात्मकता (cardinality) भनिन्छ। जस्तै : अङ्ग्रेजी वर्णमालाका सबै स्वर वर्णहरूको समूह $V = \{a, e, i, o, u\}$ हो। यस समूहमा जम्मा 5 ओटा सदस्यहरू छन्। त्यसैले समूह V को गणनात्मकता 5 हो। यसलाई सङ्केतमा $n(V) = 5$ लेखिन्छ।

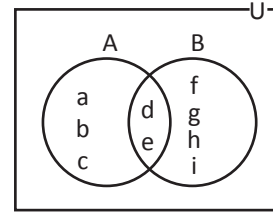
कुनै दुई समूहहरू A र B यदि खप्टिएका (intersecting) समूह हुन् भने समूह A को मात्र सदस्य सङ्ख्यालाई $n_0(A)$ र समूह B को मात्र सदस्य सङ्ख्यालाई $n_0(B)$ ले जनाइन्छ। चित्रमा

$n_0(A) = 3$ हुन्छ। त्यसैले $n_0(A) = n(A - B)$ हुन्छ।

यसलाई $n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$ पनि लेख्न सकिन्छ।

पुनः $n_0(B) = 4$, त्यसै गरी $n_0(B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ।

यहाँ $n(A \cup B) = 9$ र $n(A \cap B) = 2$ हुन्छ।

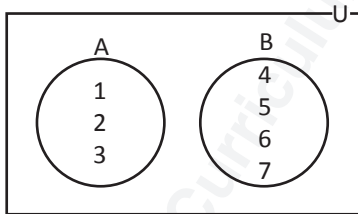


कुनै दुई समूहमध्ये एउटा समूह अर्को समूहको उपयुक्त उपसमूह भए, अर्थात् $A \subset B$ भए $n(A \cap B) = n(A)$ र $n(A \cup B) = n(B)$ हुन्छ। साथै $B \subset A$ भए $n(A \cap B) = n(B)$ र $n(A \cup B) = n(A)$ हुन्छ।

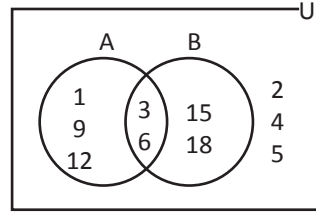
1.2.2 समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउने तरिका

तल दिइएका भेन चित्रहरू अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस्।

चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



(i) $n(A) = ?$ (ii) $n(B) = ?$ (iii) $n(A \cup B) = ?$

(iv) $n(A \cap B) = ?$ (v) $n(\overline{A \cup B}) = ?$

चित्र नं. 1 मा समूह A र B मा कुनै पनि साझा सदस्य छैन। त्यसैले यी अलग्गिएका समूह हुन्। यहाँ समूह A मा तिन ओटा सदस्य छन् त्यसैले $n(A) = 3$ हुन्छ। यसै गरी $n(B) = 4$ र $n(A \cup B) = 7$ हुन्छ। $A \cap B$ मा कुनै समस्य नभएकाले $n(A \cap B) = 0$ हुन्छ।

चित्र नं. 2 अवलोकन गरौं, जहाँ, U भित्र A र B का सदस्यहरू बाहेक अन्य सदस्यहरू पनि छन्। तसर्थ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18\}$ छ। $n(U) = 10$

A र B बाहेकका सदस्यहरू लैँदा, $\{2,4,5\}$, $(A \cup B)$ भन्दा बाहिर पर्दछ तर ती सदस्यहरू U मा पर्दछ। त्यसैले $(\overline{A \cap B}) = \{2, 4, 5\}$ हुन्छ। त्यसैले $n(\overline{A \cap B}) = 3$ हुन्छ।

साथै $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$ हुन्छ।

पुनः माथिको भेन चित्र नं. 1 मा U भित्र A र B का सदस्यहरू छन्।

त्यसैले $\overline{A \cup B}$ मा कुनै सदस्य नभएकाले $(\overline{A \cup B}) = \phi$ हुन्छ। तसर्थ $n(\overline{A \cup B}) = 0$ हुन्छ। यस्तो अवस्थामा $n(U) = n(A \cup B)$ मात्रै हुन्छ।

माथि उल्लेखित समूहको गणनात्मकता (cardinality) लाई निम्न सूत्रमा लेख्न सकिन्छ।

- (i) A र B दुई ओटा अलगिएका समूह भए, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ हुन्छ।
- (ii) A र B दुई ओटा खटिएका समूह भए, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ अथवा $n(A \cup B) = n_0(A) + n(A \cap B) + n_0(B)$ हुन्छ।
- (iii) U भित्र A र B का सदस्य मात्र भए, $n(U) = n(A \cup B)$ मात्रै हुन्छ।
- (iv) U भित्र A र B का सदस्यहरू बाहेक अन्य सदस्यहरू पनि भए $n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$ र $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$ हुन्छ।
- (v) खटिएका समूहमा $n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$ र $n_0(B) = n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ। यस्तो अवस्थामा $n(A \cup B) = n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B)$ हुन्छ।

उदाहरण 1

500 जनसङ्ख्या भएको एउटा गाउँको सर्वेक्षण गर्दा 325 जनाले फिल्टर गरेर पानी पिउँदा रहेछन्। 230 जनाले उमालेर पिउँदा रहेछन् भने कति जनाले फिल्टर गरेको र उमालेको दुवै खाले पानी पिउँदा रहेछन्, भेन चित्रको सहायताले पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान :

जम्मा जनसङ्ख्याको समूहलाई U, फिल्टर गरेर पानी पिउने जनसङ्ख्याको समूहलाई F र उमालेर पानी पिउने जनसङ्ख्याको समूहलाई B ले सङ्केत गरौं।

प्रश्नानुसार, $n(U) = 500 = n(F \cup B)$, $n(F) = 325$, $n(B) = 230$

दुवै किसिमको पानी पिउनेको सङ्ख्या, $n(F \cap B) = ?$

मानौं $n(F \cap B) = x$

अब चित्रअनुसार,

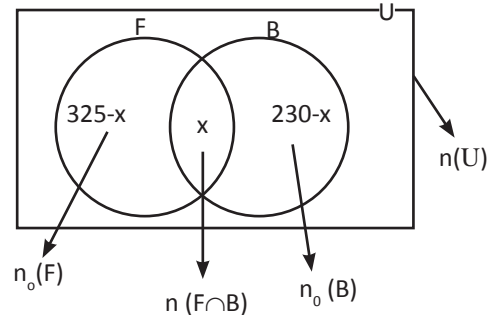
$n(F \cup B) = n_0(F) + n(F \cap B) + n_0(B)$

अथवा, $500 = 325 - x + x + 230 - x$

अथवा, $x = 55$

$\therefore n(F \cup B) = 55$

अतः उमालेर र फिल्टर गरेर दुवै खाले पानी पिउनेको सङ्ख्या 55 जना रहेछ।



उदाहरण 2

120 जना विद्यार्थीको समूहमा 90 जना गणित पढ्ने, 72 जना विज्ञान पढ्ने विद्यार्थीहरू छन् । यदि 10 जना दुई ओटा विषयमध्ये कुनै पनि विषय पढ्दैनन् भने,

- कम्तीमा एउटा विषय पढ्नेको सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।
- दुवै विषय पढ्नेको सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।
- गणित मात्र पढ्ने विद्यार्थी कति होलान् ?
- विज्ञान मात्रै पढ्ने विद्यार्थी कति होलान्, भेन चित्र बनाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, M र S ले क्रमशः गणित पढ्ने र विज्ञान पढ्ने तथा U ले सबै विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँछ ।

त्यसैले, $n(U) = 120$, $n(M) = 90$, $n(S) = 72$

$$n(\overline{M \cup S}) = 10$$

मानौं, $n(M \cap S) = x$

अब, सूत्रअनुसार,

$$(i) \ n(\overline{M \cup S}) = n(U) - n(M \cup S) = 120 - 110 = 10$$

चित्रअनुसार,

$$(ii) \ n(M \cup S) = n_0(M) + n(M \cap S) + n_0(S)$$

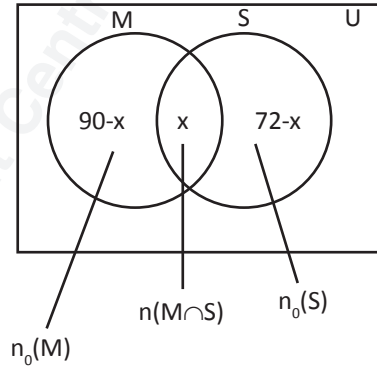
$$110 = 90 - x + x + 72 - x$$

$$x = 162 - 110 = 52$$

$$\therefore n(M \cap S) = 52$$

$$(iii) \ n_0(M) = 90 - x = 90 - 52 = 38$$

$$(iv) \ n_0(S) = 72 - x = 72 - 52 = 20$$



उदाहरण 3

एउटा सर्वेक्षणमा 100 जना नेपाली पर्यटकहरू मध्ये 15% ले तिब्बत मात्र भ्रमण गर्छन् । 60% ले भारत मात्र भ्रमण गर्दछन् । 10% ले दुवै मुलुक भ्रमण गर्छन् भने कति प्रतिशत पर्यटकले यी दुई मध्ये कुनै पनि देश भ्रमण गर्दैनन् भने चित्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ जम्मा नेपाली पर्यटकको समूह U मानौं ।

अतः $n(U) = 100$ हुन्छ । पुनः तिब्बत र भारत भ्रमण गर्नेको समूहलाई क्रमशः T र I ले जनाऔं,

त्यसैले, $n_o(T) = 100$ को $15\% = 15$

$n_o(I) = 100$ को $60\% = 60$

$n(T \cap I) = 100$ को $10\% = 10$

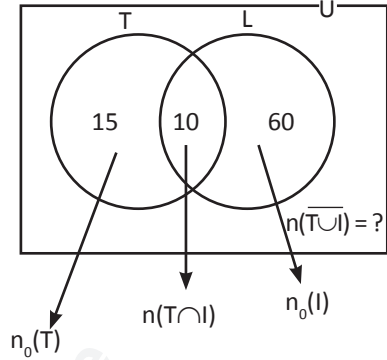
$n(\overline{T \cup I}) = ?$

सूत्रअनुसार,

$n(T \cup I) = n_o(T) + n_o(I) + n_o(T \cap I) = 15 + 60 + 10 = 85$

$n(\overline{T \cup I}) = n(U) - n(T \cup I) = 100 - 85 = 15$

तसर्थ, यी कुनै पनि देशमा भ्रमण नगर्ने पर्यटकहरू 15% रहेछन् । भेन चित्रमा 15% पर्यटकहरू समूह I र T को संयोजनभन्दा बाहिर परेका छन् ।

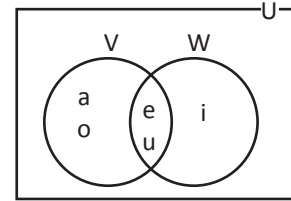


अभ्यास 1.3

1. दिइएको चित्रमा

$n(V)$, $n(W)$, $n_o(V)$,

$n_o(W)$, $n(V \cup W)$, $n(V \cap W)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्



2. यदि $n(A) = 37$, $n(B) = 50$, छ र $A \subset B$ भए $n(A \cap B)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा बजारको सर्वेक्षण गर्दा 143 जनाले सेतो दन्त मन्जन र 135 जनाले रातो दन्त मन्जन प्रयोग गर्दा रहेछन् । यदि 70 जनाले दुवै दन्त मन्जन प्रयोग गर्दा रहेछन् भने कम्तीमा एउटा दन्त मन्जन प्रयोग गर्ने व्यक्तिहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि $U = \{x: x = 20 \text{ र त्यो भन्दा सानो धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या हो}\}$

$A = \{y: y; \text{रूढ सङ्ख्या हो}\}$

$B = \{z: z; 18 \text{ को गुणन खण्ड हो}\}$

$C = \{P: P; 20 \text{ भन्दा साना एउटा 3 को अपवर्त्य हो}\}$

अब भेन चित्र खिचेर निम्न समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) $n(A \cup B)$

(ii) $n(B \cup C)$

(iii) $n(A \cup B \cup C)$

(iv) $n(A \cap B \cap C)$

(v) $n_o(A)$

(vi) $n_o(B)$

(vii) $n_o(C)$

5. सन् 2010 मा कुनै सहरको 1000 परिवारको सर्वेक्षणअनुसार 794 परिवारसँग रेडियो र 187 परिवारसँग टेलिभिजन रहेछ । यदि 63 परिवारसँग रेडियो र टेलिभिजन मध्ये केही पनि रहेनछ भने, अब त्यस सर्वेक्षणमा रेडियो र टेलिभिजन दुवै हुने परिवार सङ्ख्या कति होला पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. एउटा कक्षाका 300 विद्यार्थीहरू मध्ये 60% विद्यार्थीहरू भौतिक शास्त्र 35% विद्यार्थीहरू रसायन शास्त्र अध्ययन गर्छन् र 20% विद्यार्थीहरू यी दुवै विषयमा अध्ययन गर्दैनन भने,
 - (i) कति विद्यार्थीहरू दुवै विषय अध्ययन गर्छन् होला ?
 - (ii) भौतिक शास्त्र मात्रै कति विद्यार्थीले अध्ययन गर्छन् होला ?
 - (iii) रसायन शास्त्र मात्रै कति विद्यार्थीले अध्ययन गर्छन् होला ?
 - (iv) एउटा मात्रै विषय अध्ययन गर्ने विद्यार्थीको सङ्ख्या कति होला ?
7. एउटा विद्यालयमा भएका अतिरिक्त क्रियाकलापहरू मध्ये विद्यार्थीहरूले कम्तीमा एउटा क्रियाकलापमा भाग लिनैपर्ने रहेछ । 40 जना विद्यार्थी भएको एउटा कक्षाका विद्यार्थी मध्ये 25 जनाले वाद विवादमा, 30 जनाले हाजिरी जवाफ प्रतियोगितामा भाग लिएछन् भने,
 - (i) यसलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
 - (ii) कति विद्यार्थीले दुबै क्रियाकलापमा भाग लिएछन् ?
 - (iii) कति विद्यार्थीले एउटा मात्र क्रियाकलापमा भाग लिएछन् ?
8. कुनै गाउँका 600 जना उपभोक्ताहरूमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 300 जनाले स्वेदशी चिया, 250 जनाले विदेशी चिया र 150 जनाले दुबै ब्रान्डका चिया खरिद गर्दा रहेछन् । ती दुवै ब्रान्ड मध्ये कुनै पनि ब्रान्डका चिया खरिद नगर्नेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. एउटा जलपान समारोहमा 800 सहभागीमध्ये 620 जनाले दूध, 350 जनाले चिया पिएछन् अनि 50 जनाले कुनै पनि पेय पिएनन् भने भने चित्र प्रयोग गरी कति जनाले दुवै पेय पिएछन् पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. 2000 जनामा गरिएको सर्वेक्षणमा 50% ले देश A र 40% ले देश B भ्रमण गरेका रहेछन् । 15% ले A र B मध्ये कुनै पनि देश भ्रमण गरेका रहेनछन् भने,
 - (i) कति जनाले दुवै देश भ्रमण गरेका रहेछन् पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (ii) कति जनाले एक मात्र देश भ्रमण गरेका रहेछन् पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (iii) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

पाठ 2

नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

2.0 पुनरावलोकन

सविताले एउटा भोला रु.500 मा किनेर 25% नाफा गरेर बेचिन् । उनले उक्त भोला कतिमा बेचिन् होला ? कविरले रु. 4000 मा किनेको घडी रु.3200 मा बेचे । उनलाई कति प्रतिशत नोक्सान भयो होला ? कुनै वस्तुमा हुने नाफा र नोक्सान क्रय मूल्यको निश्चित प्रतिशत रकम हो । हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा निम्न लिखित सूत्रहरू प्रयोग गरी नाफा र नोक्सान गणना गर्ने काम गरिसकेका छौं ।

(क) वास्तविक नाफा = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

(ख) वास्तविक नोक्सान = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

(ग) नाफा प्रतिशत = $\frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$

(घ) नोक्सान प्रतिशत = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$

यी सूत्रहरूलाई सरलीकरण गरी अरू कति सूत्रहरू बनाउन सकिन्छ, खोजौं । वास्तविक नाफालाई P, नोक्सानलाई L, क्रय मूल्यलाई CP र विक्रय मूल्यलाई SP ले जनाउँदा माथि क, ख, ग र घ लाई कसरी लेख्न सकिन्छ होला, छलफल गर्नुहोस् ।

2.1 नाफा नोक्सान सम्बन्धी व्यावहारिक समस्याहरू (Daily life problems related to profit and loss):

हाम्रो दैनिक जीवनमा नाफा र नोक्सानका समस्याहरू प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष रूपमा देखा परिरहेका हुन्छन् । यी समस्याहरूलाई गणितीय स्वरूप दिएर समाधान गर्न सकिन्छ ।

क्रियाकलाप 1 :

कक्षामा भएका विद्यार्थीहरू कम्तीमा 4 जना र बढीमा 6 जनाको समूह हुने गरी बसौं । प्रत्येक समूहले आफूले बजारमा किनमेल गर्दा थाहा पाएको जानकारीका आधारमा नाफा र नोक्सानसँग सम्बन्धित शाब्दिक समस्याहरू बनाऔं । समूहहरूले बनाएका प्रश्न एक अर्कामा साटौं ।

अब निम्न लिखित प्रश्नहरूका आधारमा समस्या समाधान गरौं :

(क) प्रश्नको आशय बुझिन्छ ?

(ख) समस्यामा के के जानकारी दिइएको छ ?

(ग) समस्यामा के पत्ता लगाउनुपर्ने छ ?

(घ) प्रश्नको समाधान गर्न सजिलाका लागि प्रश्नलाई तालिका सूत्र, चित्र, प्रत्यक्ष/अप्रत्यक्ष तर्क तथा अनुमान गर्न सकिन्छ ? सकिन्छ भने के गर्न सकिन्छ ? मनन गरौं, सम्भावित सबै तरिकाले समस्या समाधान गर्न लगाऔं । सम्भावित सबै तरिकाले समस्या समाधान गरिसकेपछि निम्न लिखित प्रश्नहरू सोधौं :

- (क) के समाधानका प्रत्येक चरण जाँच गरियो ?
- (ख) के समाधानका प्रत्येक चरण ठिक छन् ?
- (ग) के प्रत्येक चरणलाई कारणसहित प्रमाणित गर्न सकिन्छ ?

अन्तमा, आफूले गरेका काम पुनः गर्न लगाऔं र गणितीय रूपमा समाधान ठिक/बेठिक के छ, सोधौं ।

क्रियाकलापलाई निम्न उदाहरणले प्रस्ट पारिएको छ ।

विमलले एउटा डोको रु. 300 मा किनेर रु. 390 मा बेचे । उनले डोकाको कारोबार गर्दा कति प्रतिशत नाफा गरे, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

चरण 1: समस्या बुझ्ने तथा योजना तर्जुमा गर्ने

- (क) प्रश्नको आशय के बुझिन्छ ?
- (ख) यहाँ डोकाको क्रय मूल्य (CP) = रु. 300
डोकाको विक्रय मूल्य (SP) = रु. 390
- (ग) समस्यामा डोकाको कारोबार गर्दा हुने नाफा प्रतिशत पत्ता लगाउनुपर्ने छ ।
- (घ) प्रश्नलाई सजिलोसँग बुझ्न निम्नानुसार तालिकामा पनि प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

वस्तुको नाम	क्रय मूल्य (CP)	विक्रय यमूल्य (SP)	नाफा प्रतिशत
डोको	रु. 300	रु. 390	?

चरण 2: समस्या समाधान (योजना कार्यान्वयन गर्ने)

सूत्रअनुसार

$$\begin{aligned}
 \text{नाफा प्रतिशत} &= \frac{\text{नाफा रकम}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\% \\
 &= \frac{\text{विक्रय मूल्य (SP)} - \text{क्रय मूल्य (CP)}}{\text{क्रय मूल्य (CP)}} \times 100\% \\
 &= \frac{390 - 300}{300} \times 100\% \\
 &= 30\%
 \end{aligned}$$

त्यसैले, विमलले डोकाको कारोबारमा 30 % नाफा गरेछन् ।

चरण 3 : पछाडि फर्केर हेर्ने वा जाँच्ने

(क) के समाधानका प्रत्येक चरण जाँच गरियो ?

(ख) के समाधानका प्रत्येक चरण ठिक छन् ?

(ग) के नाफा नोक्सानको परिभाषाअनुसार समाधानका प्रत्येक चरण ठिक छन् भनी प्रमाणित गर्न सकिन्छ ?

अन्तमा प्रश्नानुसारका निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

माथिका क्रियाकलाप र उदाहरण समस्या समाधानका चरणसँग सम्बन्धित छन् । हामीले अभ्यासका प्रश्नहरू समाधान गर्दा यी चरणहरू अपनाउँदै समाधान गर्ने हो भने शाब्दिक समस्या हल गर्न सजिलो हुन्छ ।

उदाहरण : 1

दीपक एक स्टेशनरी पसले हुन् । उनले एक दर्जन कापी रु. 360 मा किनेछन् । केही दिनपछि उनले रु. 62 मा 2 ओटा कापी बिक्री गरेछन् । उनलाई एउटा कापीमा कति रुपियाँ नाफा अथवा नोक्सान भएछ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, 12 ओटा कापीको क्रय मूल्य = रु.360

1 ओटा कापीको क्रय मूल्य = रु. $\frac{360}{12}$
= रु. 30

फेरि, 2 ओटा कापीको विक्रय मूल्य = रु. 62

1 ओटा कापीको विक्रय मूल्य = रु. $\frac{62}{2}$
= रु. 31

यहाँ, एउटा कापीमा भएको नाफा = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य = रु. 31 - रु. 30 = रु. 1

त्यसैले एउटा कापीमा दीपकलाई रु.1 नाफा भएछ ।

उदाहरण : 2

चिनले प्रति कि.ग्रा. रु. 40 का दरले 250 कि.ग्रा. आँप किनिछन् । आँप ल्याउने भाडा प्रति कि.ग्रा. रु. 1 तिरिछन् । यदि उनले पुरै आँप रु.12000 मा बेचिछन् भने (क) 1 कि. ग्रा. आँप कतिमा बेचिछन् ? (ख) पुरा आँप बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, 250 किलो ग्राम आँपको क्रय मूल्य (CP) = रु. 40 x 250 = रु.10,000

1 किलो ग्राम आँपको भाडा = रु.1

$$250 \text{ किलो ग्राम आँपको भाडा} = \text{र.} 1 \times 250 = \text{र.} 250$$

$$\text{त्यसैले, 250 किलो ग्राम आँपको क्रय मूल्य} = \text{र.} 10,000 + \text{र.} 250$$

$$= \text{र.} 10,250$$

$$\text{फेरि, 250 किलो ग्राम आँपको विक्रय मूल्य} = \text{र.} 12,000$$

$$\text{(क) 1 किलो ग्राम आँपको विक्रय मूल्य} = \text{र.} \frac{12000}{250} = \text{र.} 48$$

त्यसैले, 1 किलो ग्राम आँपको विक्रय मूल्य र. 48 पर्छ ।

$$\text{(ख) नाफा प्रतिशत(P\%)} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$$

$$\text{अथवा, नाफा प्रतिशत (P\%)} = \frac{12000 - 10250}{10250} \times 100\% = \frac{1750}{10250} \times 100\% = 17.07\%$$

पुरा आँप बेच्दा चिनालाई 17.07 % नाफा भयो ।

वैकल्पिक विधि

यहाँ, आँपको क्रय मूल्य (CP) = र.40 / के.जी.

आँपको भाडा = र.1/ के.जी.

$$\text{अब, 1 किलो ग्राम आँपको वास्तविक क्रय मूल्य(CP)} = \text{र.}(40 + 1)$$

$$= \text{र.} 41$$

$$\text{फेरि, 250 किलो ग्राम आँपको विक्रय मूल्य} = \text{र.} 12000$$

$$1 \text{ किलो ग्राम आँपको विक्रय मूल्य} = \text{र.} \frac{1200}{250}$$

$$= \text{र.} 48$$

$$\text{त्यसैले, नाफा प्रतिशत} = \frac{SP - CP}{CP} \times 100\%$$

$$= \frac{48 - 41}{41} \times 100\%$$

$$= 17.07 \%$$

उदाहरण : 3

एक जना किताब पसलेले 3000 ओटा किताब किनेछन् । जसमध्ये उनले 300 ओटा किताब विद्यालयलाई निःशुल्क उपलब्ध गराएछन् । बाँकी किताबहरू प्रति किताब र. 66 का दरले 10% नाफा हुने गरी बेचेछन् । एउटा किताबको क्रय मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, मानौं एउटा किताबको क्रय मूल्य रु. x छ ।

त्यसैले, 3000 ओटा किताबको क्रय मूल्य = $3000x$

$$\begin{aligned}\text{नाफा} &= \text{क्रय मूल्यको } 10\% \\ &= 3000x \times \frac{10}{100} = 300x\end{aligned}$$

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + नाफा

$$= 3000x + 300x = 3300x$$

तर, 300 ओटा किताब विद्यालयलाई निःशुल्क उपलब्ध गराएकामा पसलेले जम्मा 2700 ओटा किताब मात्र बेचन सक्छन् ।

2700 ओटा किताबको रु. 66 का दरले हुन आउने विक्रय मूल्य = रु. 2700×66 हुन्छ ।

त्यसैले, $2700 \times 66 = 3300x$

$$\text{अथवा, } 54 = x$$

त्यसैले, एउटा किताबको क्रय मूल्य रु. 54 पर्छ ।

नोट : एउटै सामानको एकभन्दा बढी विक्रय मूल्य हुन्छ तर एउटा मात्र क्रय मूल्य हुन्छ । किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण : 4

एउटा फोटोकपी मेसिन रु. 60,000 मा बेच्दा 20% घाटा भएछ । उक्त मेसिनमा 12% नाफा कमाउन कतिमा बेचनुपर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, फोटोकपी मेसिनको विक्रय मूल्य = रु. 60,000

मानौं, क्रय मूल्य = रु. x

$$\text{नोक्सान} = \text{क्रय मूल्यको } 20\% = \frac{x \times 20}{100} = \frac{x}{5}$$

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य - नोक्सान

$$\text{अथवा, } 60,000 = x - \frac{x}{5}$$

$$\text{अथवा, } 60,000 = \frac{5x - x}{5}$$

$$\text{अथवा, } 60,000 = \frac{4x}{5}$$

$$\text{अथवा, } \frac{60000 \times 5}{4} = x$$

$$\text{अथवा, } x = 75000$$

यहाँ, फोटोकपी मेसिनको क्रय मूल्य = रु.75000

फेरि, नाफा = क्रय मूल्यको 12%

$$\text{अथवा, नाफा} = \frac{7500}{100} \times 12 = \text{रु.9000}$$

$$\begin{aligned} \text{विक्रय मूल्य} &= \text{क्रय मूल्य} + \text{नाफा} \\ &= \text{रु.75000} + \text{रु.9000} \\ &= \text{रु.84,000} \end{aligned}$$

त्यसैले, 12% नाफा कमाउन फोटोकपी मेसिन रु.84,000 मा बेच्नुपर्छ ।

अभ्यास 2.1

1. तल दिइएको तालिकामा अज्ञात राशीको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

	सामानको नाम	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	नाफा/नोक्सान	नाफा/नोक्सान प्रतिशत
क)	फुटबल	रु. 500	रु. 625	?	?
ख)	भोला	रु. 300	रु. 270	?	?
ग)	चप्पल	रु. 120	रु. 144	?	?
घ)	कलम	रु. 50	?	?	15% (नाफा)
ङ)	कापी	?	रु. 40	रु. 10 (नोक्सान)	?

2. (क) कपिलले 40 ओटा खेलौनाहरू रु. 4800 मा किनेछन् । केही समयपछि उनले 5 ओटा खेलौनाको रु.700 का दरले सबै खेलौनाहरू बेचेछन् । एउटा खेलौनामा कपिललाई कति नाफा/नोक्सान भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा नृत्य कार्यक्रम देखाउन जम्मा रु. 25000 खर्च लाग्छ । नृत्य टोलीले खर्च बाहेक रु. 12,000 नाफा गर्नुपर्छ । 370 जना दर्शकले पैसा तिरेर नृत्य अवलोकन गरे । एक जना दर्शकले कति रकम तिरे, पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (क) एक जना फलफुल पसलेले 30 कि.ग्रा. स्याउ रु. 88 प्रति कि.ग्रा.का दरले बजारबाट किनेर ल्याएछन् । फलफुल बजारबाट पसलसम्म पुऱ्याउन उनको जम्मा रु. 60 खर्च भएछ । उनले पुरै स्याउ रु. 3240 मा बेचेछन् । 1 कि. ग्रा. स्याउमा उनलाई कति नाफा भयो ? पुरा स्याउ बेच्दा कति प्रतिशत नाफा भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) न्युटनले 12 दर्जन कापी रु. 4320 मा किनेर ल्याएछन् । उनलाई उक्त कापी आफ्नो पसलसम्म पुऱ्याउन रु. 288 खर्च लागेछ । रु. 5760 मा सबै कापीहरू बिक्री गर्न उनले एउटा कापीमा कति नाफा गर्नुपर्छ साथै उनलाई कापीको व्यापारमा कति प्रतिशत नाफा भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (क) रहमानले प्रति कापी रु. 60 मा 1200 ओटा कापीहरू किनेछन् । जसमध्ये 300 कापीहरू छात्रवृत्तिका रूपमा दिएछन् । यदि उसले 5 % नोक्सानमा बाँकी कापीहरू बेचेछन् भने प्रत्येक कापीको विक्रय मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) पार्वतीले 60 ओटा सिसाका ग्लासहरू किनेर ल्याइछन् । 20 ओटा ग्लासहरू फुटेछन् । बाँकी प्रति गिलास रु. 25 का दरले 20% नाफा हुने गरी बेचिछन् । एउटा ग्लासको क्रय मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (क) एक जना मानिसले एउटा टेबल रु. 1035 मा बेच्दा 15 % नाफा भएछ । यदि सो टेबल 8 % नोक्सान हुने गरी बेचेको भए कतिमा बेचनु पर्थ्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) हिराले एउटा कलम 15 % नोक्सानमा बेचेछन् । यदि सो कलम उनले रु. 3 बढी लिएर बेचन सकेको भए उनलाई 5 % नाफा हुने थियो । कलमको क्रय मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. आफूसँग भएका कापी, कलम र किताबको क्रय मूल्य र विक्रय मूल्य के कति होला, पसलेलाई सोधी छलफल गर्नुहोस् । छलफलबाट प्राप्त नतिजालाई टिपोट गरी नाफा नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

क्र.स.	वस्तु	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	नाफा/नोक्सान	नाफा/नोक्सान प्रतिशत

पाठ 3

कमिसन तथा कर (Commission and Tax)

3.0 पुनरावलोकन

- रु. 12000 को 13% कति होला ?
- रु. 20000 को रु.400 कति प्रतिशत होला ?
- रु. 1000 कुन सङ्ख्याको 10% प्रतिशत होला ?

बजारमा सामान किनमेल गर्दा मूल्यमा केही प्रतिशत छुट गरिन्छ। आफूले कमाएको पैसाको केही प्रतिशत बचत र खर्च गरिन्छ। हावामा विभिन्न ग्याँसहरूमा निश्चित प्रतिशतको मिश्रण हुन्छ। यी र यस्तै खाले अन्य उदाहरणहरू प्रतिशतसँग सम्बन्धित हुन्छन्, जुन हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष रूपमा प्रयोगमा आइरहेका हुन्छन्। आफूले कमाएको केही प्रतिशत रकम राज्यलाई तिर्नुपर्ने हुन्छ। सामान किनमेल गर्दा बिलमा समानको मूल्यभन्दा केही रकम थपघट गरिएको हुन्छ। यी सबैमा प्रतिशत गणना गर्ने गरिएको हुन्छ। प्रतिशतका आधारमा गणना गर्ने काम हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं।

3.1 कमिसन (Commission)

फुलमाया एक किसान हुन्। उनीसँग 12 रोपनी खेत छ। एक पटक उनका छोरा बिरामी परे तर उनीसँग छोराको उपचार गर्ने पैसा थिएन। उनले आफ्ना नाममा रहेको 12 रोपनी खेतमध्ये 5 रोपनी खेत बेच्ने निर्णय गरिन्। जगतबहादुर एक कुशल व्यवसायी हुन्। उनी 5 रोपनी खेत किनेर उक्त खेतमा तरकारी खेती गर्ने विचारमा छन्। तर उनीसँग खेत किन्न जाने समय छैन। जगतबहादुरले सोनामलाई आफ्ना लागि 5 रोपनी खेत खोजिदिन अनुरोध गरे। खेत किन्न सोनाम फुलमायाकहाँ पुगे, उनले फुलमायाको 5 रोपनी खेत जगतबहादुरलाई बिक्री गर्ने र बिक्रीबाट प्राप्त रकमको 5 प्रतिशत आफूले लिने सहमति गरेर आए।



यहाँ फुलमाया बिक्री कर्ता, जगतबहादुर खरिद कर्ता र सोनाम एजेन्ट (Agent) हुन्।

एजेन्टले बिक्री रकमको केही प्रतिशत आफूले लिने गर्छन्। उक्त रकमलाई कमिसन भनिन्छ। कमिसन खरिद कर्ता, बिक्री कर्ता वा दुवैले एजेन्टलाई दिने प्रचलन छ।

घर जग्गाको कारोबारमा, बैङ्क तथा वित्तीय संस्थाहरूमा, बिमा कम्पनीहरूमा सामान किनमेलमा तथा अन्य दैनिक जीवनमा आर्थिक कारोबार हुने व्यवसायहरूमा कमिसनको गणना गरिन्छ।

क्रियाकलाप : 1

कक्षाकोठामा उपस्थित विद्यार्थीहरू 3/3 जनाको समूहमा बसौं । प्रत्येक समूहका विद्यार्थीहरूलाई बिक्रेता, खरिद कर्ता र एजेन्टको नामले सम्बोधन गरौं । आफ्नो घर टोलमा बिक्री गर्न मिल्ने वस्तुहरूको विक्रय मूल्य, कमिसनको दर तोकौं । त्यही दर प्रयोग गरी कमिसन बापतको रकम, कमिसन पछिको बिक्री मूल्य गणना गरौं । प्रत्येक समूहले गरेका कार्यलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरौं ।

कमिसन सम्बन्धी समस्या समाधान गर्दा निम्न लिखित सूत्रहरू प्रयोग हुन्छन् :

1. कमिसनको रकम = बिक्री मूल्यको निश्चित कमिसन प्रतिशत
2. कमिसनपछिको मूल्य = विक्रय मूल्य - कमिसनको रकम
3. कमिसन प्रतिशत = $\frac{\text{कमिसन रकम}}{\text{विक्रय मूल्य}} \times 100\%$

उदाहरण : 1

कुनै एजेन्टले रु. 18000 को बालुवा बेचिदिए बापत 1 प्रतिशत कमिसन पाउँछन् भने,

(क) एजेन्टले कमिसन बापत कति रकम पाउँछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) बालुवा व्यापारीले बालुवा बेचेर कति रकम पाउँछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ बालुवाको विक्रय मूल्य = रु. 18000

कमिसनको दर = 1 प्रतिशत

कमिसन बापतको रकम = ?

कमिसनपछिको मूल्य = ?

हामीलाई थाहा छ, कमिसन रकम = बिक्री मूल्य × कमिसन प्रतिशत

$$= \text{रु. } 18000 \text{ को } 1\%$$

$$= \text{रु. } 18000 \times \frac{1}{100}$$

$$= \text{रु. } 180$$

कमिसनपछिको मूल्य = बिक्री मूल्य - कमिसनको रकम

$$= \text{रु. } 18000 - \text{रु. } 180 = \text{रु. } 17820$$

त्यसैले,

(क) एजेन्टले कमिसन बापत रु. 180 पाउँछ ।

(ख) बालुवा व्यापारीले बालुवा बिक्रीबाट रु. 17820 पाउँछ ।

उदाहरण : 2

एउटा कपडा पसलका कर्मचारीको मासिक तलब रु. 12000 छ। महिनामा रु.6 लाखभन्दा बढीको बिक्री रकममा उनलाई 1% कमिसन दिने गरिन्छ। यदि उक्त पसलको एक महिनाको जम्मा बिक्री रु. 10 लाख भए कर्मचारीको महिनाको जम्मा आम्दानी कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान :

यहाँ, कर्मचारीको मासिक तलब = रु. 12,000

मासिक बिक्री रकम = रु. 10,00,000

कमिसन दिनुपर्ने बिक्री रकम = रु. 6,00,000

कमिसनको दर = 1%

कर्मचारीको मासिक आम्दानी = ?

कमिसन दिनुपर्ने बिक्री रकम = रु. 10,00,000 - रु.6,00,000
= रु. 4,00,000

कमिसन बापतको रकम = रु. 4,00,000 को 1%
= रु. 4,00,000 $\times \frac{1}{100}$
= रु.4,000

उक्त महिनामा आम्दानी = तलब + कमिसन
= रु. 12,000 + रु. 4,000
= रु. 16,000

उदाहरण 3

कापी उत्पादन गर्ने कम्पनीमा कार्यरत एक जना कर्मचारीको मासिक तलब रु. 11,000 छ। उनले कमिसनसहित उक्त महिनामा रु. 21,000 जम्मा आम्दानी गर्दछन्। यदि उक्त महिनामा रु.5,00,000 को कापी बिक्री भएछ भने कमिसनको दर कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ, कर्मचारीको मासिक तलब = रु.11,000

महिनाको जम्मा आम्दानी = रु. 21,000

महिनाको जम्मा बिक्री रकम = रु. 5,00,000

कमिसनको दर = ?

कमिसन बापतको रकम = रु. 21,000 - रु. 11,000
= रु. 10,000

$$\begin{aligned}\text{कमिसनको दर} &= \frac{\text{कमिसन बापतको रकम}}{\text{जम्मा बिक्री}} \times 100\% \\ &= \frac{10000}{500000} \times 100\% \\ &= 2\%\end{aligned}$$

त्यसैले, कमिसनको दर = 2%

उदाहरण : 4

कुनै उद्योगले थोक विक्रेतालाई रु. 10 लाखसम्मको बिक्रीमा 0.5 प्रतिशत, 10 लाखदेखि 15 लाखसम्मको बिक्रीमा 1 प्रतिशत र 15 लाखभन्दा माथिकोमा 2 प्रतिशत कमिसन दिन्छ। यदि थोक विक्रेताले उद्योगबाट रु. 25,00,000 को सामान खरिद गर्‍यो भने कति रकम कमिसन पायो, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान :

यहाँ, जम्मा बिक्री रकम = रु.25,00,000

(क) 0.5% प्रतिशत कमिसन लाग्ने बिक्री रकम = रु.10,00,000

$$\begin{aligned}\text{कमिसन रकम} &= \text{रु.10,00,000} \times \frac{0.5}{100} \\ &= \text{रु.5,000}\end{aligned}$$

(ख) 1% कमिसन लाग्ने बिक्री रकम = रु. 10 लाखदेखि 15 लाखसम्म

$$= \text{रु. 1500000} - \text{रु. 1000000}$$

$$= \text{रु.5,00,000}$$

$$\text{कमिसन रकम} = \text{रु.5,00,000} \times \frac{1}{100}$$

$$= \text{रु.5,000}$$

(ग) 2% कमिसन लाग्ने बिक्री रकम = 15 लाखभन्दा माथि

$$= \text{रु.25,00,000} - \text{रु.15,00,000}$$

$$= \text{रु.10,00,000}$$

$$\text{कमिसन रकम} = \text{रु.10,00,000} \times \frac{2}{100}$$

$$= \text{रु.20,000}$$

जम्मा कमिसन बापतको रकम = रु.5,000 + रु.5,000 + रु.20,000 = रु.30,000

के यो प्रश्नलाई अन्य तरिकाले पनि हल गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस्।

अभ्यास 3.1

1. तल दिइएको प्रत्येक अवस्थामा कमिसन बापतको रकम र कमिसनपछिको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

	विवरण	जम्मा बिक्री मूल्य	कमिसनको दर
क)	घर	रु. 80 लाख	3 %
ख)	प्रिन्टिङ मेसिन	रु. 1 करोड	10 %
ग)	सेयर कारोबार	रु. 1 करोड 20 लाख	2 %
घ)	जग्गा	रु. 5 करोड	5 %

2. (क) सिमेन्ट पसलमा काम गर्ने एक जना कर्मचारीले मासिक रु. 8000 तलब पाउँछन् । महिनामा रु. 10 लाखभन्दा माथिको बिक्रीमा 1.5 प्रतिशत कमिसन पाउँछन् । यदि एक महिनामा रु. 24,00,000 को सिमेन्ट बिक्री भएछ भने उनको मासिक आम्दानी कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा कागज उद्योगमा काम गर्ने बजार प्रतिनिधिको मासिक तलब रु. 15,000 छ । उनले एक महिनामा रु. 30 लाखभन्दा माथिको कागज बिक्री गरेमा 2 प्रतिशत कमिसन पाउँछन् । यदि कुनै महिनामा रु. 48 लाखको कागज बिक्री भएछ भने उनको सो महिनाको आम्दानी कति हुन्छ र अर्को महिनामा उनको आम्दानी रु. 59000 हुन कति रकमको कागज बिक्री हुनुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (क) एउटा पुस्तक पसलमा कार्यरत कर्मचारीको मासिक तलब रु. 13,000 छ । उनले जम्मा बिक्री रकमको केही प्रतिशत कमिसन पाउँछ । यदि महिनामा रु. 10,00,000 को बिक्री भएछ र उनले जम्मा रु. 28,000 आम्दानी गरेछन् भने कमिसनको दर कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा खेलौना पसलमा काम गर्ने कर्मचारीको मासिक तलब रु. 7,500 छ । उनले एक महिनामा रु. 1,20,000 को खेलौना बिक्री गरेछन् । यदि उनले महिनामा 13,500 कमाएछन् भने कमिसनको दर कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा कम्पनीले एजेन्टहरूलाई निम्न दरका हिसाबले कमिसन दिन्छ ।

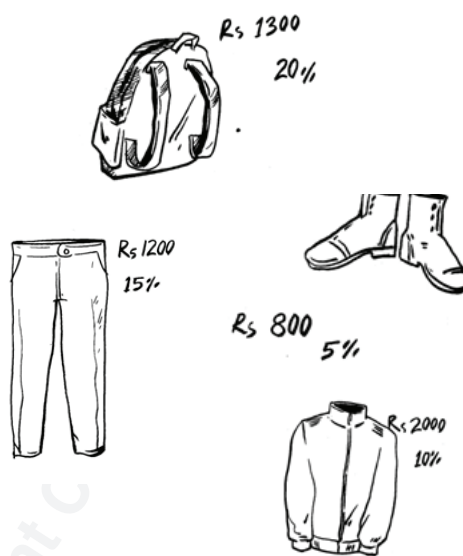
- रु. 15 लाखसम्मको बिक्रीमा 0.5%
- रु. 15 लाखदेखि रु. 25 लाखसम्मको बिक्रीमा 1%
- रु. 25 लाखदेखि रु. 40 लाखसम्मको बिक्रीमा 1.5 %
- रु. 40 लाखभन्दा माथिको बिक्रीमा 2%

उक्त कमिसन दर प्रयोग गरी तल दिइएको बिक्री रकमबाट प्राप्त हुने कमिसन रकम पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) रु. 12 लाख (ख) रु. 24 लाख (ग) रु. 38 लाख (घ) रु. 60 लाख

3.2 छुट (Discount)

छेउको चित्रमा रञ्जनको पसलमा बिक्रीमा राखिएका सामानहरूमा फरक फरक प्रतिशत छुट लेखिएको छ । उक्त लेखिएको छुट प्रतिशतअनुसार मूल्य कम गर्दा सामानहरू कति रकम तिरेर किन्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् । व्यापारमा तुरुन्त रकम भुक्तान गरिदिए बापत सामानको अङ्कित मूल्यभन्दा कम मूल्यमा बिक्री गर्ने गरी सहूलियत प्रदान गरिएको हुन्छ । उक्त सहूलियत रकमलाई छुट रकम भनिन्छ । कुनै वस्तुको अङ्कित मूल्य, क्रय मूल्यमा केही प्रतिशत रकम थप गरेर टाँसिएको हुन्छ । जसले गर्दा उक्त वस्तुको बिक्री गरेपछि नाफा हुन्छ । नगदी



छुट (cash discount) र व्यापारिक छुट (trade discount) गरी छुट जम्मा दुई प्रकारले गरिन्छ । हामी कक्षा 9 मा नगदी छुटका बारेमा मात्र अध्ययन गर्छौं । व्यापारीहरूले ग्राहकहरूलाई आफूले बेचेको सामानमा अङ्कित मूल्यको केही प्रतिशत रकम सहूलियत दिने गर्छन् । यसलाई नगदी छुट (cash discount) भनिन्छ । समय, परिस्थिति र सामानको प्रकृति हेरेर छुट दिने गरिन्छ । विभिन्न चाडपर्वहरूको अवसरमा बढी रकम छुट दिने गरिन्छ भने अन्य समयमा कम रकम छुट दिने चलन छ ।

क्रियाकलाप : 2

कक्षामा उपस्थित विद्यार्थीहरू मध्ये केही विद्यार्थीहरू चार चार जनाको समूहमा बसौं । प्रत्येक समूहले स्थानीय क्षेत्रमा पाइने कुनै पाँच ओटा वस्तुहरूको एउटै अङ्कित मूल्य निर्धारण गरौं । समूहले ती सामानमा दिन सकिने छुट प्रतिशत तोकौं । एउटा समूहले तोकेको छुट प्रतिशत अर्को समूहलाई जानकारी नहुने अवस्था सिर्जना गरौं । ती चार समूहलाई चार ओटा पसल नामाकरण गरौं । समूहमा नपरेका विद्यार्थीहरूले उनीहरू कहाँ ती सामानहरू के कतिमा किन्न पाइन्छ, टिपोट गरौं । प्रत्येक सामान सबभन्दा सस्तो र सबभन्दा महँगो कुन पसलमा पाइन्छ, पत्ता लगाइ समग्र कार्यलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरौं ।

छुट सम्बन्धी समस्या समाधान गर्दा निम्न लिखित सूत्रहरू प्रयोग गर्न सकिन्छ :

छुट रकम = अङ्कित मूल्यको निश्चित प्रतिशत

छुट रकम = अङ्कित मूल्य - विक्रय मूल्य (छुटपछिको मूल्य)

विक्रय मूल्य (छुटपछिको मूल्य) = अङ्कित मूल्य - छुट रकम

$$\text{छुट प्रतिशत} = \frac{\text{छुट रकम}}{\text{अङ्कित मूल्य}} \times 100\%$$

माथिका सूत्रहरूलाई सरलीकरण गरेर अरू कति ओटा नयाँ सूत्र बनाउन सकिन्छ, खोजी गर्नुहोस् ।

उदाहरण : 1

रु. 450 अङ्कित मूल्य भएको एउटा पुस्तकमा 10 % छुट दिएर बेच्दा कतिमा बेच्न सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, पुस्तकको अङ्कित मूल्य = रु. 450

छुट प्रतिशत = 10%

छुट रकम = रु. 450 को 10%

$$= \text{रु. } 450 \times \frac{10}{100}$$

$$= \text{रु. } 45$$

छुट पछिको मूल्य (विक्रय मूल्य) = रु. 450 - रु. 45 = रु. 405

उदाहरण : 2

रु. 500 अङ्कित एउटा कमिजलाई छुट दिएपछि रु. 400 मा किन्न सकिन्छ । छुट प्रतिशत कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, कमिजको अङ्कित मूल्य = रु. 500

छुटपछिको मूल्य = रु. 400

छुट रकम = रु. 100

मानौं, छुट = x %

अतः $100 = 500$ को x %

$$\text{अथवा, } 100 = 500 \times \frac{x}{100}$$

$$\text{अथवा, } 100 = 5x$$

$$\text{अथवा, } \frac{100}{5} = x$$

$$\text{अथवा, } 20 = x$$

छुट प्रतिशत = 20%

वैकल्पिक विधि

यहाँ अङ्कित मूल्य = रु. 500

छुटपछिको मूल्य = रु. 400

छुट रकम = रु. 500 - रु. 400

$$= \text{रु. } 100$$

$$\text{छुट प्रतिशत} = \frac{\text{छुट रकम}}{\text{अङ्कित मूल्य}} \times 100\%$$

$$= 20\%$$

उदाहरण : 3

एउटा घडीको अङ्कित मूल्य यसको क्रय मूल्यभन्दा 25% बढी छ। उक्त घडीलाई 15% छुट दिएर बेच्दा रु.200 नाफा हुन्छ। उक्त घडीको अङ्कित मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान:

$$\text{मानौं, क्रय मूल्य} = \text{रु. } x$$

$$\text{अङ्कित मूल्य} = x + \frac{25}{100}x = \frac{5x}{4}$$

$$\text{छुट रकम} = \frac{5x}{4} \text{ को } 15\%$$

$$= \frac{5x}{4} \times \frac{15}{100}$$

$$= \frac{15x}{80}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{5x}{4} - \frac{15x}{80}$$

$$= \frac{100x - 15x}{80}$$

$$= \frac{85x}{80}$$

$$= \frac{17x}{16}$$

$$\text{फेरि नाफा} = \text{रु. } 200$$

$$\text{अथवा, विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} = \text{रु. } 200$$

$$\text{अथवा, } \frac{17x}{16} - x = \text{रु. } 200$$

$$\text{अथवा, } \frac{17x - 16x}{16} = \text{रु. } 200$$

$$\text{अथवा, } x = \text{रु. } 200 \times 16$$

$$\text{अथवा, } x = \text{रु. } 3200$$

$$\therefore \text{अङ्कित मूल्य} = \frac{5x}{4} = \text{रु. } \frac{5 \times 3200}{4}$$

$$= \text{रु. } 4000$$

उदाहरण : 4

एउटा सुटकेस 15% छुट दिएर बेच्दा रु. 250 नाफा हुन्छ । उक्त सुटकेसलाई 30% छुट दिएर बेच्दा रु. 500 नोक्सान हुन्छ भने सो सुटकेसको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

मानौं, सुटकेसको अङ्कित मूल्य = रु. x

छुट प्रतिशत = 15% हुँदा

$$\text{छुट रकम} = \frac{15}{100} \times x = \frac{3x}{20}$$

$$\begin{aligned} \text{विक्रय मूल्य} &= x - \frac{3x}{20} \text{ [अङ्कित मूल्य - छुट]} \\ &= \frac{17x}{20} \end{aligned}$$

नाफा = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य

$$\text{अथवा, } 250 = \frac{17x}{20} - \text{क्रय मूल्य}$$

$$\text{अथवा, क्रय मूल्य} = \frac{17x}{20} - 250 \dots \dots \dots (1)$$

फेरि, छुट प्रतिशत = 30% हुँदा

$$\text{छुट रकम} = \frac{30}{100} x = \frac{3x}{10}$$

विक्रय मूल्य = अङ्कित मूल्य - छुट रकम

$$= x - \frac{3x}{10} = \frac{7x}{10}$$

नोक्सान = रु. 500

क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य = रु. 500

$$\text{अथवा, } \frac{17x}{20} - 250 - \frac{7x}{10} = \text{रु. } 500$$

$$\text{अथवा, } \frac{17x - 250 \times 20 - 7x \times 2}{20} = \text{रु. } 500$$

$$\text{अथवा, } 3x - 5000 = \text{रु. } 10000$$

$$\text{अथवा, } 3x = \text{रु. } 15000$$

$$\text{अथवा, } x = \text{रु. } \frac{15000}{3}$$

$$\text{अथवा, } x = \text{रु. } 5000$$

त्यसैले सुटकेसको अङ्कित मूल्य = रु.5000

अभ्यास 3.2

1. तल दिइएको प्रत्येक अवस्थामा छुट रकम र छुटपछिको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

	सामानको नाम	अङ्कित मूल्य	छुट दर
(क)	चामलको बोरा	रु. 1300	5%
(ख)	खाने तेल	रु. 80	2%
(ग)	चप्पल (एक जोर)	रु. 150	15%
(घ)	पुस्तक	रु. 180	8%
(ङ)	पाइन्ट	रु. 700	20%

2. तल दिइएको जानकारीका आधारमा छुट रकम र छुटको दर पत्ता लगाउनुहोस् :

	सामानको नाम	अङ्कित मूल्य	छुट दिएपछिको मूल्य
(क)	जुत्ता (एक जोर)	रु. 400	रु. 360
(ख)	चिउरा (3 केजी)	रु. 300	रु. 276
(ग)	चिनी (15 केजी)	रु. 1050	रु. 1029
(घ)	आलु (30 केजी)	रु. 1200	रु. 1188

3. (क) एउटा रेडियोको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यभन्दा 20% बढी छ। उक्त रेडियोलाई 10% नाफा हुने गरी बेचियो। यदि नाफा रु. 80 छ भने अङ्कित मूल्य कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ख) एउटा टोपीको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यभन्दा 25% ले बढी छ। यदि उक्त टोपीलाई 10% छुटमा बेच्दा रु. 37.50 नाफा हुन्छ भने उक्त टोपीको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस्।
4. (क) एउटा घडी 10% छुट दिएर बेच्दा रु. 5 नोक्सान हुन्छ। उक्त घडी 5% छुट दिएर बेच्दा रु. 22.50 नाफा हुन्छ। घडीको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ख) एउटा मोबाइल सेट 15% छुट दिएर बेच्दा रु. 100 नाफा हुन्छ। 20% छुट दिएर बेच्दा रु. 800 नोक्सान हुन्छ। उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस्।
5. आफ्नो घर नजिकको पसलमा दैनिक उपभोग्य सामानमा के कति प्रतिशत छुट दिने गरिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्। उक्त नतिजा कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

3.3 कर (Tax)

तल दिइएका प्रश्नहरू डोल्माको मनमा उठेका प्रश्नहरू हुन् । यी प्रश्नहरूका बारेमा हामीले पनि सोचौं ।

- (क) सरकारले प्रशासनिक, स्वास्थ्य, शिक्षा आदि क्षेत्रमा गर्ने खर्च कसरी जुटाउँछ होला ?
- (ख) सरकारले जनतासँग केही रकम असुल्छ, यो किन होला ? घरधुरीबाट तिरो तिर्ने गरिन्छ, किन होला ? विभिन्न सञ्चार माध्यमबाट वार्षिक बजेटका बारेमा अर्थ मन्त्रीले भाषण गर्छन्, जसमा करको कुरा गरिएको हुन्छ, किन होला ?
- (ग) कुनै व्यक्ति वा समूहको वार्षिक आमदानी सरकारले तोकेको सीमाभन्दा बढी भए के होला ?
- (घ) रेडियो र टेलिभिजनमा "करदाता मैत्री कर प्रशासन, समृद्धि र सुशासन, हाम्रो अभियान" भन्ने वाक्य सुनिन्छ । यसको अर्थ के होला ?

यी डोल्माका मनमा उठेका प्रश्नहरू करसँग सम्बन्धित प्रश्नहरू हुन् । कानून, विधान वा संविधानअनुसार सरकार वा सरकारी निकायले जनतासँग उठाउने रकमलाई कर भनिन्छ । करलाई प्रथम पटक लागु गर्ने देश जापान हो । आयकर, घरजग्गा कर, सम्पत्ति कर, पारिश्रमिक कर, सवारी कर, मूल्य अभिवृद्धि कर र भन्सार महसुल नेपालका प्रचलित करहरू हुन् ।

कर प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष गरी दुई प्रकारका हुन्छन् । प्रत्यक्ष कर अरूमाथि सार्न नमिल्ने कर हो । नेपाल सरकारले रोजगारी, लगानी, सम्पत्ति, घरजग्गा, मालपोत, बिक्री, घर बहाल, आकस्मिक धनलाभ आदिमा प्रत्यक्ष कर उठाउने गरेको पाइन्छ । अप्रत्यक्ष कर अरूमाथि भार सार्न मिल्ने कर हो । नेपाल सरकारले मनोरञ्जन कर, मूल्य अभिवृद्धि कर आदिका माध्यमबाट अप्रत्यक्ष कर लिने गरेको छ ।

2065 साल असोज महिनादेखि निजी क्षेत्रबाट सञ्चालित शिक्षण संस्थाहरूले लिने शुल्कमा शिक्षा सेवा कर लाग्छ । उक्त कर (क) निजी शैक्षिक संस्थाहरूलाई भर्ना शुल्क र मासिक शिक्षण शुल्कको एक प्रतिशत (1%) (ख) विदेशमा अध्ययन गर्न जाने विद्यार्थीहरूलाई शिक्षण शुल्क बापत विदेशी मुद्रा सटही सुविधा दिँदा त्यस्तो सटही रकममा प्रतिशत (1%) कर लाग्छ ।

यहाँ, हामी आमदानी कर (आयकर) का बारेमा अध्ययन गर्नेछौं । सरकारले व्यक्तिगत वा सामूहिक आमदानीमा लगाउने करलाई आमदानी कर (आयकर) भनिन्छ ।

कुनै पनि व्यक्ति वा समूहको आमदानी सरकारले तोकेको सीमाभन्दा बढी भयो भने त्यस्तो बढी भएको आमदानीमा सरकारले निश्चित प्रतिशतमा आयकर लगाउँछ । नेपालमा आयकरको व्यवस्थापन गर्ने काम आन्तरिक राजस्व विभागले गर्दछ ।

आन्तरिक राजस्व विभागका अनुसार आमदानी कर गणना गर्ने नियम निम्नानुसार छ । यसलाई अध्ययन गरौं र अध्ययन गरिसकेपछि उक्त तालिकाका सम्बन्धमा कक्षाकोठामा छलफल गरौं ।

वार्षिक 30 लाखसम्मको (तेस्रो कर दिवस विशेषाङ्क २०७१ अनुसार)

एकल व्यक्तिका लागि		दम्पत्तिका लागि	
शीर्षक	कर प्रतिशत	शीर्षक	कर प्रतिशत
१. वार्षिक रोजगारीको कर योग्य आयको पहिलो रु. २ लाख पचास हजार रुपैयाँसम्म	१%	१. वार्षिक रोजगारीको करयोग्य आयको पहिलो रु. तिन लाखसम्म	१%
२. वार्षिक दुई लाख पचास हजार रुपैयाँ भन्दा बढी तर तिन लाख पचास हजारसम्मको हकमा	१५%	२. वार्षिक तिन लाख रुपैयाँभन्दा बढी तर चार लाखसम्मको हकमा	१५%
३. वार्षिक तिन लाख पचास हजार रुपैयाँभन्दा बढी तर पच्चिस लाख रुपैयाँसम्मको हकमा	२५%	३. वार्षिक चार लाख रुपैयाँभन्दा बढी तर पच्चिस लाख रुपैयाँसम्मको हकमा	१५%
४. पच्चिस लाख रुपैयाँभन्दा बढीको रु. पाँच लाखमा	२५%	४. पच्चिस लाख रुपैयाँभन्दा बढीको रु. पाँच लाखमा	२५%
५. पच्चिस लाख भन्दा माथिको रु. ५ लाखको २५ प्रतिशतले हुने रु. १ लाख पच्चिस हजारको थप	४०%	५. पच्चिस लाख भन्दा माथिको रु. ५ लाखको २५ प्रतिशतले हुने रु. एक लाख पच्चिस हजारको थप	४०%
जम्मा वार्षिक ३० लाख आयको कर रु. ७,३०,०००		जम्मा रु. ३० लाख आयको वार्षिक कर बापत रकम रु. ७,१८,०००	

नोट : कर सम्बन्धी विस्तृत जानकारी पाउन (<http://www.ird.gov.np>) मा हेर्न सकिन्छ ।

हामीले कमाएको सम्पत्तिमा पाएको कर छुट निम्न लिखित शीर्षकहरूमा दिइएको हुन्छ :

- (क) कर्मचारी सञ्चय कोषमा जम्मा हुन गएको रकममा
- (ख) नागरिक लगानी कोषमा जम्मा हुन गएको रकममा
- (ग) जीवन बिमा बापत तिरेका प्रिमियम खर्चमा
- (घ) धार्मिक कार्यका लागि गरेको खर्चमा
- (ङ) चन्दा दिएको रकममा

(च) दुर्गम भत्ता बापत प्राप्त गरेको रकममा

(छ) वैदेशिक भत्ताको 75 प्रतिशत रकममा

(ज) औषधी उपचारमा लागेको खर्चमा आदि ।

यी शीर्षकहरूमा लाग्ने कर वार्षिक आमदानीबाट घटाएपछि बाँकी रहेको आमदानीमा लाग्ने गर्दछ ।

क्रियाकलाप : 3

कक्षामा उपस्थित सबै विद्यार्थीहरू चार समूहमा बसौं । प्रत्येक समूहले करका प्रकारहरू जस्तै : आमदानी कर, सम्पत्ति कर, बिक्री कर र अन्तःशुल्क करमध्ये एउटाका सम्बन्धमा आफूले थाहा पाएका जानकारीहरूका बारेमा छलफल गरौं । छलफलबाट प्राप्त नतिजालाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरौं । थप जानकारीका लागि शिक्षकलाई सोधौं ।

उदाहरण : 1

राम अवतारले रु. 12000 पर्ने सुटकेसमा 15% छुट पाए । छुटपछिको मूल्यमा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर तिर्दा उनले जम्मा कति रकम कर तिरेछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, सुटकेसको अङ्कित मूल्य = रु. 12000

$$\begin{aligned}\text{छुट रकम} &= \text{रु. } 12,000 \text{ को } 15\% \\ &= \text{रु. } 12000 \times \frac{15}{100} \\ &= \text{रु. } 1800\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{छुटपछिको मूल्य} &= \text{रु. } 12000 - \text{रु. } 1800 \\ &= \text{रु. } 10,200\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कर बापतको रकम} &= \text{रु. } 10200 \text{ को } 13\% \\ &= \text{रु. } 10200 \times \frac{13}{100} \\ &= \text{रु. } 1326\end{aligned}$$

उदाहरण : 2

एउटा संस्थागत विद्यालयमा 600 जना विद्यार्थीहरू अध्ययन गर्छन् । एक जनाको औसत मासिक शुल्क रु. 1200 छ । 1% शिक्षा सेवा करका दरले वर्षमा शिक्षा सेवा कर बापत उक्त विद्यालयले सरकारलाई कति रकम बुझाउनु पर्दछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ एक जनाको औसत मासिक शुल्क = रु. 1200

600 जनाको मासिक शुल्क = रु. 600 × रु. 1200
= रु. 7,20,000

600 जनाको वार्षिक शुल्क = 12 × रु. 7,20,000
= रु. 86,40,000

कर बापतको रकम = रु. 8640000 को 1%
= रु. 8640000 × $\frac{1}{100}$
= रु. 86,400

उदाहरण : 3

एउटा बैङ्कमा काम गर्ने अविवाहित कर्मचारीको मासिक तलब रु. 75000 छ । उनको आमदानीको 67% मा कर छुट हुन्छ । बाँकी रकममा वार्षिक कति आमदानी कर तिर्नुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । (अधिल्लो पेजमा दिइएको करको दरका आधारमा पत्ता लगाउनुहोस् ।)

समाधान :

यहाँ, मासिक आमदानी = रु. 75000

वार्षिक आमदानी = रु. 75000 × 12
= रु. 900000

कर छुट रकम = रु. 900000 को 67%
= रु. 603000

कर योग्य आमदानी = रु. 900000 - रु. 603000
= रु. 297000

पहिलो 2 लाख 50 हजारमा कर विवरणअनुसार,

1% कर = रु. 250000 × $\frac{1}{100}$
= रु. 2500

बाँकी आमदानी = रु. 297000 - रु. 250000
= रु. 47000

कर विवरणअनुसार तिर्नुपर्ने कर = 15%

तसर्थ, रु. 47,000 को 15%

$$= \text{रु. } 47,000 \times \frac{15}{100}$$
$$= \text{रु. } 7,050$$

अतः आवश्यक वार्षिक आयकर रकम = रु. 2500 + रु. 7050
= रु. 9550

अभ्यास 3.3

1. तल दिइएका प्रश्नहरूमा छुट पछिको मूल्यमा लागने कर बापतको रकम पत्ता लगाउनुहोस् :

	सामानको नाम/विवरण	अङ्कित मूल्य	छुट प्रतिशत	करको दर
(क)	लुगा सिउने मेसिन	रु. 12000	15%	13%
(ख)	फोटोकपी मेसिन	रु. 40000	10%	13%
(ग)	कम्प्युटर	रु. 60000	5%	13%
(घ)	प्रिन्टर	रु. 12000	8%	13%

2. तल दिइएको तालिकामा एउटा संस्थागत विद्यालयमा कक्षा 1 देखि 10 सम्म अध्ययन गर्ने एक जना विद्यार्थीले तिर्ने मासिक शुल्क र भर्ना शुल्क दिइएको छ। भर्ना शुल्क र मासिक शुल्कबाट 1 वर्षमा उठ्ने रकममा 1% शिक्षा सेवा कर तिर्दा जम्मा कति रकम कर तिर्नुपर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या	मासिक शुल्क	भर्ना शुल्क (वर्षमा एक पटक)
1	40	रु. 1200	रु. 3000
2	38	रु. 1300	रु. 3000
3	39	रु. 1400	रु. 3000
4	42	रु. 1500	रु. 3000
5	45	रु. 1600	रु. 3000
6	36	रु. 1700	रु. 3000
7	37	रु. 1800	रु. 3000
8	34	रु. 1900	रु. 4500
9	32	रु. 2000	रु. 5000
10	30	रु. 2100	रु. 5000

3. तलको तालिकामा विभिन्न पेसामा काम गर्ने व्यक्तिहरूको मासिक आम्दानी र वार्षिक कर छुट रकम दिइएको छ। अघिल्लो पेजमा दिइएको आयकरको तालिका हेरी वार्षिक आय रकम र कर कट्टीपछि एक महिनामा पाउने तलब पत्ता लगाउनुहोस्।

क्र.सं.	व्यक्तिको नाम	मासिक आमदानी	कर छुट रकम	वैवाहिक अवस्था
1	शिवनारायण	रु. 25,000	आमदानी को 15%	अविवाहित
2	लालबाबु	रु. 27,000	रु. 60,000	अविवाहित
3	पासाङ	रु. 32,000	रु. 1,08,000	विवाहित
4	हिम्मत	रु. 40,000	रु. 2,00,000	विवाहित
5	लक्ष्मी	रु. 45,000	आमदानी को 33%	विवाहित
6	सलमा	रु. 18,000	आमदानी को 10%	अविवाहित

3.4 लाभांश (Dividend)

स्मृतिले एउटा बैङ्कमा लगानी गरेकी छिन् । उनलाई बैङ्कले 5000 कित्ता सेयर उपलब्ध गराएको छ । बैङ्कमा जम्मा 1 लाख सेयर कित्ताहरू छन् । प्रति सेयर कित्ताको रु. 100 पर्छ । बैङ्कले 1 वर्षमा रु. 1 करोड मुनाफा कमायो र 20% लाभांश दिने निर्णय गर्‍यो । अब स्मृतिले जम्मा कति रकम लाभांश बापत प्राप्त गरिन्, अनुमान गरौं ।

यहाँ, बैंकको जम्मा वार्षिक मुनाफा = रु. 1 करोड

$$\begin{aligned} \text{रु. 1 करोडको 20\%} &= \text{रु. } 10000000 \times \frac{20}{100} \\ &= \text{रु. } 20,00,000 \end{aligned}$$

फेरि, 100000 कित्ता सेयरको मुनाफा = रु. 20,00,000

$$\begin{aligned} \text{1 कित्ता सेयरको मुनाफा} &= \text{रु. } 2000000/100000 \\ &= \text{रु. } 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{5000 कित्ता सेयरको मुनाफा} &= \text{रु. } 20 \times 5000 \\ &= \text{रु. } 1,00,000 \end{aligned}$$

त्यसैले स्मृतिले रु. 1,00,000 लाभांश पाउँछिन् ।

कुनै कम्पनी अथवा नाफामूलक संस्थाको भागेदारले कम्पनी अथवा संस्थाले कमाएको नाफा रकमको केही रकम पाउँछन् । उक्त प्राप्त रकमलाई लाभांश (dividend) भनिन्छ ।

नेपालमा रहेका विभिन्न बैङ्क तथा वित्तीय संस्थाहरूले केन्द्रीय बैङ्क नेपाल राष्ट्र बैङ्कको अनुमति लिएर प्रत्येक वर्ष लाभांश दिने गर्छन् । यो लाभांश नगद लाभांश र सेयर लाभांश गरी दिने गरिन्छ । लाभांश अन्य कुन कुन संस्थाहरूमा दिने गरिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

महारुद्र वित्तीय संस्थामा रु. 100 का दरले 20,000 कित्ता सेयर छ । उक्त संस्थाले 1 वर्षमा रु. 2,00,000 खुद मुनाफा कमायो । यदि संस्थाले खुद मुनाफाको 1% नगद लाभांश सेयर धनीहरूलाई दिने निर्णय गरेछ भने प्रति सेयर कति लाभांश पाइन्छ, ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

$$\begin{aligned} \text{यहाँ जम्मा खुद मुनाफा} &= \text{रु. } 2,00,000 \\ \text{जम्मा नगद लाभांश} &= \text{रु. } 2,00,000 \text{ को } 1\% \\ \text{जम्मा नगद लाभांश} &= \text{रु. } 2,00,000 \times \frac{1}{100} \\ &= \text{रु. } 2000 \\ \text{फेरि, जम्मा कित्ता सङ्ख्या} &= 20,000 \\ \text{अतः } 20,000 \text{ कित्ता सेयरको लाभांश} &= \text{रु. } 2000 \\ \text{1 कित्ता सेयरको नगद लाभांश} &= \text{रु. } 2000/20000 \\ &= \text{रु. } 0.10 \\ &= 10 \text{ पैसा} \end{aligned}$$

अभ्यास 3.4

1. तल दिइएको तालिकाबाट कुल लाभांश र प्रतिसेयर लाभांश पत्ता लगाउनुहोस् :

कम्पनी	जम्मा सेयर कित्ता	लाभांश दर	खुद नाफा
(क)	2,50,000	23%	रु. 8,00,00,000
(ख)	3,00,000	21.5%	रु. 7,50,00,000
(ग)	2,50,000	12%	रु. 12,00,00,000
(घ)	2,20,000	34.75%	रु. 2,80,00,000
(ङ)	2,40,000	51%	रु. 50,00,000

2. (क) मयुर सहकारी संस्थामा रु.100 का दरले 20,000 कित्ता सेयर छ। आकाशको उक्त सहकारी संस्थामा 500 कित्ता सेयर छ। उक्त सहकारी संस्थाले वर्षमा रु. 6,00,000 मुनाफा कमाएछ र सेयर धनीहरूलाई खुद मुनाफाको 10% नगद लाभांश दिने निर्णय गरेछ। आकाशले जम्मा कति नगद लाभांश पाएछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।
- (ख) एउटा हाइड्रोपावर कम्पनीको रु.100 पर्ने 25,000 कित्ता सेयर छ। उक्त कम्पनीले वार्षिक रु. 5,00,000 मुनाफा गर्छ। यदि कम्पनीले 25% नगद लाभांश दिने निर्णय गरेछ भने 300 कित्ता सेयर भएको सेयर धनीले जम्मा कति नगद लाभांश पाएछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।
3. आफ्नो नजिकमा रहेको बैङ्क, वित्तीय संस्था अथवा अन्य सेयर निस्कासन गर्ने संस्थामा के कसरी लाभांश दिने गरिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्। उक्त लाभांश दिने संस्थाअनुसार रु. 50 हजारमा कति ओटा प्राथमिक सेयर (primary share) किन्न सकिन्छ र एक वर्षमा कति लाभांश पाइन्छ, गणना गर्नुहोस्।

4.0 पुनरावलोकन

12 ओटा कलमको मूल्य रु. 360 पर्छ भने एउटा कलमको मूल्य कति पर्ला ? रु. 500 को 10% जरिवानासहित कति हुन्छ होला ? रु.300 मा 20% छुट दिइयो भने उक्त रकम कति होला ?

यी प्रश्नहरू ऐकिक नियम र प्रतिशतसँग सम्बन्धित छन्, जुन हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा पढिसकेका छौं। जसअनुसार एकाइ मूल्यको जानकारीपछि त्यसका आधारमा त्यही प्रकारका धेरै वस्तुको मूल्य पत्ता लगाउन सकिन्छ। त्यस्तै एउटै प्रकारका धेरै वस्तुहरूको मूल्य थाहा भएको अवस्थामा उस्तै एउटा वस्तुको मूल्य पत्ता लगाउन सकिन्छ।

उस्तै धेरै वस्तुहरूको मूल्य = एउटा वस्तुको मूल्य x वस्तुहरूको सङ्ख्याको सम्बन्धबाट माथिका प्रश्नहरू हल गर्न सकिन्छ। त्यस्तै कुनै सङ्ख्याको केही प्रतिशत बढी र केही प्रतिशत कम हुने रकम पत्ता लगाएपछि जोड, घटाउ, गुणन, भाग आदि क्रियाबाट आवश्यक रकम पत्ता लगाउन सकिन्छ। हाम्रो घरमा उपभोग गरिने बिजुली, पानी र टेलिफोनको बिलको महसुल तिर्ने बेलामा ऐकिक नियम र प्रतिशतको प्रयोग हुन्छ।

ग्राहकले घरमै बसेर सञ्चार प्रविधि प्रयोग गरी बिजुली, पानी, टेलिफोन आदिको बिल थाहा पाउन र तिर्न सक्छन्। जस्तै : नेपाल टेलिकमको साधारण टेलिफोन (PSTN) को बिल थाहा पाउन सोही फोनबाट 1606 मा डायल गर्न सकिन्छ। ग्राहकहरूले सम्बन्धित कार्यालयमा पङ्क्ति लागेर बिल तिर्नुभन्दा सञ्चार प्रविधिको प्रयोग गरी बिल तिर्ने बानी बसाल्नु ("Putting peoples online but not in line") ICT को प्रमुख उद्देश्य हो।

4.1 बिजुलीको प्रयोगबारे घरायसी खर्चको हिसाब (House hold expenses for use of electricity):

नेपाल विद्युत प्राधिकरणले विद्युत खपत गरेअनुसार बिल दिएको हुन्छ। प्राधिकरणले उपलब्ध गराउने बिलको प्रति तलको चित्रमा देखाइएको छ। उक्त बिल बापतको रकम नजिकको विद्युत प्राधिकरण शाखामा गएर बुझाउनुपर्दछ। हाम्रा घरमा जडान गरिने तल्लो भोल्टेज स्तर 220-400 भोल्टसम्मका मिटरको क्षमता र शुल्क निम्नानुसार छ :


इनर्जी मिटर क्षमता	न्यूनतम शुल्क	न्यूनतम युनिट
5 एम्पियरसम्म	रु. 80	20
6 - 15 एम्पियरसम्म	रु. 365	50
16 - 30 एम्पियरसम्म	रु. 795	100
31 - 60 एम्पियरसम्म	रु. 1765	200

वि.सं. 2071 मा दिइएको बिलअनुसार विद्युत खपत गरे बापतको इनर्जी शुल्क निम्नानुसार लिने गरिन्छ :

1. 20 युनिटसम्म रु. 4 प्रतियुनिटका दरले ।
2. 21 देखि 50 युनिटसम्म रु. 7.30 प्रतियुनिट, 30 युनिट खपत भएमा 20 युनिटसम्म प्रतियुनिट रु. 4 र 21 देखि 30 युनिटसम्म रु. 7.30 प्रति युनिटका दरले शुल्क लिने गरिन्छ । तर 30 युनिट भन्दा बढी खपत भएमा 1 युनिटदेखि नै रु.7.30 प्रतियुनिटका दरले शुल्क लिने गरिन्छ ।
3. 51 देखि 150 युनिटसम्म रु.8.60 प्रतियुनिटका दरले, 0 – 50 युनिटसम्म सुरूको युनिटदेखि नै रु.7.30 प्रतियुनिटका दरले र 51 – 150 युनिटसम्मको खपतमा रु. 8.60 प्रतियुनिटका दरले शुल्क लिने गरिन्छ ।
4. 151 देखि 250 युनिटसम्म रु. 9.50 प्रतियुनिट 0 – 150 युनिटसम्म सुरूको युनिटदेखि नै रु.8.60 प्रतियुनिट र 150 – 250 युनिटसम्म रु. 9.50 प्रतियुनिटका दरले शुल्क लिने गरिन्छ ।
5. 251 देखिमाथि रु. 11.50 प्रतियुनिटका दरले 0 – 250 युनिटसम्म रु. 9.50 प्रतियुनिट र 250 युनिटभन्दा बढीको खपतमा रु. 11.50 प्रति युनिटका दरले शुल्क लिने गरिन्छ ।

ग्राहकले महसुल बुझाउँदा निम्नअनुसार छुट तथा जरिवानाको व्यवस्था छ :

1. मिटर रिडिङ हुने मितिले 7 दिनभित्र महसुल तिरेमा 3% छुट तर न्यूनतम रु.80 बिल रकम भएमा रु. 4 एकमुष्ट छुट पाइन्छ ।
2. मिटर रिडिङ गरेको 8 औं दिनदेखि 22 औं दिनसम्म बिलअनुसार महसुल लाग्छ ।
3. मिटर रिडिङ गरेको 23 औं दिनदेखि 30 औं दिनसम्म बिलको 5% जरिवाना शुल्क लाग्छ ।
4. मिटर रिडिङ गरेको 31 औं दिनदेखि 40 औं दिनसम्म बिलको 10% जरिवाना शुल्क लाग्छ ।
5. मिटर रिडिङ गरेको 41 औं दिनदेखि 60 औं दिनसम्म बिलको 25% जरिवाना शुल्क लाग्छ ।
6. 60 औं दिनसम्म पनि महसुल नबुझाएमा विद्युत लाइन काटिन्छ ।



NEPAL

ELECTRICITY AUTHORITY
Distribution & Consumer Services

ELECTRICITY BILL

BRANCH: KULESHWOR DC	
BILL MTH & YEAR: FAL-2071	
BL NO: 10027401711000312	
SC NO: 274-01-017KA25	
CONSUMER ID: 100465976	
CATG: DOMESTIC (6-15A)	
NAME: AMBIKA AMASTHI	
ADDRESS: NOADD1 MAHADEVISTAN	
METER NO: 020899	MTR STS: NOR
MF: 1.00	APPROVED LOAD: 0.00
PRESENT RDG: 3877	PREVIOUS RDG: 3849
UNITS: 28	RECORDED DMD: 0.00
BILLABLE DMD: 15.00	
ENERGY CHARGES: 365.00	DEMAND CHARGES: 0.00
SUBSIDY CHARGES: 0.00	OTHER CHARGES: 0.00
MTR RENT AMOUNT: 0.00	CURRENT AMOUNT: 365.00
ARREARS AMOUNT: -0.77	BILL AMOUNT: 364.23
INSTALLMENT: 0.00	
SBM ID: A1044H12UER: 1.17	READER: RL

CFL विगको प्रयोग गरी विद्युतको महशुल घटाऔं

ठुला ठुला उद्द्योग सञ्चालन गर्न मझौला भोल्टेज स्तरको मिटर जडान गरिन्छ र महसुल दर पनि फरक हुन्छ । यसका बारेमा हामी नजिकैको नेपाल विद्युत प्राधिकरण कार्यालयमा गएर जानकारी लिन सक्छौं ।

उदाहरण 1

महादेवथान- 3, काठमाडौं स्थित अम्बिकाको घरको 2071 साल मझिसिर महिनाको बिजुलीको बिलको विवरण निम्नानुसार छ :

मिटरको क्षमता	Domestic (6 – 15A)
साबिक अड्क	3568
हालको अड्क	3697

उक्त बिलका आधारमा निम्न प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् :

- अम्बिकाको घरमा मझिसिर महिनामा कति युनिट विद्युत खपत भएछ ?
- उक्त युनिटहरूको इनर्जी शुल्क कति लागेछ ?
- उनले मिटर रिडिङ भएको 5 औं दिनमा महसुल बुझाएछन् भने कति रकम बुझाएछन् ?
- यदि उनले मिटर रिडिङ भएको 18 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए कति रकम बुझाउनुपर्थ्यो ?
- यदि उनले मिटर रिडिङ भएको 24 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए कति रकम जरिवाना तिर्नुपर्थ्यो ?
- उनले मिटर रिडिङ भएको 35 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए कति रकम जरिवाना तिर्नुपर्थ्यो ?
- मिटर रिडिङ भएको 45 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए उनले जम्मा कति बिल रकम बुझाउनुपर्थ्यो ?

समाधान :

यहाँ, साबिक अड्क (previous reading) = 3568

हालको अड्क (current reading) = 3697

- खपत युनिट = हालको अड्क - साबिक अड्क
= 3697 - 3568
= 129

त्यसैले अम्बिकाको घरमा मझिसिर महिनामा 129 युनिट विद्युत खपत भएछ ।

- यहाँ, अम्बिकाको घरमा जम्मा 129 युनिट विद्युत खपत भएको छ । इनर्जी शुल्क (सिङ्गल फेज) को नियमानुसार, 50 युनिटसम्मको रु.7.30 प्रति युनिटका दरले लाग्ने जम्मा महसुल रकम = 50 x 7.30 = रु. 365.

उनका घरको मिटरको क्षमता 6-15 एम्पयर भएकाले उनको न्यूनतम शुल्क = रु. 365 पनि लेख्न सकिन्छ ।

51 देखि 150 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु.8.60 का दरले हिसाब गर्दा

51 – 129 सम्म जम्मा युनिट सङ्ख्या = 79

79 युनिटका अतिरिक्त जम्मा महसुल = $79 \times \text{रु.}8.60 = \text{रु.} 679.40$

अब 129 युनिटको जम्मा महसुल (मिटर रिडिङ गरेको दिनमा प्राप्त बिलमा) = रु. 365 + रु. 679.40
= रु. 1044.40

(ग) महसुल मिटर रिडिङ भएको 7 दिनभित्रमा बुझाएमा 3% छुट पाइन्छ । तर उनले 5 औं दिनमा महसुल बुझाएछन् । त्यसैले उनले बुझाएको महसुल बापतको जम्मा रकम = रु.1044.40 - रु.1044.40 को 3% = रु.1044.40 - रु. 31.33 = रु.1013.07

(घ) मिटर रिडिङ गरेको 8 औं दिनदेखि 22 औं दिनभित्रमा महसुल बुझाएमा बिलअनुसार रकम तिर्नुपर्छ । उनले 18 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए जम्मा रु.1044.40 बुझाउनुपर्थ्यो ।

(ङ) मिटर रिडिङ भएको 23 औं देखि 30 औं दिनभित्र महसुल बुझाएमा 5% जरिवाना तिर्नुपर्छ । यदि उनले 24 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए 5% जरिवाना तिर्नुपर्थ्यो ।

त्यसैले बुझाउनुपर्ने जरिवाना रकम = रु. 1044.40 को 5%

$$= \text{रु.} 1044.40 \times \frac{5}{100}$$
$$= \text{रु.} 52.22$$

(च) मिटर रिडिङ भएको 31 औं दिनदेखि 40 औं दिनभित्र महसुल बुझाएमा 10% जरिवाना तिर्नुपर्छ । यदि उनले 35 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए 10% जरिवाना तिर्नुपर्थ्यो ।

त्यसैले जरिवाना बापतको रकम = रु. 1044.40 को 10%

$$= \text{रु.} 1044.40 \times \frac{10}{100}$$
$$= \text{रु.} 104.44$$

(छ) मिटर रिडिङ भएको 41 औं दिनदेखि 60 औं दिनभित्र महसुल बुझाएमा 25% जरिवाना तिर्नुपर्छ । यदि उनले 45 औं दिनमा महसुल बुझाएको भए रु. 1044.40 मा 25% जरिवाना तिर्नुपर्थ्यो ।

त्यसैले महसुल बुझाउनुपर्ने जम्मा रकम = रु. 1044.40 + रु. 1044.40 को 25%

$$= \text{रु.} 1044.40 + \text{रु.} 1044.40 \times \frac{25}{100}$$
$$= \text{रु.} 1044.40 + \text{रु.} 261.10$$
$$= \text{रु.} 1305.50$$

नोट : महसुल गणना गर्दा कुनै महिनामा मिटर रिडिङ दशमलवमा आएमा दशमलवपछिको रिडिङ अर्को महिनामा गणना गरिन्छ । जस्तै : 10345.67 लाई 10345 मात्र लिने गरिन्छ । बाँकी 0.67 युनिट अर्को महिनामा थपिदै जान्छ ।

अभ्यास 4.1

1. तलको तालिकामा हिराको घरको वैशाखदेखि असोजसम्मको मिटर रिडिङ दिइएको छ ? उक्त तालिका अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

महिना	वैशाख	जेठ	असार	साउन	भदौ	असोज
मिटर रिडिङ	1024	1099	1182	1284	1419	1484

- (क) जेठ महिनामा खपत भएको जम्मा युनिट सङ्ख्या कति हो ?
- (ख) सबैभन्दा बढी विद्युत खपत भएको महिना कुन हो ?
- (ग) सबैभन्दा कम विद्युत खपत भएको महिना कुन हो ?
- (घ) जेठदेखि असोजसम्म जम्मा खपत भएका युनिटको सङ्ख्या कति हो ?
2. कमलको घरमा 6-15A क्षमताको मिटर जडान गरिएको छ । उक्त घरको कुनै एक महिनाको हालको अङ्क र साबिकको अङ्क दिइएको अवस्थामा विद्युत प्राधिकरणलाई बुझाउनुपर्ने जम्मा रकम पत्ता लगाउनुहोस् :
- (क) हालको अङ्क : 23452, साबिकको अङ्क : 23272, महसुल मिटर रिडिङ भएको तेस्रो दिनमा बुझाइएछ ।
- (ख) हालको अङ्क : 24782, साबिकको अङ्क : 24903, महसुल मिटर रिडिङ भएको पन्ध्रौँ दिनमा बुझाइएछ ।
- (ग) हालको अङ्क : 27819, साबिकको अङ्क : 27999, महसुल मिटर रिडिङ भएको अट्ठाइसौँ दिनमा बुझाइएछ ।
- (घ) हालको अङ्क : 30154, साबिकको अङ्क : 30402, महसुल मिटर रिडिङ भएको पैतिसौँ दिनमा बुझाइएछ ।
- (ङ) हालको अङ्क : 32337, साबिकको अङ्क : 32532, महसुल मिटर रिडिङ भएको चालिसौँ दिनमा बुझाइएछ ।
- (च) हालको अङ्क : 42516, साबिकको अङ्क : 42873, महसुल मिटर रिडिङ भएको अठ्चालिसौँ दिनमा बुझाइएछ ।
3. आफ्नो घर अथवा साथीका घरको 6 महिनाको बिजुलीको बिल सङ्कलन गर्नुहोस् । उक्त बिलको अध्ययन गरी निम्न लिखित प्रश्नहरूका उत्तर दिनुहोस् :
- (क) सबभन्दा कम विद्युत कुन महिनामा खपत भएछ र किन कम खपत भएछ ?
- (ख) सबभन्दा बढी विद्युत कुन महिनामा खपत भएछ र किन बढी खपत भएछ ?
- (ग) विद्युतको खपत कम गर्न के के उपायहरू अपनाउन सकिन्छ ?

4. विद्युतको बिल भुक्तानीमा ICT को प्रयोग तपाईंको घर छिमेकमा कसरी भएको छ, पत्ता लगाउनुहोस् । यसको प्रयोगबाट के फाइदा र के बेफाइदा भएको छ ? प्राप्त जानकारीलाई कक्षा कोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

4.2 खाने पानी प्रयोगबारे घरायसी खर्चको हिसाब (Household Expenses for Use of Water)

तल चित्रमा दिइएको बिल अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) जम्मा खपत युनिट कति छ ?
(ख) बिलमा जम्मा रकम कति छ ?

तल दिइएको बिलको रकम निम्न महसुल दरका आधारमा गणना गरिएको छ :

कठमाडौं उपत्यका खासपानी लिमिटेड		आ.फा.नं. १०	
महसुल बिल			
हालको बिल नं. ११८८	सा.ब. ११८८	जम्मा खपत	रकम
११८८	११८८	२५	
१२२७ वा १३०९ (२०२१ घ.)	११८८	बढी खपत	
शिवमणी बडरई	१२		
राजमुनि			
वसिना	२०५५ आचना		
नेका प्रमुख			
श्रीकी सम्पादन			
			५१८८

पाइप साइज (इन्चमा)	न्यूनतम उपभोग (लिटरमा)	(क) मिटर जडान भएका धाराहरूमा	
		न्यूनतम कायम गरिएको मूल्य (रु.)	बढी पानी प्रयोग हुँदा आयतनका आधारमा (प्रति १००० लिटर) रु.
1/2"	10,000	100	32
3/4"	27,000	1910	71
1"	56,000	3960	71
1.5"	1,55,000	10950	71
2"	3,20,000	22600	71
3"	8,81,000	62240	71
4"	1,810,000	127865	71

नियमानुसार $\frac{1}{2}$ इन्चको पाइपमा न्यूनतम 10,000 लिटर पानी 10 युनिट, (1 युनिट = 1000 लिटर) खपत गरिएको छ। त्यसपछि 16000 लिटर (16 युनिट) बढी पानी प्रयोग भएको देखिन्छ। न्यूनतम 10 युनिटको रु. 100 महसुल लाग्छ भने अतिरिक्त 16 युनिटको रु. $16 \times 32 =$ रु. 512 महसुल लाग्छ। जम्मा 26 युनिट खपत गरे बापत लाग्ने रकम = रु.100 + रु. 512 = रु. 612

ढल सेवा बापतको थप 50% रकम सहित जम्मा बिल रकम = रु. 612 + रु. 306 = रु. 918

$\frac{1}{2}$ इन्च भन्दा ठुलो साइजका पाइपहरू ठुला घरहरू, होटल, अस्पताल, कोलोनी आदिमा प्रयोग हुन्छन्। खानेपानीको महसुल भुक्तानीको छुट तथा जरिवाना निम्न तालिकामा उल्लेख गरेअनुसार हुन्छ :

भुक्तानी (बिल बितरण भएको)	छुट / जरिवाना
पहिलो र दोस्रो महिनाभित्र	3% छुट
तेस्रो महिनाभित्र	छुट र जरिवाना कुनै पनि लाग्दैन
चौथो महिनाभित्र	10% जरिवाना
पाँचौ महिनाभित्र	20% जरिवाना
पाँचौ महिनाभन्दा बढी	50% जरिवाना

उदाहरण : 1

प्रदीपको घरमा भदौ महिनाको पानीको मिटर रिडिङ साबिक अड्क 1340 र हालको अड्क 1372 छ। ढल सेवा बापतको 50% रकम थपेर कति महसुल बुझाउनुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस।

समाधान :

यहाँ, हालको अड्क (current reading) = 1372
 साबिकको अड्क (Previous reading) = 1340
 खपत युनिट = $1372 - 1340 = 32$
 न्यूनतम 10 युनिट (10,000 लिटर) को मूल्य = रु. 100
 बाँकी 22 युनिट (22,000 लिटर) को मूल्य = रु. $32 \times 22 =$ रु. 704
 जम्मा महसुल = रु. 100 + रु. 704 = रु. 804
 50% ढल सेवा बापतको महसुल = रु. $804 \times \frac{50}{100} =$ रु. 402
 जम्मा बिलको रकम = रु. 804 + रु. 402 = रु. 1206
 त्यसैले प्रदीपले भदौ महिनामा बुझाउनुपर्ने महसुल रु. 1206 हुन्छ।

उदाहरण : 2

एउटा $\frac{3}{4}$ इन्च पाइप साइजबाट कर्णाली होटलमा जम्मा 112 युनिट पानी खपत हुन्छ । बिल वितरण भएको पाँचौँ महिनाभित्र उक्त बिल बुझाएको भए जम्मा कति महसुल तिर्नुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान:

$$\text{जम्मा खपत युनिट} = 112$$

$$\text{न्यूनतम 27 युनिट (27,000 लिटर) पानी बापत महसुल} = \text{रु. 1910}$$

$$\text{बाँकी (112 - 27)} = 85 \text{ युनिट (85,000 लिटर) को महसुल} = \text{रु. } 71 \times 85 = \text{रु. 6035}$$

$$\text{112 युनिट पानीको महसुल} = \text{रु. 1910} + \text{रु. 6035} = \text{रु. 7945}$$

$$\begin{aligned} \text{50\% ढल सेवा बापतको रकम} &= \text{रु. } 7945 \times \frac{50}{100} \\ &= \text{रु. 3972.50} \end{aligned}$$

$$\text{ढल सेवा बापतको रकमसहित पानीको महसुल} = \text{रु. 7945} + \text{रु. 3972.50} = \text{रु. 11917.50}$$

बिल वितरण भएको पाँचौँ महिनाभित्र बिल बुझाएमा नियमानुसार 20% जरिवाना लाग्छ ।

त्यसैले, जरिवाना रकम = रु. 11917.50 को 20%

$$= \text{रु. } 11917.50 \times \frac{20}{100}$$

$$= \text{रु. 2383.50}$$

$$\text{कुल महसुल} = \text{रु. 11917.50} + \text{रु. 2383.50}$$

$$= \text{रु. 14,301}$$

अभ्यास 4.2

- सुनमायाको घरमा $1\frac{1}{2}$ इन्चको खाने पानीको पाइप लाइन छ । उनको असोज महिनाको हालको अडक (Current reading) र साबिक अडक (Previous reading) क्रमशः 2382 र 2345 छ । माथि दिइएको महसुल तालिका र छुट तथा जरिवाना शुल्कका आधारमा पत्ता लगाउनुहोस् :
 - 50% ढल सेवा बापतको थप रकमसहित सुनमायाले कति महसुल तिर्नुपर्छ ?
 - बिल वितरण भएको पहिलो र दोस्रो महिनाभित्र बिल बुझाएमा सुनमायाले कति रकम छुट पाउँछिन ?
 - बिल वितरण भएको चौथो महिनामा महसुल बुझाएमा उनले कति जरिवाना तिर्नुपर्छ ?
- पार्क भिलेज होटलमा $1\frac{1}{2}$ इन्चको पाइप लाइनबाट पानी वितरण गरिएको छ । उक्त होटलमा महिनामा जम्मा 560 युनिट पानी खपत हुन्छ ?

- (क) 50% ढल सेवा बापत अतिरिक्त रकम महसुल तिर्दा जम्मा महसुल कति हुन आउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) बिल वितरण भएको पहिलो महिनाभित्र महसुल तिरेमा जम्मा कति रकम बुझाउनुपर्छ ?
- (ग) बिल वितरण भएको छैटौँ महिनामा महसुल बुझाएमा जम्मा कति रकम बुझाउनुपर्छ ?
3. आफ्ना घरमा अथवा छिमेकीका घरमा प्रयोग गरिएको पानीको 3 महिनाको बिल सङ्कलन गर्नुहोस् । पानीको सबभन्दा कम र बढी खपत भएका महिना कुन कुन हुन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4.3 टेलिफोन प्रयोगबारे घरायसी खर्चको हिसाब (Household expenses for use of Telephone)

हामीले अहिले रिचार्ज कार्डका माध्यमबाट पूर्व भुक्तानी (pre-paid) मोबाइल सेवा र प्रयोग गरिसकेपछि बिलका माध्यमबाट पोस्टपेड (post paid) मोबाइल सेवा प्रयोग गर्छौं । तर यहाँ हामी साधारण टेलिफोन (PSTN/Land line) बिलका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

दिइएको टेलिफोन बिलको अध्ययन गरौं ।

टेलिफोन विवरण		NEPAL TELECOM NEPAL DOORSANCHAR COMPANY LTD.		NT PAN : 300044614	
NO :		STATEMENT FOR THE MONTH:		PAGE NO :	
DATE 67415107				C. VAT :	1
TEL NO. 2071/10/01		POUSH, 2071		CHARGE SUMMARY Rs.	
NAME 15525925		ACCOUNT CODE:		LOCAL	
ADDRESS NTC TEST NUMBER		A200309150484		STD	200.00
CLASS PATAN				ISD	0.00
TYPE PERMANENT		STATUS :		NAT. OA	0.00
ORDINARY LINE		SERVICE		INT. OA	0.00
LOCAL CALL DETAILS				ADJUSTMENT	
PREVIOUS	CURRENT	TOT. CALL	RENTAL RS.	EX. CALL	TOTAL RS.
1654	1654	0	200.00	0	200.00
				SUB TOTAL	0.00
				TSC	200.00
				TOTAL	200.00
				VAT 13%	28.00
				GRAND TOTAL	248.00

उक्त बिल स्थानीय कल ट्यारिफ (local call tariff) को हो । "Local call" नियमानुसार एक कलको समय निम्नानुसार हुन्छ ।

न्यूनतम 175 ओटा कलको महसुल रु. 200 र त्यसपछि प्रति कल रु. 1 अतिरिक्त शुल्क लाग्छ । यसमा टेलिफोन सेवा शुल्क (TSC) मूल्य अभिवृद्धिकर (VAT) लाग्दछ । 13% VAT बापतको रकम नेपाल सरकारको राजस्वमा जम्मा हुन्छ । 10% सेवा शुल्क टेलिफोन सेवा उपलब्ध गराउने कम्पनीलाई जान्छ । माथिको बिलमा एक महिनामा कुनै कल गरिएको देखिएको छैन तर पनि 175 कल बराबरको न्यूनतम शुल्क तिरेको देखिन्छ ।

उदाहरण : 1

एउटा साधारण टेलिफोन लाइनको स्थानीय कलको एक महिनाको साबिक अड्क (previous reading) 2052 अहिलेको अड्क (current reading) 2276 छ । यसका आधारमा तल दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

- (क) जम्मा महिनाभरि कति कल फोन गरिएछ ?
(ख) फोन गरे बापत जम्मा कति रकम उठेछ ?
(ग) फोन सेवा शुल्क (TSC) 10% सहित बिलको रकम कति हुन्छ ?
(घ) मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) 13% सहित बिलको कुल रकम कति हुन्छ ?

समाधान :

यहाँ, साबिक अड्क (previous reading) = 2052

अहिलेको अड्क (current reading) = 2276

$$\begin{aligned} \text{(क) खपत कुल सङ्ख्या} &= \text{अहिलेको अड्क} - \text{साबिक अड्क} \\ &= 2276 - 2052 \\ &= 224 \end{aligned}$$

त्यसैले जम्मा महिनाभरि 224 कल टेलिफोन गरिएछ ।

(ख) फोन गरे बापत पहिलो 175 कलको न्यूनतम महसुल = रु. 200

$$\begin{aligned} \text{बाँकी (224 - 175)} &= 49 \text{ कलको महसुल} \\ &= 49 \times \text{रु. 1} = \text{रु. 49} \end{aligned}$$

जम्मा फोन गरे बापत उठेको रकम = रु. 200 + रु. 49 = रु. 249

(ग) सेवा शुल्क (TSC) = रु. 249 को 10%

$$\begin{aligned} &= \text{रु. 249} \times \frac{10}{100} \\ &= \text{रु. 24.90} \end{aligned}$$

सेवा शुल्क (TSC) सहित बिलको रकम = रु. 249 + रु. 24.90

$$= \text{रु. 273.90}$$

(घ) मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) = रु. 273.90 को 13%

$$\begin{aligned} &= \text{रु. 273.90} \times \frac{13}{100} \\ &= \text{रु. 35.60} \end{aligned}$$

त्यसैले, मूल्य अभिवृद्धि करसहित टेलिफोनको बिल = रु. 273.90 + रु. 35.60
= रु. 309.50

उदाहरण : 2

पहिलो रु. 200 मा 175 कल टेलिफोन र त्यसपछि प्रत्येक रु. 1 मा एक कल टेलिफोन गर्न सकिन्छ ।
कपिलले सेवा शुल्क (TSC) र मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) बाहेक रु. 720 को फोन गरेछ । उसले कति
कल फोन गरेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, न्यूनतम रु. 200 मा 175 कल टेलिफोन गर्न सकिन्छ । बाँकी रु. $(720 - 200) =$ रु. 520 मा रु. 1 का
दरले 520 कल टेलिफोन गर्न सकिन्छ ।

त्यसैले जम्मा कल सङ्ख्या = $175 + 520 = 695$

अभ्यास 4.3

- निम्नाको घरको चैत महिनाको Local call को साबिक अडक (previous reading) 3452 र अहिलेको
अडक (current reading) 3789 छ ।
(क) जम्मा कति कल फोन गरिएको ?
(ख) पहिलो 175 कलको रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु. 1 का दरले जम्मा कति महसुल लाग्छ ?
(ग) 10% सेवा शुल्क (TSC) थपेपछि बिलको रकम कति हुन्छ ?
(घ) 13% मूल्य अभिवृद्धि कर बिलमा जोड्दा बिलको रकम कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (क) न्यूनतम 175 कल टेलिफोनको महसुल रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले महसुल
उठ्छ । रु. 575 मा कति कल टेलिफोन गर्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) न्यूनतम 175 कल टेलिफोनको महसुल रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले महसुल
उठ्छ । रु. 780 मा कति कल टेलिफोन गर्न सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 650 कल टेलिफोनको पहिलो 175 कलको रु. 200 र त्यसपछिको प्रति कलको रु.1 का दरले हुने
रकम पत्ता लगाउनुहोस् । 10% सेवा शुल्क थपेपछिको बिलमा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा उक्त
बिलको रकम कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- पहिलो 175 कलको रु. 200 र त्यसपछिको प्रति कलको रु.1 का दरले तल दिइएको रकममा जम्मा
कति कल फोन गर्न सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । (सेवा शुल्क (TSC) र मूल्य अभिवृद्धि कर
(VAT) गणना गरिएको छैन ।)
(क) रु. 250 (ख) रु. 425 (ग) रु. 775

5. आफ्नो घर अथवा छिमेकीको घरमा प्रयोगमा ल्याइएको साधारण टेलिफोन (PSTN) को 6 महिनादेखि 1 वर्षसम्मको बिलको अध्ययन गर्नुहोस् । टेलिफोनको महसुलमा के भिन्नता पाउनु हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
6. तपाईंको घरमा प्रयोग हुने विभिन्न प्रकारका फोनहरू तथा केबल लाइन कसरी रिचार्ज गर्ने गरिन्छ, साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

4.4 ट्याक्सीको मिटरले दिने रकमको हिसाब (Calculation of Amount of Taxi Meter)

सहरी क्षेत्रमा ट्याक्सी चढेर एक स्थानबाट अर्को स्थानसम्म जाँदा मिटर जडान गरिएका र मिटर जडान नगरिएका ट्याक्सी प्रयोगमा आउँछन् । यहाँ हामी मिटर जडित ट्याक्सीले उठाउने भाडाका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

नापतौल विभागले सर्वसाधारण लाई सुलभ मूल्यमा ट्याक्सी चढ्नका लागि ट्याक्सीमा मिटर जडान गरिदिएको हुन्छ । जसअनुसार ट्याक्सी चढ्दा निम्नअनुसार भाडा तिर्नुपर्छ :

समय	न्यूनतम भाडा	प्रति 200 मिटरको भाडा
बिहान 6 बजेदेखि बेलुकी 9 बजेसम्म	रु. 14	रु. 7.20
बेलुकी 9 बजेदेखि बिहान 6 बजेसम्म	रु. 21	रु. 10.80

ट्याक्सीलाई रोकेर राखेको अवस्थामा प्रत्येक 2 मिनेटमा रु. 7.20 का दरले अतिरिक्त शुल्क लाग्छ । ट्याक्सीको शुल्क सम्बन्धी जानकारी यात्रुहरूको ओहोर दोहोर हुने स्थानहरू जस्तै: विमानस्थल, बसपार्क, मुख्य चौकहरूमा होर्डिङ बोर्डमा राखिएको हुन्छ । ट्याक्सीको मिटरले दिने असुविधाका बारेमा गुनासो नजिकको ट्राफिक प्रहरी कार्यालयमा गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण : 1

पेम्बाले काठमाडौंको सिंहदरवारदेखि कलङ्कीसम्म 5 किलोमिटर ट्याक्सी चढेछन् । सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु. 14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु. 7.20 का दरले भाडा लिएछ । यात्राका क्रममा 10 मिनेटको वेटिङ चार्ज रु. 7.20 प्रति 2 मिनेटका दरले लागेछ । पेम्बाले जम्मा कति भाडा तिरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

$$\begin{aligned} \text{न्यूनतम शुल्क} &= \text{रु. 14} \\ \text{ट्याक्सी गुडेको दुरी} &= 5 \text{ कि.मि.} \\ &= 5000 \text{ मिटर} \end{aligned}$$

यहाँ, 200 मिटरको भाडा = रु. 7.20

$$1 \text{ मिटरको भाडा} = \frac{\text{Rs. } 7.20}{200}$$

$$5000 \text{ मिटरको भाडा} = \frac{\text{Rs. } 7.20}{200} \times 5000 = \text{रु. } 180$$

$$\text{वेटिङ चार्ज बापतको रकम} = \frac{\text{Rs. } 7.20}{2} \times 10 = \text{रु. } 36$$

$$\text{त्यसैले पेम्बाले तिरेको जम्मा भाडा} = \text{रु. } 14 + \text{रु. } 180 + \text{रु. } 36 = \text{रु. } 230$$

अभ्यास 4.4

- (क) हेमराजले काठमाडौंको सिंहदरबारदेखि भक्तपुरको सानोठिमीसम्म 7 किलोमिटर ट्याक्सी चढेछन्। सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु. 14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु. 7.20 का दरले भाडा लिएछ। यात्राको क्रममा 4 मिनेटको वेटिङ चार्ज रु. 7.20 प्रति 2 मिनेटका दरले लागेछ। हेमराजले जम्मा कति भाडा तिरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।
(ख) आनन्दले ललितपुरको सातदोबाटोदेखि काठमाडौंको कीर्तिपुरसम्म 8 किलोमिटर ट्याक्सी चढेछन्। सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु. 14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु. 7.20 का दरले भाडा लिएछ। यात्राका क्रममा 12 मिनेटको वेटिङ चार्ज रु. 7.20 प्रति 2 मिनेटका दरले लागेछ। आनन्दले जम्मा कति भाडा तिरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।
- अघिल्लो पेजमा दिइएको दरअनुसार ट्याक्सी भाडा पत्ता लगाउनुहोस्।

	दुरी (किलोमिटरमा)	समय	वेटिङ समय मिनेटमा
क	7	बिहान 6 बजे	4
ख	10	दिउँसो 12 बजे	12
ग	12.5	राती 10 बजे	2
घ	4.6	राती 2 बजे	—

- (क) रामबहादुरले रु. 86 तिरेर ट्याक्सी चढेछन्। उनले ट्याक्सी चढेको न्यूनतम शुल्क रु. 14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु. 7.20 का दरले भाडा तिरेछन्। रामबहादुरले जम्मा कति किलोमिटर यात्रा गरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।
(ख) मनमतीले रु. 374 तिरेर ट्याक्सी चढेछन्। उनले ट्याक्सी चढेको न्यूनतम शुल्क रु. 14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु. 7.20 का दरले भाडा तिरेछन्। मनमतीले जम्मा कति किलोमिटर यात्रा गरिछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।

पाठ 5

क्षेत्रफल (Area)

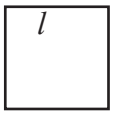
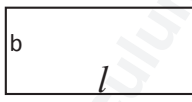
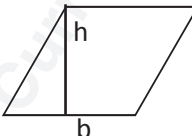
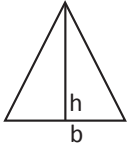
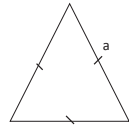
5.0 पुनरावलोकन

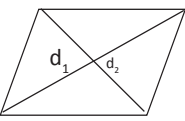
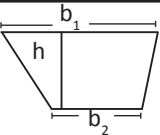
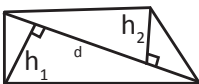
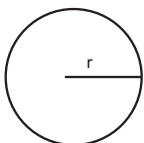
कक्षामा विद्यार्थीहरूलाई 3 अथवा 4 जनाको समूहमा विभाजन गरौं। प्रत्येक समूहलाई निम्नमध्ये एक एक शीर्षक लेखिएका कागज बाँडौं।

(क) वर्ग (ख) आयत (ग) समानान्तर चतुर्भुज (घ) त्रिभुज (ङ) समबाहु त्रिभुज
(च) बिषमबाहु चतुर्भुज (छ) समलम्ब चतुर्भुज (ज) समबाहु चतुर्भुज (झ) वृत्त

प्रत्येक समूहले आपसमा छलफल गरी आफ्नो समूहलाई प्राप्त भएको समतलीय आकृतिका बारेमा छलफल गरी उक्त आकृतिको क्षेत्रफल र परिमिति अथवा परिधि पत्ता लगाऔं। त्यसपछि पालैपालो सबै समूहले आआफ्नो समूह कार्यलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरौं।

यसरी विद्यार्थीहरूले प्रस्तुत गरेको समूह कार्यलाई निम्नानुसार तालिकामा भरौं :

आकृतिको नाम	आकृति (Shape)	क्षेत्रफल (Area)	परिमिति वा परिधि (Perimeter/circumference)
वर्ग (Square)		$A = l^2$ वर्ग एकाइ	$P = 4l$ एकाइ
आयत (Rectangle)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$P = 2(l + b)$ एकाइ
समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$P = \dots\dots$ एकाइ
त्रिभुज (Triangle)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$P = \dots\dots$ एकाइ
समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$P = \dots\dots$ एकाइ

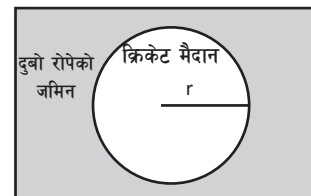
समबाहु चतुर्भुज (Rhombus)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$P = \dots\dots$ एकाइ
समलम्ब चतुर्भुज (trapezium)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$p =$ चारै ओटा भुजाहरूको लम्बाइको योगफल
चतुर्भुज (Quadrilateral)		$A = \dots\dots$ वर्ग एकाइ	$p =$ चारै ओटा भुजाहरूको लम्बाइको योगफल
वृत्त (Circle)		$A = \pi r^2$ वर्ग एकाइ $A = \pi d^2 / 4$ वर्ग एकाइ	परिधि (C) = $2\pi r$ $= \pi d$

5.1 बाटोको क्षेत्रफल (Area of Pathways)

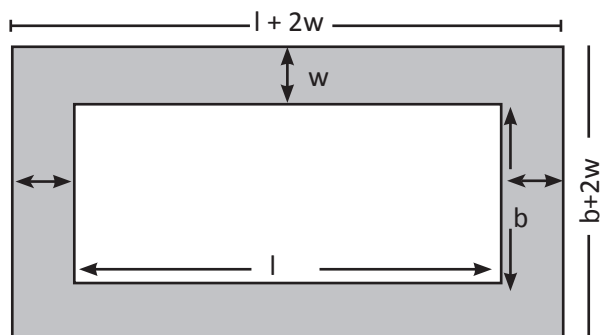
एउटा आयताकार जमिन छ । उक्त जमिनमा भित्र एउटा वृत्ताकार क्रिकेट मैदान बनाउनु छ र बाँकी रहेको जग्गामा दुबो रोपनु छ । अब दुबो रोप्ने जमिनको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

1. वरिपरिको बाहिरी बाटो

एउटा आयताकार बगैँचा छ, जसको लम्बाइ (l) र चौडाइ (b) छ । यदि उक्त बगैँचाको वरिपरि बाहिरबाट w चौडा बाटो छ भने उक्त बाटोको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिनेला ?



यसका लागि पहिले बाहिर र भित्रको आकृति कस्तो छ भन्ने कुरामा स्पष्ट हुने । यहाँ बगैँचाको आकार आयताकार छ जसको लम्बाइ (l) र चौडाइ (b) छ । त्यसै गरी बाटोसहितको आयताकार जग्गाको लम्बाइ ($l+2w$) र चौडाइ ($b+2w$) छ ।



तसर्थ, बाटोको क्षेत्रफल (A) भनेको बाटोसहितको जग्गाको क्षेत्रफल (A_1) र बाटोबाहेकको जग्गाको क्षेत्रफल (A_2) को फरक हो ।

अब, $A_1 = (l + 2w)(b + 2w)$ र $A_2 = l \times b$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned} \text{अतः बाटोको क्षेत्रफल (A)} &= A_1 - A_2 = (l + 2w)(b + 2w) - l \times b \\ &= l \times b + 2lw + 2bw + 4w^2 - l \times b \\ &= 2w(l + b + 2w) \text{ वर्ग एकाइ} \end{aligned}$$

त्यस कारण, बाटोको क्षेत्रफल $(A) = 2w(l + b + 2w)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

नोट : यदि जमिनको आकार वर्गाकार भएमा के होला ?

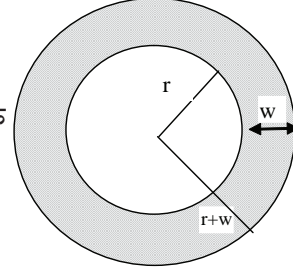
यस अवस्थामा $l = b$ हुन्छ । तसर्थ बाटोको क्षेत्रफल $= 2w(l + l + 2w) = 4w(l + w)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

पुनः वृत्ताकार जमिनको बाहिरबाट w एकाइ चौडा वृत्ताकार बाटो भएमा बाटोको क्षेत्रफल कति होला ?

सँगैको चित्रलाई अवलोकन गरेर पत्ता लगाऔं ।

यहाँ, ठुलो वृत्तको अर्धव्यास $r + w$ छ र सानो वृत्तको अर्धव्यास r छ ।

हामीलाई थाहा छ कि वृत्तको क्षेत्रफल $= \pi r^2$ हुन्छ । तसर्थ, वृत्ताकार बाटोको क्षेत्रफल ठुलो वृत्तको क्षेत्रफल र सानो वृत्तको क्षेत्रफलको फरक हो ।



$$\begin{aligned} \text{बाटोको क्षेत्रफल (A)} &= \pi(r + w)^2 - \pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= \pi(r^2 + 2rw + w^2 - r^2) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= \pi(2rw + w^2) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।} \\ &= \pi w(2r + w) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।} \end{aligned}$$

जमिनको व्यास (d) दिइएको अवस्थामा बाटोको क्षेत्रफल $(A) = \pi w(d + w)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

उदाहरण 1

लम्बाइ 20 m र चौडाइ 14 m भएको आयतकार खेतको वरिपरि बाहिरबाट 2 m चौडा बाटो बनाइएको छ भने उक्त बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

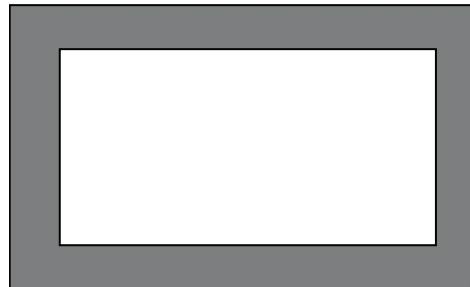
समाधान :

यहाँ, खेतको लम्बाइ $(l) = 20\text{m}$

खेतको चौडाइ $(b) = 14\text{ m}$

बाटोको चौडाइ $(w) = 2\text{ m}$

बाटोको क्षेत्रफल $(A) = ?$



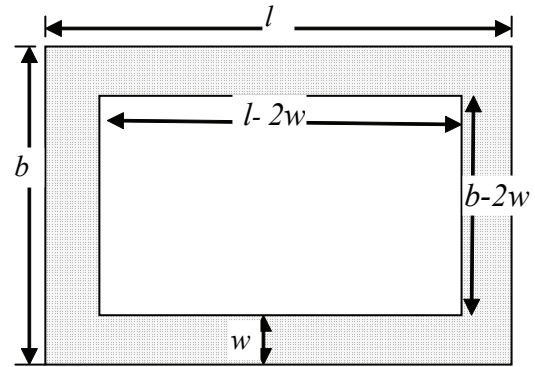
हामीलाई थाहा छ, बाहिरी बाटोको क्षेत्रफल (A) = $2w(l+b+2w)$ वर्ग एकाइ

$$\begin{aligned} & . 2 \times 2(20+14+2 \times 2) \text{ m}^2 \\ & = 4(20+18) \text{ m}^2 \\ & = 152 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

2. बरिपरिको भित्री बाटोको क्षेत्रफल

लम्बाइ (l) र चौडाइ (b) भएको एउटा पार्कको किनारामा भित्रपट्टि w चौडा भएको बाटो निर्माण गरिएको छ उक्त बाटोको क्षेत्रफल कति होला ?

यहाँ, पार्कको भित्रपट्टि बनाइएको बाटोभन्दा भित्रको आयतकार भागको लम्बाइ $l-2w$ र चौडाइ $b-2w$ एकाइ हुन्छ ।



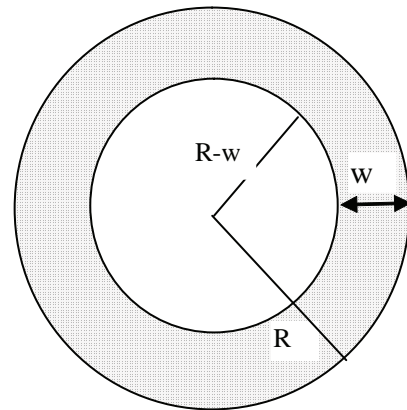
तसर्थ, भित्री बाटोको क्षेत्रफल = बाहिरी आयतको क्षेत्रफल - भित्री आयतको क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} A & = l \times b - (l - 2w)(b - 2w) \\ & = l \times b - (l \times b) + 2wl + 2wb - 4w^2 \\ & = 2w(l + b - 2w) \text{ वर्ग एकाइ} \end{aligned}$$

नोट : यदि जमिनको आकार वर्गाकार भएमा $l = b$ हुन्छ ।

तसर्थ, बाटोको क्षेत्रफल (A) = $2w(l + l - 2w) = 4w(l - w)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

फेरि, यदि कुनै पनि वृत्ताकार जमिनमा भित्र पट्टिबाट w एकाइ चौडा भएको बाटो निर्माण भएको भए त्यसको क्षेत्रफल दिइएको चित्रबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



बाहिरी वृत्तको क्षेत्रफल = πR^2 वर्ग एकाइ र

भित्री वृत्तको क्षेत्रफल = $\pi (R-w)^2$ वर्ग एकाइ

अतः भित्री बाटोको क्षेत्रफल (A) = $\pi R^2 - \pi (R-w)^2$ वर्ग एकाइ
= $\pi w(2R-w)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

जमिनको व्यास (d) दिइएको अवस्थामा बाटोको क्षेत्रफल (A) = $\pi w(d - w)$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

उदाहरण : 2

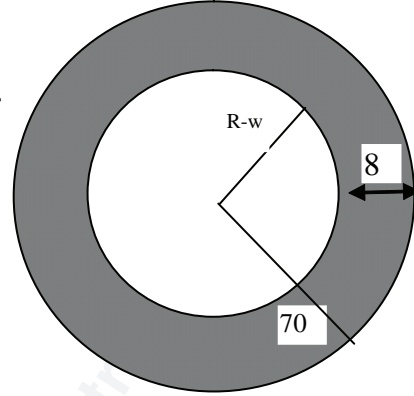
अर्धव्यास 70 मिटर भएको एउटा वृत्ताकार खेल मैदानमा भित्रपट्टि वरिपरि 8 मिटर चौडा फुटपाथ बनाइएको छ भने उक्त फुटपाथको क्षेत्रफल कति होला ? ($\pi = 3.14$)

समाधान :

यहाँ, वृत्ताकार खेल मैदानको अर्धव्यास (r) = 70 m

बाटोको चौडाइ (w) = 8 m

बाटोको क्षेत्रफल (A) = ?



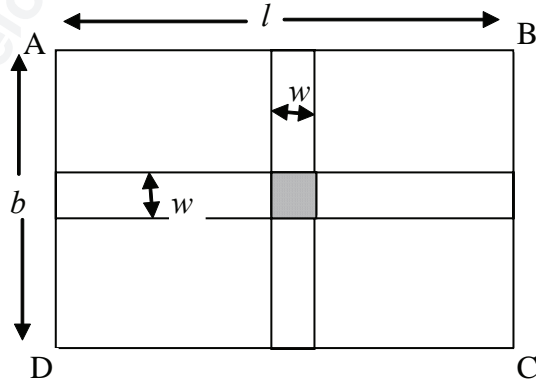
हामीलाई थाहा छ, वृत्ताकार भित्री बाटोको क्षेत्रफल (A) = $\pi w(2R-w)$ वर्ग एकाइ

$$= 3.14 \times 8(2 \times 70 - 8) \text{ m}^2$$

$$= 3315.84 \text{ m}^2$$

3. आपसमा लम्ब हुने गरी काटिएका बाटोको क्षेत्रफल

दिइएको चित्रमा ABCD एउटा आयताकार क्षेत्र हो जसको लम्बाइ $AB = l$ एकाइ र चौडाइ $BC = b$ एकाइ छ । यसको दुवैतिर बिचबाट w चौडाइ भएका बाटाहरू आपसमा काटिने गरी बनाइएका छन् अब बाटोको क्षेत्रफल कति होला ?



यहाँ, लम्बाइमा बनाइएको बाटोको क्षेत्रफल = $l \times w$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

चौडाइमा बनाइएको बाटोको क्षेत्रफल = $b \times w$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

बाटोहरू काटिएको वर्गाकार भागको क्षेत्रफल = w^2 वर्ग एकाइ हुन्छ ।

अतः बाटोको जम्मा क्षेत्रफल (A) = $l \times w + b \times w - w^2$

$$= w(l + b - w) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।}$$

उदाहरण : 3

लम्बाइ 70 m र चौडाइ 65 m भएको एउटा जमिनको दुवैतिरको बिचबाट 5 m चौडा बाटो बनाइएको छ उक्त बाटोको क्षेत्रफल कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

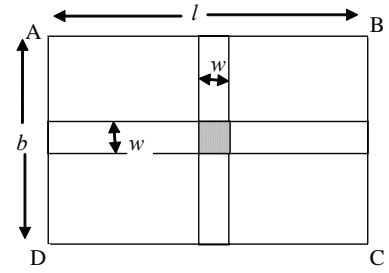
समाधान :

यहाँ, जमिनको लम्बाइ (l) = 70 m

जमिनको चौडाइ (b) = 65 m

बाटोको चौडाइ (w) = 5m

बाटोको क्षेत्रफल (A) = ?



$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, काटिएको बाटोको क्षेत्रफल (A)} &= w(l + b - w) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 5(70 + 65 - 5) \text{ m}^2 \\ &= 5 \times 130 \text{ m}^2 \\ &= 650 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

4. बाटोमा बिछ्याउने ढुङ्गा, टायल अथवा मार्बल र तिनीहरूको मूल्य

एउटा हाउजिङको बाटोमा टायल बिछ्याउनु छ । त्यसका लागि कति ओटा टायल चाहिएला र उक्त कार्यका लागि कति खर्च लाग्छ ? कसरी पत्ता लगाउन सकिनेला ? दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाऔं । समूहको निष्कर्षलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरौं र एक आपसमा समूह समूहमा पृष्ठपोषण आदान प्रदान गरौं ।

माथिको छलफललाई निम्नानुसार सामान्यीकरण गर्न सकिन्छ :

यसका लागि सबभन्दा पहिले बाटोको क्षेत्रफल (A) पत्ता लगाउने ।

प्रत्येक टायलको क्षेत्रफल (a) पत्ता लगाउने ।

त्यसपछि बाटोको क्षेत्रफल (A) लाई एकाइ टायलको क्षेत्रफल (a) ले भाग गर्ने ।

$$\text{जम्मा टायलको सङ्ख्या (N)} = \text{बाटोको क्षेत्रफल (A)} / \text{टायलको क्षेत्रफल (a)} = \frac{A}{a}$$

टायलका लागि जम्मा खर्च = N x एउटाको मूल्य हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा 70 फिट किनारा भएको बर्गाकार जमिनलाई घडेरीको प्रयोजनका लागि चारैतिर भित्रबाट 10 फिट चौडा बाटो बनाइएको छ ।

(क) बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त बाटोमा 2 फिट लम्बाइ र 1.5 फिट चौडाइ भएका ढुङ्गाहरू बिछ्याउनका लागि जम्मा कति ढुङ्गा चाहिएलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) एउटा ढुङ्गाको मूल्य रु. 105 पर्छ भने उक्त बाटोमा ढुङ्गाहरू बिछ्याउनका लागि जम्मा चाहिने खर्च पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, वर्गाकार जमिनको किनारा (l) = (b) = 70 फिट

बाटोको चौडाइ (w) = 10 फिट

बाटोको क्षेत्रफल (A) = ?

$$\begin{aligned} \text{(क) बाटोको क्षेत्रफल (A)} &= 4w(l - w) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 4 \times 10 (70 - 10) \text{ ft}^2 \\ &= 40(60) \text{ ft}^2 \\ &= 2,400 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(ख) एउटा ढुङ्गाको लम्बाइ} &= 2 \text{ फिट} \\ \text{ढुङ्गाको चौडाइ} &= 1.5 \text{ फिट} \\ \text{एउटा ढुङ्गाको क्षेत्रफल (a)} &= 2 \times 1.5 \text{ ft}^2 \\ &= 3 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

$$\text{जम्मा ढुङ्गाको सङ्ख्या (N)} = \frac{A}{a} = \frac{2400}{3} = 800 \text{ ओटा}$$

अतः उक्त बाटोमा ढुङ्गा बिछ्याउँदा जम्मा 800 ओटा ढुङ्गा चाहिन्छन् ।

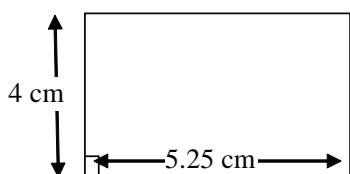
(ग) एउटा ढुङ्गा बिछ्याउँदा लाग्ने खर्च = रु. 105

$$\begin{aligned} 800 \text{ ओटा ढुङ्गा बिछ्याउँदा लाग्ने खर्च} &= \text{रु. } 105 \times 800 \\ &= \text{रु. } 84,000 \end{aligned}$$

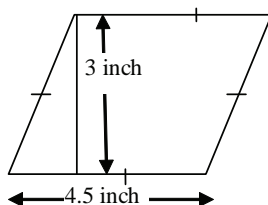
अभ्यास 5.1

1. तल दिइएका समतलीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल र परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

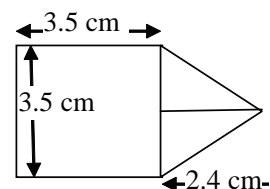
(क)



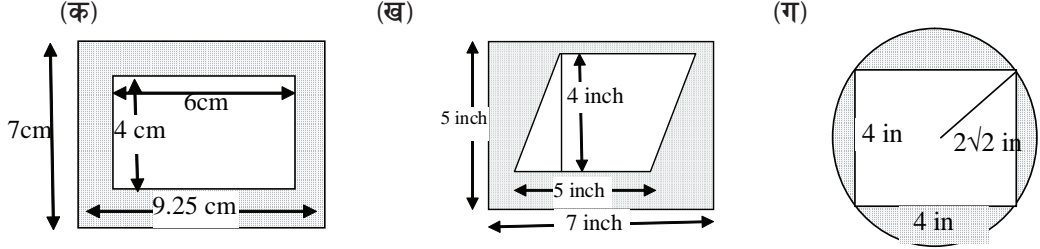
(ख)



(ग)

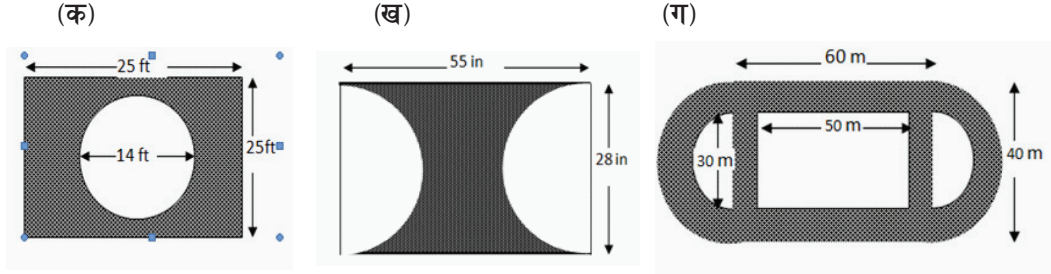


2. तलका चित्रहरूमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



3. एउटा आयतकार खेतको लम्बाइ 38 मिटर र चौडाइ 32 मिटर छ । खेतको वरिपरि बाहिरबाट 3 मिटर चौडा बाटो बनाइएको छ भने बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. 60 ft किनारा भएको वर्गाकार जमिनको भित्रपट्टि 5 ft चौडा बाटो बनाइएको छ उक्त बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. 137 मिटर व्यास भएको वृत्ताकार क्रिकेट मैदानको वरिपरि 3 मिटर चौडा बाटो छ । उक्त बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. 78 ft लम्बाइ 46 ft चौडा भएको बास्केटबल कोर्टमा दुवैतिरबाट भित्र पर्ने गरी 2 ft चौडामा सेतो रङ लगाइएको छ । रङ लगाएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. 45 m x 45m को आयतकार बगैँचाको वरिपरि 2.5 m चौडा बाटो छ भने,
 - (a) बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (b) उक्त बाटोमा 0.5 m का वर्गाकार टायल छापनका लागि कति ओटा टायल आवश्यक पर्ला ?
8. 50 m लम्बाइ र 40 m चौडाइ भएको चौरको बिचमा दुवैतिरबाट 3m चौडा बाटो एक आपसमा लम्ब हुने गरी बनाइएको छ । उक्त बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. 6400 m² क्षेत्रफल भएको वर्गाकार पोखरीको वरिपरि 2 m चौडा भएको बाटो बनाइएको छ भने,
 - (a) उक्त बाटोको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (b) त्यो बाटोमा टायल बिछ्याउँदा 0.40 m² क्षेत्रफल भएका कति ओटा टायल चाहिएला ?
 - (c) यदि एउटा टायलको रू.7.5 पर्छ भने उक्त बाटोमा टायल बिछ्याउन कति खर्च लाग्ला ?
10. 24 cm x 28 cm को फोटोको वरिपरि बाहिरबाट 4 cm चौडाइ भएको चाँदीको बुट्टा लगाइएको छ भने
 - (a) चाँदीको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (b) यदि 1 cm² चाँदीका बुट्टा बनाउँदा रु. 550 पर्छ भने पुरै बुट्टा बनाउन जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

११ . तल दिइएका चित्रहरूमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

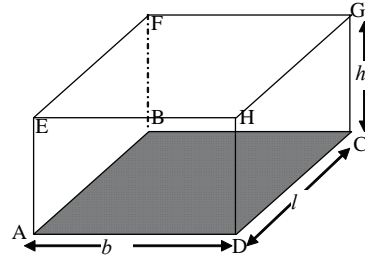


12. तपाईंको विद्यालयमा भएका बगैँचा वा खेल मैदानमा एक आपसमा काटिएका वा आपसमा समानान्तर भएका बाटोहरू नापी तिनीहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
13. आफ्नो कक्षाकोठामा जम्मा कति भित्ताहरू छन् ? कोठामा भुइँ र सिलिड कस्ता आकारका छन् ? प्रत्येक आकृतिहरूको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? व्यक्तिगत रूपमा उत्तरहरू तयार गरेर समूहमा छलफल गरी समूहको निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5.2.1 चार भित्ता, भुइँ र सिलिडको क्षेत्रफल

एउटा आयताकार कोठामा चार ओटा भित्ताहरू, एउटा भुइँ र एउटा सिलिड हुन्छ । आयतका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् । तसर्थ आयतकार कोठाका विपरीत दिशाका भित्ताहरू पनि बराबर तथा अनुरूप हुन्छन् । साथसाथै भुइँ र सिलिडको क्षेत्रफल पनि बराबर हुन्छ ।

सँगैको चित्रलाई एउटा कोठाको मोडेलको रूपमा मान्दा, ABCD भुइँ हो र EFGH सिलिड हो । त्यस्तै गरी, ABFE, BCGF, CDHG र ADHE गरी चार ओटा भित्ताहरू हुन् ।



चार भित्ताको क्षेत्रफल = चार ओटा आयतकार भित्ताका सतहको क्षेत्रफलको योगफल

चार भित्ताको क्षेत्रफल = ABFE को क्षेत्रफल + BCGF को क्षेत्रफल + CDHG को क्षेत्रफल + ADHE को क्षेत्रफल

$$= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h$$

$$= 2l \times h + 2b \times h = 2lh + 2bh$$

$$= 2h(l + b) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।}$$

भुइँ र सिलिडको क्षेत्रफल = ABCD को क्षेत्रफल + EFGH को क्षेत्रफल

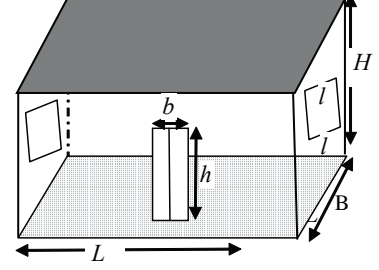
$$= l \times b + l \times b = 2(l \times b) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।}$$

चार भित्ता, भुइँ र सिलिडको क्षेत्रफल = $2h(l + b) + 2(l \times b)$ वर्ग एकाइ

$$= 2(h \times l + h \times b + l \times b) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।}$$

त्यसै गरी भूयाल र ढोकाबाहेकका चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन

- (क) चार भित्ताको क्षेत्रफल (A) पत्ता लगाउने
 (ख) भूयाल र ढोकाको जम्मा क्षेत्रफल (a) पत्ता लगाउने र
 (ग) चार भित्ताको क्षेत्रफलबाट भूयाल र ढोकाको क्षेत्रफल घटाउने अथवा $A - a$ ।



उदाहरण : 1

लम्बाइ 5.5 मिटर, चौडाइ 3.5 मिटर र उचाइ 4 मिटर भएको एउटा कोठाको (क) चार भित्ताको क्षेत्रफल (ख) भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, कोठाको लम्बाइ (l) = 5.5 मिटर

चौडाइ (b) = 3.5 मिटर

उचाइ (h) = 4 मिटर

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} \text{(क) कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल} &= 2h(l+b) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 2 \times 4(5.5+3.5) \text{ वर्ग मिटर} \\ &= 8(9) \text{ वर्ग मिटर} \\ &= 72 \text{ वर्ग मिटर} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ख) भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल} &= 2(l \times b) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 2(5.5 \times 3.5) \text{ वर्ग मिटर} \\ &= 2(19.25) \text{ वर्ग मिटर} \\ &= 38.50 \text{ वर्ग मिटर} \end{aligned}$$

उदाहरण : 2

एउटा कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 14 ft, 10 ft र 9 ft रहेको छ । उक्त कोठामा 3 ft किनारा भएको दुई ओटा वर्गाकार भूयालहरू छन् र एउटा 6 ft x 2 ft को ढोका छ । कोठाको चार भित्तामा रङ लगाइएको छ भने रङ लगाइएको भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, कोठाको लम्बाइ (L) = 14 ft, चौडाइ (B) = 10 ft, उचाइ (h) = 9 ft

वर्गाकार भ्यालको लम्बाइ (l) = 3 ft, ढोकाको उचाइ (h) = 6 ft, चौडाइ (b) = 2 ft

हामीलाई थाहा छ, कोठाका चार भित्ताको क्षेत्रफल (A) = 2h (L+B) वर्ग एकाइ

$$= 2 \times 9 (14 + 10) \text{ वर्ग फिट}$$

$$= 18 (24) \text{ वर्ग फिट}$$

$$= 432 \text{ वर्ग फिट}$$

अब, 2 ओटा वर्गाकार भ्याल र एउटा ढोकाको क्षेत्रफल (a) = $2 \times l^2 + h \times b$ वर्ग एकाइ

$$= 2 \times 3^2 + 6 \times 2 \text{ वर्ग फिट}$$

$$= 18 + 12 \text{ वर्ग फिट}$$

$$= 30 \text{ वर्ग फिट}$$

फेरि, रङ लगाइएको भागको क्षेत्रफल = चार भित्ताको क्षेत्रफल (A) - भ्याल र ढोकाको क्षेत्रफल (a)

$$= (432 - 30) \text{ वर्ग फिट}$$

$$= 402 \text{ वर्ग फिट}$$

5.2.2 कार्पेट बिछ्याउने, प्लास्टर गर्ने, रङ लगाउने तथा कागज टाँस्ने आदिको लागत सम्बन्धी समस्याहरू

लम्बाइ (L), चौडाइ (B), उचाइ (H) भएको एउटा कोठाको भुइँमा लम्बाइ (l) र चौडाइ (b) भएको कार्पेटलाई कसरी मिल्ने गरी विछ्याउन सकिएला, समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ, कोठाको लम्बाइ = L, चौडाइ = B र उचाइ = H छ। त्यसै गरी कार्पेटको लम्बाइ = l र चौडाइ = b छ।

कार्पेटलाई मिल्ने गरी विछ्याउनका लागि भुइँको क्षेत्रफल र कार्पेटको क्षेत्रफल बराबर हुनुपर्छ।

अतः $L \times B = l \times b$ हुन्छ।

अब, जम्मा लागत (C) कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ मनन गरौं। एक वर्ग एकाइ क्षेत्रफलका लागि लागत दर R हुन्छ भने, A वर्ग एकाइ क्षेत्रफलको जम्मा लागत $A \times R$ हुन्छ।

तसर्थ, जम्मा लागत (C) = $A \times R$ हुन्छ।

माथिका तिन चलहरू C, A र R मध्ये कुनै दुई ओटा परिमाणको मान थाहा भएको खण्डमा

तेस्रोलाई निम्नानुसार पत्ता लगाउन सकिन्छ। $C = A \times R$; $A = \frac{C}{R}$ र $R = \frac{C}{A}$ हुन्छ।

उदाहरण : 3

एउटा 7m लम्बाइ, 5 m चौडाइ र 4 m उचाइ भएको कोठा छ । त्यसमा 1.4 m अर्धव्यास भएका दुई ओटा वृत्ताकार भ्यालहरू र 2.5 m उचाइ र 1.4 m चौडाइ भएको एउटा ढोका रहेका छन् ।

(क) यदि प्रति वर्ग मिटर कार्पेटको मूल्य रु. 250 पर्छ भने उक्त कोठाको भुइँमा कार्पेट बिछ्याउँदा जम्मा कति लागत लाग्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्रति वर्ग मिटरको रु. 175 का दरले चार भित्तामा रङ लगाउँदा लाग्ने जम्मा लागत पत्ता लगाउनुहोस् । ($\pi = 22/7$)

समाधान:

यहाँ, कोठाको लम्बाइ (L) = 7 m

चौडाइ (B) = 5 m

उचाइ (H) = 4 m

वृत्ताकार भ्यालको अर्धव्यास (r) = 1.4 m

ढोकाको उचाइ (h) = 1.4 m, चौडाइ (b) = 2.5 m

(क) हामीलाई थाहा छ,

कोठाको भुइँको क्षेत्रफल = L x B वर्ग एकाइ

$$= 7 \times 5 \text{ m}^2$$

$$= 35 \text{ m}^2$$

अब, प्रति एकाइ वर्ग मिटरको कार्पेटको लागत रु. 250 पर्छ भने

35m² कार्पेटको जम्मा लागत रु. 35 x 250

$$= \text{रु. } 8750 \text{ पर्छ ।}$$

तसर्थ, कार्पेटको जम्मा लागत (C) = रु. 8750

(ख) कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल (A) = 2H (L+B) वर्ग एकाइ

$$= 2 \times 4 (7+5) \text{ m}^2$$

$$= 8 (12) \text{ m}^2$$

$$= 96 \text{ m}^2$$

वृत्ताकार भ्यालको क्षेत्रफल = πr^2 वर्ग एकाइ

$$= 22/7 \times (1.4)^2 \text{ m}^2$$

$$= 22/7 \times 1.96 \text{ m}^2$$

$$= 22 \times 0.28 \text{ m}^2$$

$$= 6.16 \text{ m}^2$$

दुई ओटा भ्यालहरूको जम्मा क्षेत्रफल = $2 \times 6.16 \text{ m}^2$
 $= 12.32 \text{ m}^2$

ढोकाको क्षेत्रफल = $b \times h$ वर्ग एकाइ
 $= 1.4 \times 2.5 \text{ m}^2 = 3.5 \text{ m}^2$

दुई ओटा भ्याल र एउटा ढोकाको जम्मा क्षेत्रफल (a) = $(12.32 + 3.5) \text{ m}^2$
 $= 15.82 \text{ m}^2$

फेरि, भ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल = रड लगाउने भागको क्षेत्रफल
 $= (A - a)$ वर्ग एकाइ
 $= (96 - 15.82) \text{ m}^2$
 $= 80.18 \text{ m}^2$

एक वर्ग मिटरको रड लगाउँदा लागत रु.175 पर्छ भने, 80.18 m^2 मा रड लगाउन जम्मा लागत
 $= \text{रु. } 80.18 \times 175$
 $= \text{रु. } 14,031.50$ पर्छ ।

उदाहरण 4

कोपिला लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 26 ft, 22 ft र 8 ft भएको आफ्नो कोठामा रड लगाउन चाहन्छिन् ।

(क) यदि एक बट्टा रडले 96 वर्ग फिटलाई पुग्छ भने सो कोठाको चार भित्तामा रड लगाउन उनलाई कति बट्टा रड आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्रतिबट्टा रडको मूल्य रु. 1230 पर्दछ भने उनलाई जम्मा कति रकम आवश्यक हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, कोठाको लम्बाइ (l) = 26 ft

चौडाइ (b) = 22 ft

उचाइ (h) = 8 ft

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} \text{(क) कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल} &= \text{रड लगाउनुपर्ने भाग} = 2h(l+b) \text{ ft}^2 \text{ (वर्ग फिट)} \\ &= 2 \times 8(26+22) \text{ ft}^2 \text{ (वर्ग फिट)} \\ &= 16(48) \text{ ft}^2 \text{ (वर्ग फिट)} \\ &= 768 \text{ ft}^2 \text{ (वर्ग फिट)} \end{aligned}$$

फेरि, 96 वर्ग फिटका लागि 1 बट्टा रडले पुग्छ ।

1 वर्ग फिटका लागि $1/96$ बट्टा रडले पुग्छ ।

768 वर्ग फिटका लागि $1/96 \times 768$

$$= 8 \text{ बट्टा रडले पुग्छ ।}$$

(ख) हामीलाई दिइएको छ कि, एक बट्टा रडको मूल्य रु. 1230 पर्छ ।

तसर्थ, कोपिलालाई जम्मा 8 बट्टा रडको रकम = $8 \times \text{रु. } 1230 = \text{रु. } 9,840$ आवश्यकता पर्छ ।

अभ्यास 5.2

- तल दिइएका समस्याहरू समाधान गर्नुहोस् ।
 - 9 ft लम्बाइ र 6 ft चौडाइ भएको कोठामा रु. 125 प्रति वर्ग फिटका दरले कार्पेट बिछ्याउँदा जम्मा कति खर्च लाग्ला ?
 - 15 m लम्बाइ र 10 m चौडाइ भएको कक्षाकोठामा सिलिङमा प्रति वर्ग मिटरको रु. 34.5 का दरले कागज टाँस्दा जम्मा कति लागत लाग्ला ?
 - 10 ft x 8 ft को भान्छा कोठा वरिपरि 4 फिट उचाइसम्म प्रति वर्ग फिटको रु. 350 का दरले टायल राख्दा जम्मा कति लागत लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - 9 ft x 12 ft, 14 ft x 16 ft र 12 ft x 14 ft का तिन ओटा कोठाहरू भएको एउटा घरको उचाइ 9 ft छ । प्रति वर्ग फिटको रु. 160 का दरले सबै भित्ताहरूमा भित्रपट्टि रड लगाउँदा जम्मा कति रकम चाहिएला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल 450 m^2 छ । यदि उक्त कोठाको लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 15 m र 12 m भए उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा हलको भित्री लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 50 m, 45 m, र 40 m छ । उक्त हलमा $2.5 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ का पाँच ओटा भूयालहरू र $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ का दुई ओटा ढोकाहरू छन् भने

- (क) भुइँ र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) भ्याल ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) सिलिडमा प्रतिवर्ग मिटरमा चार ओटा बुट्टा बनाइएको छ भने जम्मा कति ओटा बुट्टाहरू होलान् ?
- (घ) भुइँमा प्रतिवर्ग मिटरमा 8 ओटा टायल अथवा ढुङ्गा छाप्दा जम्मा कति ओटा टायल अथवा ढुङ्गा चाहिएलान् ?
- (ङ) प्रतिवर्ग मिटरको रु. 315 का दरले प्लास्टर गर्दा चारै ओटा भित्ताका लागि कति रकम चाहिएला ?
4. लम्बाइ 7 m र चौडाइ 5 m भएको कोठामा 2 m x 1.5 m को एउटा ढोका र 1 m x 1.5 m का दुई ओटा भ्यालहरू छन् । यदि प्रति वर्ग मिटर रु. 7.50 को दरले चार भित्तामा रङ लगाउँदा रु. 495 लाग्दछ भने कोठाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. 18 m x 9 m को भलिबल कोर्टमा 30 cm लम्बाइ भएको वर्गाकार दुबोका चपरीहरू बिछ्याउँदा
- (क) जम्मा कति ओटा चपरीहरू चाहिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) यदि एउटा चपरी बिछ्याउँदा रु. 225 पर्छ भने उक्त कोर्टमा चपरीहरू बिछ्याउनका लागि जम्मा कति लागत लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. तपाईँको आफ्नो सुत्ने कोठाको नाप लिनुहोस् ।
- (क) त्यसको चार भित्ताको, भुइँको र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) चार भित्तामा प्रतिएकाइ क्षेत्रफलमा रु. 25 का दरले कागज टाँस्दा जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) तपाईँको कोठाको सिलिडमा प्रतिएकाइ क्षेत्रफलको रु.275 का दरले भित्री सिलिड राख्नका लागि कति रुपैया चाहिएला ?
- (घ) भुइँमा कार्पेट राख्दा प्रतिएकाइ क्षेत्रफलको रु. 166 का दरले कति लागत लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. विद्यार्थीहरू 5/5 जनाको समूहमा बसौं । तपाईँहरूले अध्ययन गरिरहेको कक्षाकोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइका साथसाथै भ्याल तथा ढोकाको लम्बाइ र उचाइ नाप्नुहोस् र तलका समस्याहरूको समाधान समूहमा खोज्नुहोस् ।
- (क) भुइँ र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) भ्याल ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) हालसालै कायम रहेको दरअनुसार चार भित्ता र सिलिडमा रङ लगाउन जम्मा कति खर्च आवश्यक पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) प्रतिवर्ग फिट प्लास्टरको दर पत्ता लगाई भुइँ र चार भित्तामा प्लास्टर गर्न जम्मा कति रकम आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

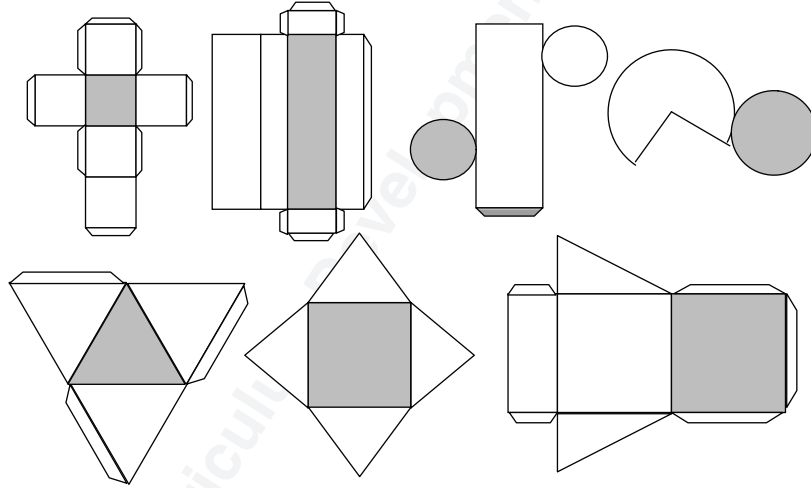
पाठ 6

ठोस वस्तुहरू (Solids)

6.0 पुनरावलोकन

विद्यार्थीहरूलाई 5/5 जनाको समूहमा विभाजन गरौं । प्रत्येक समूहलाई निम्नमध्ये एक एक ओटा चित्र बाँडौं ।

प्रत्येक समूहले आफ्नो समूहलाई परेको चित्रलाई काटौं र फोल्ड गरौं । त्यसपछि निम्न प्रश्नहरूको उत्तर खोजौं ।



(क) यो कुन ठोस वस्तुको जाली रहेछ ?

(ख) यसमा कति ओटा मोहडा रहेका छन् ?

(ग) यसमा कति ओटा शीर्षविन्दुहरू छन् ?

(घ) यसमा कति ओटा किनाराहरू छन् ?

(ङ) फोल्ड गर्नुपहिले र पछिको आकृतिमा कति फरक पाउनुहुन्छ ?

माथिका प्रश्नहरूको उत्तर समूहमा पत्ता लगाएर कक्षामा प्रस्तुत गरौं । अन्य समूहहरूले उत्तर प्रस्तुत गर्ने समूहलाई पृष्ठपोषण प्रदान गरौं ।

6.1 प्रिज्मको सतहको क्षेत्रफल तथा आयतन (Surface area and volume of Prism)

प्रिज्म के हो ? यसको आकार कस्तो हुन्छ ? सबैले कक्षामा छलफल गरौं र एक एक ओटा प्रिज्मको चित्र खिची कक्षामा प्रस्तुत गरौं ।

षट्मुखको तथा घनको क्षेत्रफल र आयतको बारेमा हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा नै अध्ययन गरिसकेका छौं । हामी यस पाठमा विभिन्न प्रकारका प्रिज्महरूका सतहको क्षेत्रफल, क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल, छुट्टै सतहको क्षेत्रफल र आयतनको बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

6.1.1 प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल (Total Surface area of Prism)

एउटा चक वा मसीको बट्टा वा कार्टुन लिऔं । त्यसका सबै भाग तथा मोहडाहरूलाई बिस्तारै खोलौं । कस्तो आकृति बन्दछ हेरौं । यसमा जम्मा कति ओटा अनुरूप सतहहरू रहेका छन्, चिह्न लगाऔं र तिनीहरूको नाप लिएर प्रत्येकको क्षेत्रफल पत्ता लगाऔं ।

यदि उक्त बट्टाको लम्बाइ (l), चौडाइ (b) र उचाइ (h)

भएमा यसको जम्मा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

समूहहरूमा छलफल गरेर निष्कर्ष पत्ता लगाऔं ।

यहाँ, जम्मा सतहहरू 6 ओटा छन् ।

तीमध्ये 3 जोडा अनुरूप छन् ।

तसर्थ, पुरा सतहको क्षेत्रफल

$$(A) = 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h) \text{ वर्ग एकाइ} \\ = 2(l \times b + b \times h + l \times h) \text{ वर्ग एकाइ हुन्छ ।}$$

यदि कुनै पनि प्रिज्म अनियमित आकारको छ भने त्यसको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनका लागि सबै सतहहरूको छुट्टै छुट्टै क्षेत्रफल पत्ता लगाएर योगफल निकाल्नुपर्दछ ।

उदाहरण 1

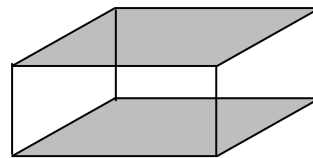
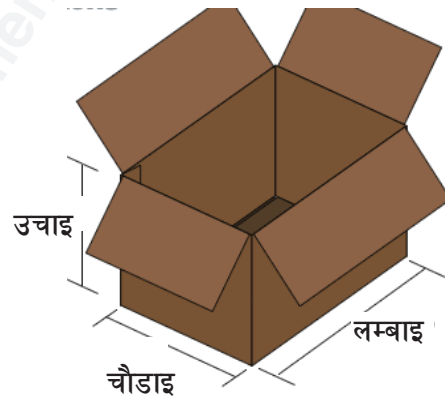
हरिसिद्धि विद्यालयको चौरमा 10 ft लम्बाइ, 10 ft चौडाइ र 2 ft उचाइ भएको एउटा खाने पानी ट्याङ्की छ । त्यसको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान:

यहाँ, ट्याङ्कीको लम्बाइ (l) = 10 ft

चौडाइ (b) = 10 ft

उचाइ (h) = 2 ft



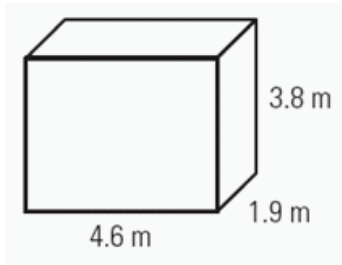
ट्याङ्कीको पुरा सतहको क्षेत्रफल (A) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, पुरा सतहको क्षेत्रफल (A)} &= 2(l \times b + b \times h + l \times h) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 2(10 \times 10 + 10 \times 2 + 10 \times 2) \text{ ft}^2 \\ &= 2(100 + 20 + 20) \text{ ft}^2 \\ &= 280 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

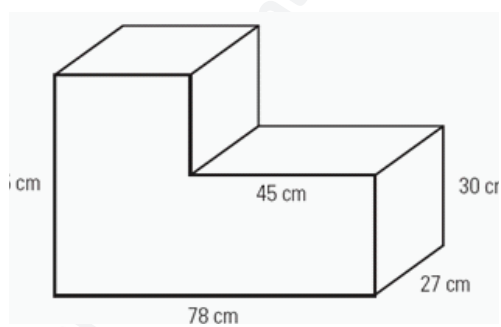
उदाहरण: 2

तल दिइएका ठोस आकृतिहरूको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

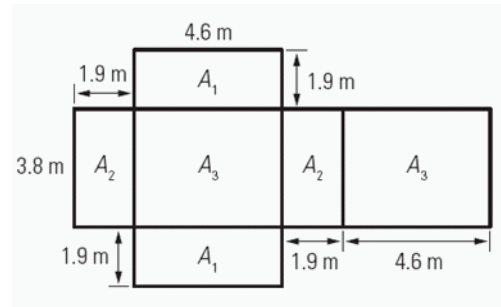


(ख)



समाधान:

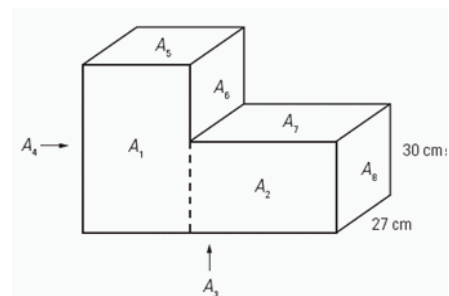
(क) दिइएको प्रिज्मलाई निम्नानुसार समतलीय आकृतिमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ। अब, उक्त प्रिज्मको सतहको क्षेत्रफल भनेको सबै आयताकार सतहहरूको सतह क्षेत्रफलको योगफल हो।



अब, प्रत्येक आयताकार सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस्।

पुरा सतहको क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= 2(lb + bh + lh) \\ &= [2 \times (3.8 \times 1.9) + 2 \times (1.9 \times 4.6) + 2 \times (4.6 \times 3.8)] \text{ m}^2 \\ &= [14.44 + 17.48 + 34.96] \text{ m}^2 \\ &= 66.88 \text{ m}^2 \end{aligned}$$



(ख) दिइएको प्रिज्मलाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी फरक फरक आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाएर योगफल निकाल्नुहोस् ।

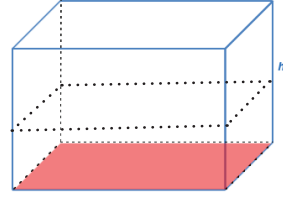
पुरा सतहको क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 2A_1 + 2A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 \\
 &= 2(55 \times 33) + 2(45 \times 30) + (27 \times 78) + (55 \times 27) + (27 \times 33) + (25 \times 27) + (45 \times 27) + \\
 &\quad (27 \times 30) \text{ cm}^2 \\
 &= (3630 + 2700 + 2106 + 1485 + 891 + 675 + 1215 + 810) \text{ cm}^2 \\
 &= 13512 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

6.1.2 प्रिज्मको क्रस सेक्सन क्षेत्रफल (Cross section Area of Prism)

कुनै पनि प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल भन्नाले के बुझिन्छ र यसलाई कसरी पत्ता लगाउन सकिनेछ ? एउटा प्रिज्मलाई त्यसका आधारको समानान्तर हुने गरी समतलीय आकृतिले काटौं । कस्तो आकृति बन्छ अवलोकन गरौं ।

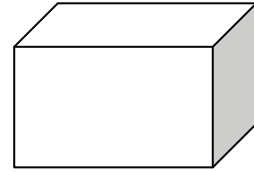
यहाँ, कुनै प्रिज्मलाई त्यसका आधारको समानान्तर हुने गरी समतलीय आकृतिले काट्दा बन्ने सतह नै क्रस सेक्सन क्षेत्रफल हो । सँगैको चित्रमा डट रेखाले देखाएको भाग त्यस प्रिज्मको क्रस क्षेत्रफल हो ।



6.1.3 प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल (Lateral surface area of Prism)

एउटा षट्मुखीकार प्रिज्म लिऔं । यसको लम्बाइ (l), चौडाइ (b) र उचाइ (h) छ । यसको आधार र आधारसँग समानान्तर हुने सतहबाहेकका अन्य सतहहरू कस्ता आकृतिका छन् हेरौं र तिनीहरूको एक एक गरी क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

अब, सबै क्षेत्रफलहरूको योगफल पत्ता लगाऔं । उक्त योगफल र छुट्टाछुट्टै सतहहरूको क्षेत्रफल तुलना गरी समूहमा निष्कर्ष पत्ता लगाएर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



अतः चार ओटा छड्के सतहहरूको क्षेत्रफलको योगफल नै प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल हो ।

$$\begin{aligned}
 \text{छड्के सतहहरूको क्षेत्रफल (S)} &= 2(l \times h) + 2(b \times h) \\
 &= h(2l + 2b) \text{ वर्ग एकाइ} \\
 &= \text{उचाइ} \times \text{आधारको परिमिति}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 3

तल दिइएको प्रिज्मको क्रस सेक्सन क्षेत्रफल र छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

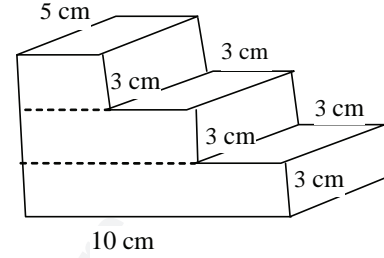
समाधान :

यहाँ, चित्रअनुसार,

प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल = $10 \times 3 + 7 \times 3 + 4 \times 3$ वर्ग सेमी

$$= 30 + 21 + 12 \text{ cm}^2$$

$$= 63 \text{ cm}^2$$



हामीलाई थाहा छ, प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल = प्रिज्मको क्रस सेक्सन क्षेत्रफल हुन्छ ।

तसर्थ, प्रिज्मको क्रस सेक्सन क्षेत्रफल = 63 cm^2

फेरि, प्रिज्मको आधारको परिमिति = $(10 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 9) \text{ cm}$

$$= 38 \text{ cm}$$

$$\text{उचाइ (h)} = 5 \text{ cm}$$

प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल

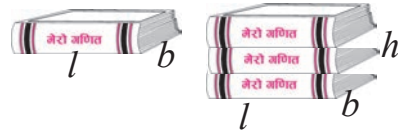
$$= (\text{उचाइ} \times \text{आधारको परिमिति}) \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= 5 \times 38 \text{ cm}^2$$

$$= 190 \text{ cm}^2 \text{ हुन्छ ।}$$

6.1.4 प्रिज्मको आयतन (Volume of Prism)

सबैले आआफ्नो गणित किताबको लम्बाइ र चौडाइ नापौं र क्षेत्रफल पत्ता लगाऔं । त्यसपछि प्रत्येक 5/5 जनाको समूहमा सबैले आआफ्नो गणित किताबहरू एक आपसमा खप्टाएर राखौं । त्यो प्रिज्म आकारको आकृतिको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ नापौं । रूलरको प्रयोग गरेर उक्त खप्टिएका किताबहरूको उचाइ नापौं ।



प्रत्येक समूहले आफ्नो प्रिज्मको उचाइ नापी लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ गुणन गरौं । प्राप्त नतिजाबाट निष्कर्ष पत्ता लगाएर अन्य समूहहरूमा साटासाट गरी आवश्यक पृष्ठपोषण आदान प्रदान गरौं ।

प्रिज्मको आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ

$$V = A \times h \text{ घन एकाइ}$$

तलको तालिका अध्ययन गरौं ।

क्र.स.	ठोस आकृतिहरू (Solid figures)	आधारको क्षेत्रफल तथा क्रस सेक्सन क्षेत्रफल	छड्के सतहको क्षेत्रफल (Lateral Surface Area)	पुरा सतहको क्षेत्रफल (Total surface area)	आयतन (Volume)
1.	षट्मुख (cuboid)	$A = l \times b$	$2h(l + b)$	$2(l \times b + b \times h + l \times h)$	$V = l \times b \times h = Axh$
2.	घन (Cube)	$A = l^2$	$4l^2 = 4A$	$6l^2 = 6A$	$V = l^3$
3.	प्रिज्म (prism)	$A =$ आधारको क्षेत्रफल = क्रस सेक्सन क्षेत्रफल	आधारको परिमिति \times उचाइ = $P \times h$	$P \times h + 2A$	आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ ($V = Axh$)

उदाहरण 4

तल दिइएको प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान:

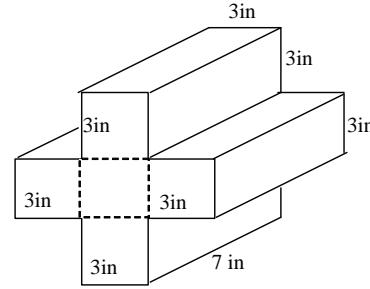
यहाँ, प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल = $5(3 \times 3)$ वर्ग इन्च
 $= 45 \text{ inch}^2$

प्रिज्मको पुरा सतहको क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times \text{आधारको क्षेत्रफल} + \text{बाँकी सतहहरूको क्षेत्रफल} \\
 &= 2 \times 45 + 12(3 \times 7) \text{ वर्ग इन्च।} \\
 &= 90 + 252 \text{ inch}^2 \\
 &= 342 \text{ inch}^2
 \end{aligned}$$

फेरि, प्रिज्मको आयतन (V) = (आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ) घन एकाइ

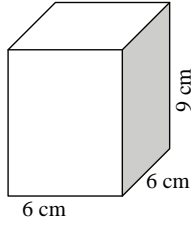
$$\begin{aligned}
 &= 45 \times 7 \text{ inch}^3 \\
 &= 315 \text{ inch}^3
 \end{aligned}$$



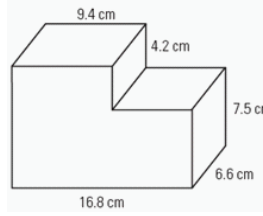
अभ्यास 6.1

1. दिइएका प्रिज्महरूको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

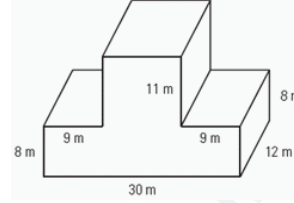
क)



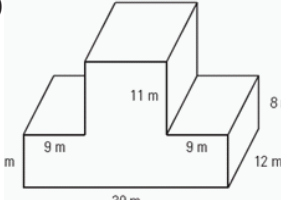
ख)



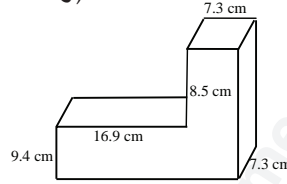
ग)



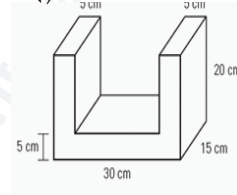
घ)



ङ)



च)



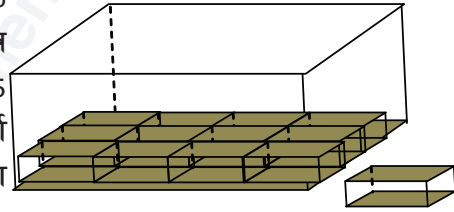
- लम्बाइ 5 cm , चौडाइ 6 cm र उचाइ 8 cm भएको प्रिज्मको (i) छड्के सतहको क्षेत्रफल (ii) क्रस क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- आधारको परिमिति 56 cm र उचाइ 12 cm भएको प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- प्रश्न नं. 1 मा दिइएका प्रिज्महरूको (i) क्रस सेक्सन क्षेत्रफल, (ii) छड्के सतहको क्षेत्रफल र (iii) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- तपाईंको घरमा भएका कुनै तिन ओटा प्रिज्महरूको नाम सङ्कलन गर्नुहोस् । तिनीहरूको नाप स्केलको सहायताले लिएर निम्न प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - क्रस सेक्सन क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा सलाईको बट्टाको नाप 4 cm x 2.5 cm x 1.5 cm छ भने 12 ओटा त्यस्तै सलाईको बट्टाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- गाउँमा रहेको षड्मुखाकार ट्याङ्कीको लम्बाइ 6m, चौडाइ 5m र उचाइ 3m छ । त्यसमा जम्मा कति लिटर पानी अटाउला ?
- 20 cm भुजाको लम्बाइ भएको घनाकार काठलाई बराबर आकारका 8 ओटा घनाकार टुक्राहरूमा

काटिएको छ अब एक टुक्रा काठको भुजाको लम्बाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. सहरको बिचमा रहेको घनाकार पानी ट्याङ्कीको आयतन 125 m^3 छ । यसको पुरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा आयताकार आधार भएको काठको मुढाको आयतन 720 cm^3 र आधारको क्षेत्रफल 120 m^2 छ भने यसको मोटाइ कति होला ?
11. तपाईंको विद्यालयमा भएको चौतारा वा मञ्चको सतहहरूको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

6.2 आयतन सम्बन्धी सङ्ख्या र मूल्यको अनुमान (Estimation of Numbers and Cost Related to Volume)

भित्री लम्बाइ 18 cm , चौडाइ 20 cm र उचाइ 6 cm भएको एउटा षड्मुख लिनौं । यसभित्र लम्बाइ 4.5 cm , चौडाइ 4 cm र उचाइ 1.5 cm भएका सलाईका बट्टा एकमाथि अर्को पने गरी मिलाएर राखौं । जम्मा कति ओटा सलाईका बट्टा अटाउलान् ? यदि एउटा सलाईको मूल्य रु. 2



पछि भने उक्त षड्मुख भरी सलाई राख्न कति रकम आवश्यक पर्छ ?

कुनै पनि पर्खालको निर्माण गर्दा लाग्ने ईटाको सङ्ख्या पत्ता लगाउनका लागि सबैभन्दा पहिले पर्खालको आयतन (V) पत्ता लगाउनुपर्छ । त्यसपछि एउटा ईटाको आयतन (v) पत्ता लगाउने । अन्त्यमा पर्खालको आयतनलाई ईटाको आयतनले भाग गर्ने । त्यो नै आवश्यक सङ्ख्या हो । यदि पर्खालको लम्बाइ L , चौडाइ B र उचाइ H , ईटाको लम्बाइ l चौडाइ b र उचाइ h भएमा,

पर्खालको आयतन (V) = $L \times B \times H$ घन एकाइ

ईटाको आयतन (v) = $l \times b \times h$ घन एकाइ हुन्छ ।

आवश्यक ईटाको सङ्ख्या (N) = $\frac{V}{v}$ हुन्छ ।

तसर्थ, पर्खालको आयतन (V) = $N \times v$ र प्रति ईटा आयतन (v) = $\frac{V}{N}$ गर्न सकिन्छ । यसका साथै यदि पर्खालमा भूयाल तथा ढोकाहरू भएमा के गर्नुपर्ला, समूह बनाएर छलफल गर्नुहोस् ।

एउटा ईटाको मूल्य रु. C पर्ने भए जम्मा खर्च (T) = $N \times C$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

20cm x 10 cm x 4 cm का 4000 ओटा ईटाहरूले बनेको पर्खालको आयतन कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान:

यहाँ, एउटा ईटाको आयतन (v) = 20cm x 10cm x 4 cm = 800 cm³

ईटाको सङ्ख्या (N) = 4000

पर्खालको आयतन (V) = N x v घन एकाइ

$$= 4,000 \times 800 \text{ cm}^3$$

$$= 32,00,000 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 2

लम्बाइ 11 m, चौडाइ 1m र उचाइ 5 m भएको पर्खाल निर्माण गर्नु छ । उक्त पर्खालका लागि (क) 22cm x 10cm x 5 cm का कति ओटा ईटा आवश्यक पर्छन् ? (ख) यदि प्रति ईटाको मूल्य रु. 12.50 पर्छ भने उक्त पर्खाल बनाउन जम्मा कति खर्च चाहिएला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, पर्खालको लम्बाइ (l) = 11m

चौडाइ (b) = 1 m

उचाइ (h) = 5 m

पर्खालको आयतन (V) = 11 x 1 x 5 m³

$$= 55 \text{ m}^3$$

ईटाको आयतन (v) = 22cm x 10cm x 5cm

$$= 0.22 \text{ m} \times 0.10\text{m} \times 0.05\text{m}$$

$$= 0.0011\text{m}^3$$

$$\text{(क) ईटाको सङ्ख्या (N)} = \frac{V}{v} = \frac{55}{0.0011}$$
$$= 50,000 \text{ ओटा}$$

(ख) एक ईटाको मूल्य (C) = रु. 12.50 पर्दछ ।

तसर्थ, ईटाहरूको जम्मा मूल्य (T) = N x C

$$= \text{रु. } 50,000 \times 12.50$$

$$= \text{रु. } 625,000 \text{ पर्दछ ।}$$

उदाहरण 3

एउटा आयतकार ट्याङ्कीको लम्बाइ 3 m र चौडाइ 1.5 m छ। उक्त ट्याङ्कीको भित्री भागमा 9000 लिटर पानी अटाउँछ भने उक्त ट्याङ्कीको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्। ($1\text{m}^3 = 1000 \text{ liter}$)

समाधान:

यहाँ, ट्याङ्कीको लम्बाइ = 3 m

ट्याङ्कीको चौडाइ = 1.5 m

ट्याङ्कीमा अट्ने जम्मा पानी = 9000 लिटर

ट्याङ्कीको उचाइ = ?

हामीलाई थाहा छ, 1000 लिटर पानी अटाउन 1m^3 आयतन भएको ट्याङ्की चाहिन्छ।

1 लिटर पानी अटाउन $\frac{1}{1000}\text{m}^3$ आयतन भएको ट्याङ्की चाहिन्छ।

9000 लिटर पानी अटाउन $\frac{1}{1000} \times 9000 = 9\text{m}^3$ आयतन भएको ट्याङ्की चाहिन्छ।

त्यस कारण, ट्याङ्कीको आयतन = 9m^3

ट्याङ्कीको आयतन = (आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ) घन एकाइ

अथवा, $9\text{m}^3 = (3 \times 1.5)\text{m}^2 \times h$

अथवा, $h = \frac{9}{4.5}\text{m} = 2\text{m}$

अतः ट्याङ्कीको उचाइ = 2m

उदाहरण 4

एउटा वर्गाकार कोठाको आयतन र उचाइ क्रमशः 87.5m^3 र 3.5 m छ। प्रतिवर्ग मिटरको रु. 150 का दरले चार भित्तामा प्लास्टर गर्दा जम्मा कति खर्च लाग्छ ?

समाधान :

यहाँ, वर्गाकार कोठाको आयतन (V) = 87.5m^3

कोठाको उचाइ (h) = 3.5 m

हामीलाई थाहा छ, वर्गाकार कोठाको आयतन (V) = 87.5m^3

अथवा, कोठाको आधारको क्षेत्रफल \times उचाइ = 87.5m^3

अथवा, कोठाको आधारको क्षेत्रफल \times 3.5 m = 87.5m^3

$$\text{कोठाको आधारको क्षेत्रफल (A)} = \frac{87.5\text{m}^3}{3.5\text{m}} = 25 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned}\text{अब, वर्गाकार कोठाको आधारको लम्बाइ} &= \text{चौडाइ} = \sqrt{\text{आधारको क्षेत्रफल (A)}} = \sqrt{\text{Area(A)}} \\ &= \sqrt{25\text{m}^2} \\ &= 5 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल (A)} &= 2 h (l + b) \text{ वर्ग एकाइ} \\ &= 2 \times 3.5 (10)\text{m}^2 \\ &= 70 \text{ m}^2\end{aligned}$$

प्रतिवर्ग मिटर प्लास्टरको लागत (C) = रु. 150 पर्छ ।

$$\begin{aligned}\text{तसर्थ, चार भित्तामा प्लास्टर गर्दा लाग्ने जम्मा खर्च } T &= C \times A \\ &= \text{रु. } 70 \times 150 \\ &= \text{रु. } 10,500\end{aligned}$$

उदाहरण 5

लम्बाइ चौडाइको दोब्बर भएको एउटा कोठामा 396 m^3 हावा छ । त्यसको सिलिडमा रड लगाउँदा प्रतिवर्ग मिटरको रु. 30 का दरले जम्मा रु. 2160 लाग्छ । त्यसका चार भित्तामा प्रतिवर्ग मिटरको रु. 60 का दरले रड लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

समाधान:

यहाँ, कोठाको चौडाइ (b) = x m मान्दा,

$$\text{लम्बाइ (l)} = 2 \times \text{x m हुन्छ ।}$$

$$\text{प्रश्नानुसार, कोठाको आयतन (V)} = 396 \text{ m}^3$$

$$\text{कोठाको सिलिडमा एक वर्ग मिटरमा रड लगाउँदाको खर्च} = \text{रु. } 30$$

तसर्थ, रु. 30 ले 1 वर्ग मिटरमा रड लगाउन पुग्छ ।

$$\text{रु. 1 ले } \frac{1}{30} \text{ वर्ग मिटरमा रड लगाउन पुग्छ ।}$$

$$\text{रु. } 2160 \text{ ले } \frac{1}{30} \times 2160 = 72 \text{ m}^2 \text{ मा रड लगाउन पुग्छ ।}$$

$$\text{त्यस कारण, कोठाको सिलिडको क्षेत्रफल (A)} = 72 \text{ m}^2$$

$$\text{अथवा, } 2x \times x = 72 \text{ m}^2$$

अथवा, $x^2 = 36 \text{ m}^2$

अथवा, $x = 6 \text{ m}$

कोठाको चौडाइ (b) = 6 m

कोठाको लम्बाइ (l) = 2 x 6 = 12 m

पुनः कोठाको आयतन (V) = 396 m³

अथवा, $l \times b \times h = 396 \text{ m}^3$

अथवा, $12 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times h = 396 \text{ m}^3$

अथवा, उचाइ (h) = $\frac{396}{72} \text{ m} = 5.5 \text{ m}$

अब, कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल = $2h(l + b)$ वर्ग एकाइ
= $2 \times 5.5(12 + 6) \text{ m}^2$
= $11 \times 18 \text{ m}^2$
= 198 m^2

भित्तामा एक वर्ग मिटरमा रङ लगाउँदाको खर्च = रु. 60

चार भित्ताको 198 m^2 मा रङ लगाउँदाको खर्च = रु. 60×198

= रु. 11,880 पर्दछ ।

अभ्यास 6.2

1. लम्बाइ 20 cm, चौडाइ 10 cm र उचाइ 4 cm भएका 4,000 ओटा ईँटाहरूको प्रयोग गरी तयार गरिएको पर्खालको आयतन कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. 100 m लम्बाइ, 0.3 m चौडाइ र 4.5 m उचाइ भएको पर्खाल लगाउन 15 cm लम्बाइ, 5 cm चौडाइ र 5 cm उचाइ भएका कति ओटा ईँटाहरू चाहिन्छन् होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा गोदामको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 40m , 25 m र 10 m छ । त्यस गोदाममा $1.5 \text{ m} \times 1.24 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ का बिस्कटका कति ओटा प्याकेट अटाउलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. बाराकोट गाउँको जनसङ्ख्या 40,000 छ । यदि प्रतिदिन एक जनाका लागि औसत 15 लिटर पानी आवश्यक पर्छ भने $20 \text{ m} \times 15 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ को ट्याङ्कीले जम्मा कति दिनलाई पुग्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. 50 m लामो 0.2 m चौडा र 2 m अग्लो पर्खालमा $1 \text{ m} \times 0.25 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ नापका दुई ओटा भूयालहरू राखेर निर्माण गर्दा $22 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ का कति ईँटाहरू चाहिएलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

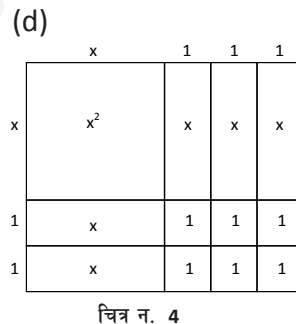
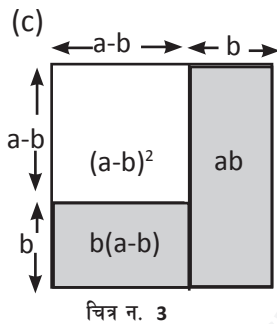
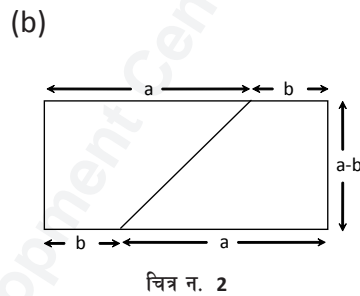
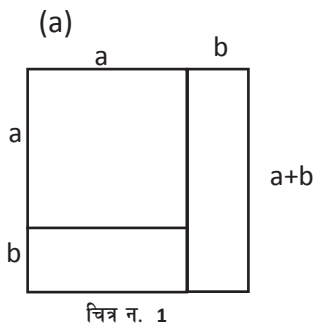
6. 15m लम्बाइ, 40 cm चौडा पखाल निर्माण गर्न 20 cm भुजा भएका 2450 घनाकार ब्लकहरू चाहिन्छन् । यदि उक्त पखालमा 2.5 m x 1 m को भ्याल र 2m x 3m को एउटा ढोका छ भने पखालको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. एउटा कोठाको आयतन, लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 600 m³, 15 m र 8 m छ । यदि उक्त कोठाको चार भित्तामा बुट्टा बनाउँदा प्रतिवर्ग मिटरको रु. 38 पर्छ भने चार भित्तामा बुट्टा बनाउँदा लाग्ने जम्मा खर्च कति होला ?
8. एउटा वर्गाकार कोठामा 405 घन मिटर हावा छ । यदि प्रतिवर्ग मिटरको रु.55 का दरले कार्पोटिङ गर्दा जम्मा रु. 4,455 पर्दछ । यसको चार भित्तामा प्रतिवर्ग मिटरको रु. 25.50 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. एउटा 63 m³ को पखाल बनाउन जम्मा रु.84,000 लाग्छ । यदि एउटा ईटाको मूल्य रु.13 पर्छ भने प्रत्येक ईटाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा कोठाको आयतन 550 m³ छ । उक्त कोठाको भुइँमा प्रतिवर्ग मिटरको ज्यालासहित रु. 240 का दरले प्लास्टर गर्दा रु. 26,400 खर्च लाग्दछ भने कोठाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. भारती भवन उच्च मा. वि. को पश्चिमपट्टि चौरको 200 मिटर लामो किनारामा 0.5 m चौडा र 1.5 m अग्लो ईटाको पखाल लगाउनु छ । उक्त पखालका लागि 20 cm x 10cm x 5 cm का ईटाहरू छानिए । यदि एउटा ईटाको खरिद मूल्य रु. 12, ढुवानी खर्च रु. 1.75 र ज्याला रु. 0.25 भएमा उक्त पखाल बनाउन जम्मा कति खर्च चाहिएला ?
12. 900 m³ आयतन भएको वर्गाकार कोठामा 2m x 1.5 m को एउटा ढोका र 1m x 1.5 m का दुई ओटा भ्यालहरू छन् । यदि प्रति वर्ग मिटरको ज्यालासहित रु. 7.50 को दरले भुइँमा टायल लगाउँदा रु. 1687.50 खर्च लाग्छ, भने कोठाको चार भित्तामा प्रतिवर्ग मिटरको रु. 12.5 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
13. कक्षाका सबै विद्यार्थीहरूलाई ५/५ जनाको समूहमा विभाजन गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहलाई विद्यालयको कम्पाउन्ड वा पखालको अलग अलग भागको नाप लिन लगाउनुहोस् । त्यसपछि प्रत्येक समूहलाई एक एक ओटा ईटा वा सिमेन्टको ब्लक दिएर त्यसको लम्बाइ, चौडाइ र मोटाइ नाप्न लगाउनुहोस् । आआफ्नो समूहलाई परेको पखालको भागको निर्माण गर्न आवश्यक पर्ने ईटा अथवा ब्लकको सङ्ख्या एवम् हालसालैको प्रति ईटा वा ब्लकको बजार मूल्यअनुसार उक्त पखाल निर्माणका लागि आवश्यक अनुमानित खर्च पत्ता लगाउन परियोजना कार्य दिनुहोस् ।

पाठ

7 बीजीय अभिव्यञ्जकहरू (Algebraic Expression)

7.0 पुनरावलोकन

तल दिइएकामध्ये एक एक ओटा चित्र प्रदान गरौं र समूहमा छलफल गरी प्रत्येक चित्रको क्षेत्रफल पत्ता लगाऔं ।



समूहमा छलफल गरी आफ्नो समूहको कार्यलाई कक्षामा प्रस्तुत गरौं र अन्य समूहहरूले सुझाव दिऔं ।
माथिका छलफलका आधारमा तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गरौं र नतिजालाई आफ्ना साथीसँग छलफल गरी उत्तरलाई कक्षामा प्रस्तुत गरौं ।

- $a^2 - b^2$?
- $x^2 - 4y^2 = \dots\dots\dots$?
- $z^2 - 10z + 25 = \dots\dots$?
- $y^2 + 6y + 9 = \dots\dots$?
- $a^2 - 2ab + b^2 = \dots\dots$?
- $z^2 - 10z + 25 = \dots\dots$?
- $a^3 - b^3 = \dots\dots$?
- $x^3 - 8y^3 = \dots\dots$?
- $x^3 + y^3 = \dots\dots$?
- $8z^3 - 1 = \dots\dots$?
- $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27 = \dots\dots$?

प्रत्येक समूहले गुणन खण्डहरूको गुणन गरी हेरौं, के पाउछौं ?

7.1 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण

(Factorization of the expression in the form of $a^4+a^2b^2 + b^4$)

$$\text{यहाँ } a^4+a^2 b^2+b^4 = (a^2)^2 + 2a^2 b^2 - a^2 b^2 + (b^2)^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \quad [\because a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2]$$

$$= (a^2 + b^2 + ab) (a^2 + b^2 - ab) \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= (a^2 + ab + b^2) (a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{अतः } a^4+a^2 b^2+b^4 = (a^2+ab + b^2)(a^2-ab+ b^2)$$

उदाहरण 1

$$\text{खण्डीकरण गर्नुहोस् : } x^4 + x^2 + 1$$

$$\text{समाधान : } x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2x^2 \cdot 1 + 1^2 - x^2$$

$$= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

के यसलाई अर्को तरिकाबाट पनि खण्डीकरण गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 2

$$\text{खण्डीकरण गर्नुहोस् : } x^4 + 4$$

समाधान : यहाँ,

$$x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + (2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

उदाहरण 3

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $x^4 - 3x^2 + 1$

समाधान :

यहाँ, $x^4 - 3x^2 + 1$

$$= x^4 - 2x^2 - x^2 + 1$$

$$= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1 - x^2$$

$$= (x^2 - 1)^2 - (x)^2$$

$$= (x^2 - 1 + x)(x^2 - 1 - x)$$

$$= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$$

उदाहरण 4

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}$

समाधान : यहाँ,

$$\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x^2}{y}\right) + 2 \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} + \left(\frac{y^2}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{y}\right) + 2 \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 1$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - (1)^2$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}\right) \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}\right)$$

उदाहरण 5

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $\frac{x^4}{y^4} + 1 - \frac{7x^2}{y^2}$

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} & \frac{x^4}{y^4} + 1 - \frac{7x^2}{y^2} \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} \cdot 1 - \frac{7x^2}{y^2} \quad [\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab] \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right)^2 - \frac{2x^2}{y^2} - \frac{7x^2}{y^2} \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right)^2 - \frac{9x^2}{y^2} \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right)^2 - \left(3 \frac{x}{y} \right)^2 \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 + 3 \frac{x}{y} \right) \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 - 3 \frac{x}{y} \right) \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)] \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + 3 \frac{x}{y} + 1 \right) \left(\frac{x^2}{y^2} - 3 \frac{x}{y} + 1 \right) \end{aligned}$$

उदाहरण 6

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $x^2 - 10x + 24 + 6y - 9y^2$

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 24 + 6y - 9y^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 25 - 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3y - (3y)^2 \\ &= (x-5)^2 - \{ 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3y + (3y)^2 \} \\ &= (x-5)^2 - (1-3y)^2 \\ &= (x-5+1-3y) \{ (x-5) - (1-3y) \} \quad [\because a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab] \\ &= (x-4-3y)(x-5-1+3y) \\ &= (x-4-3y)(x-6+3y) \\ &= (x-3y-4)(x+3y-6) \end{aligned}$$

अभ्यास 7

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

1. $y^4 + y^2 + 1$
2. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
3. $x^8 + x^4 + 1$
4. $x^4 + 4y^4$
5. $81x^4 + 64y^4$
6. $64x^4 + y^4$
7. $x^4 - 7x^2 + 1$
8. $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$
9. $49x^4 - 154x^2y^2 + 9y^4$
10. $25a^4 - 34a^2x^2 + 9x^4$
11. $256x^4 - x^2y^2 + 49y^4$
12. $1225x^4 + 31x^2y^2 + 64y^4$
13. $2025a^4 - 200a^2x^2 + 2401x^4$
14. $4a^4 + 35a^2x^2 + 121x^4$
15. $4x^4 + 8x^2y^2 + 9y^4$
16. $x^4 + 9x^2 + 81$
17. $x^4 + 1 + \frac{1}{x^4}$
18. $\frac{x^4}{y^4} + \frac{x^2}{y^2} + 1$
19. $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + 1$
20. $x^4 - 8x^2 - 33 - 14y - y^2$
21. $x^4 - 6x^2 - 7 - 8x - x^2$
22. $x^4 - 12x^2 - 28 + 16y - y^2$
23. $x^4 - 10x^2 + 24 + 6y^2 - 9y^4$
24. $x^2 - 10xy + 16y^2 - z^2 + 6yz$
25. $4225x^4 - 130x^2 - 3 + 36y^2 - 81y^4$
26. $x^2 - 90xy + 2050y^2 - 550yz - 3025z^2$
27. $169x^2 - 52x - 56y - 196y^2$
28. $4225x^2 - 130xy - 3y^2 - z^2 - 4yz$
29. $289x^2 + 170x + 24 - 38y^2 - 361y^4$
30. $x^2 + 50xy + 641y^2 - 8yz - z^2$

पाठ 8

घाताङ्क (Indices)

8.0 पुनरावलोकन

तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको मान पत्ता लगाउन समूहमा अभ्यास गरी र निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् :

- $x^2 \times x^3 = ?$ $y^5 \times y^2 = ?$ $a^4 \times a^7 = ?$
- $x^5 \div x^3 = ?$, $x^7 \div x^4 = ?$, $2^5 \div 2^2 = ?$
- $3(2-2) = ?$ $5(3-3) = ?$ $n(5-5) = ?$
- $(x^3)^2 = ?$ $(2^2)^3 = ?$ $(5^2)^2 = ?$
- $(x^3)^2 = ?$ $(2^2)^3 = ?$ $(5^2)^2 = ?$
- $\left(\frac{2}{x}\right)^3 = ?$ $\left(\frac{7}{x}\right)^3 = ?$ $\left(\frac{x}{5}\right)^4 = ?$

8.1 घाताङ्क सम्बन्धी समस्याहरू (Problems related to indices)

तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

10^3 र $\frac{1}{10 \times 10 \times 10}$ मा के फरक छ ?

के $(5)^3$ र $(5)^{-3}$ को मान एउटै हुन्छ ?

के $\sqrt[3]{64}$ र $\sqrt{64}$ ले एउटै मान दिन्छ ?

माथिका प्रश्नहरूका आधारमा निम्न निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ ।

(a) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ (b) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (c) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

उदाहरण 1

मान निकाल्नुहोस् ।

- (क) 4^{-2} (ख) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$ (ग) $\sqrt[3]{64}$

समाधान : यहाँ,

$$(क) 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$(ख) \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{2^{-4}} \\ = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$(ग) \sqrt[3]{64} \\ = (64)^{\frac{1}{3}} \\ = (4^3)^{\frac{1}{3}} \\ = 4^{3 \times \frac{1}{3}} \\ = 4^1 \\ = 4$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् : $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

समाधान :

यहाँ, $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \quad [\because x^m \div x^n = x^{m-n}]$$

$$= x^{(a-b)(a+b)} \times x^{(b-c)(b+c)} \times x^{(c-a)(c+a)} \quad [\because (x^m)^n = x^{mn}]$$

$$= x^{(a^2-b^2)} \times x^{(b^2-c^2)} \times x^{(c^2-a^2)} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= x^{(a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2)} \quad [\because (x^m \times x^n = x^{(m+n)})]$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस् : $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

समाधान :

यहाँ, $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$$\begin{aligned}
&= (x^{a-b})^{(a^2+ab+b^2)} \times (x^{b-c})^{(b^2+bc+c^2)} \times (x^{c-a})^{(c^2+ca+a^2)} & [\therefore x^m \div x^n = x^{m-n}] \\
&= x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \times x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)} & [\therefore (x^m)^n = x^{mn}] \\
&= x^{(a^3-b^3)} \times x^{(b^3-c^3)} \times x^{(c^3-a^3)} & [\therefore (a^3-b^3) = (a^2+ab+b^2)] \\
&= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3} & [\therefore (x^m \times x^n \times x^p = x^{(m+n+p)}] \\
&= x^0 = 1
\end{aligned}$$

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $a+b\sqrt{x^{a^2-b^2}} \times b+c\sqrt{x^{b^2-c^2}} \times c+a\sqrt{x^{c^2-a^2}} = 1$

समाधान :

यहाँ, L.H.S. = $a+b\sqrt{x^{a^2-b^2}} \times b+c\sqrt{x^{b^2-c^2}} \times c+a\sqrt{x^{c^2-a^2}}$

$$\begin{aligned}
&= (x^{a^2-b^2})^{\frac{1}{a+b}} \times (x^{b^2-c^2})^{\frac{1}{b+c}} \times (x^{c^2-a^2})^{\frac{1}{c+a}} \\
&= x^{\frac{(a-b)(a+b) \times \frac{1}{a+b}}{a+b}} \times x^{\frac{(b-c)(b+c) \times \frac{1}{b+c}}{b+c}} \times x^{\frac{(c-a)(c+a) \times \frac{1}{c+a}}{c+a}} \\
&= x^{a-b} \times x^{b-c} \times x^{c-a} \\
&= x^{a-b+b-c+c-a} \\
&= x^0 \\
&= 1 = \text{R.H.S. proved}
\end{aligned}$$

अभ्यास 8.1

1. मान निकाल्नुहोस् :

(i) $3^4 \times 3^{-4}$ (ii) $5^5 \times 5^{-5}$ (iii) $7^3 \times \frac{1}{7^3}$ (iv) $7^2 \times 7$

v) $5^3 \times 5^2$ (vi) 6×6^3 (vii) $(16)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$

viii) $(64)^{\frac{3}{6}}$ (ix) $\left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}} + \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$ (x) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{-3}{4}}$

(xi) $\left(\frac{625}{1296}\right)^{\frac{3}{4}}$ (xii) $\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}$

2. सरल गर्नुहोस् :

- (i) $\sqrt{81x^2y^2}$ (ii) $\sqrt{7225x^{-4}y^5}$
- (iii) $\sqrt[4]{1296x^2y^2}$ (iv) $x^{a-b} \times x^{(b-c)} \times x^{(c-a)}$
- (v) $x^{(a-b-c)} \times x^{(b-c-a)} \times x^{(c-a-b)}$ (vi) $x^{b^2+2ca} \times x^{c^2+2ab} \times x^{a^2+2bc}$
- (vii) $x^{a(a-c)} \times x^{b(c-a)} \times x^{c(a-b)}$ (viii) $\frac{1}{1+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{b-a}}$
- (ix) $\frac{1}{1-x^{a-b}} + \frac{1}{1-x^{b-a}}$ (x) $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^a \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^b \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c$

3. सरल गर्नुहोस् :

- (i) $\left(\frac{x^{-b}}{x^{-a}}\right)^c \times \left(\frac{x^{-c}}{x^{-b}}\right)^a \times \left(\frac{x^{-a}}{x^{-c}}\right)^b$ (ii) $\left(\frac{x^{-b}}{x^{-a}}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^{-c}}{x^{-b}}\right)^{c+b} \times \left(\frac{x^{-a}}{x^{-c}}\right)^{c+a}$
- (iii) $\left(\frac{x^a}{x^{-b}}\right)^{a-b} \times \left(\frac{x^b}{x^{-c}}\right)^{b-c} \times \left(\frac{x^c}{x^{-a}}\right)^{c-a}$ (iv) $\left(\frac{x^a}{x^{-b}}\right)^{a^2-ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^{-c}}\right)^{b^2-bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^{-a}}\right)^{c^2-ca+a^2}$
- (v) $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^q$ (vi) $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x+y} \times \left(\frac{a^y}{a^z}\right)^{y+z} \times \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^{z+x}$
- (vii) $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x^2+xy+y^2} \times \left(\frac{a^y}{a^z}\right)^{y^2+yz+z^2} \times \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^{z^2+zx+x^2}$
- (viii) $\left(\frac{a^x}{a^{-y}}\right)^{x^2-xy+y^2} \times \left(\frac{a^y}{a^{-z}}\right)^{y^2-yz+z^2} \times \left(\frac{a^z}{a^{-x}}\right)^{z^2-zx+x^2}$
- (ix) $x^{x+y}\sqrt{x^{x^2-y^2}} \times y^{y+z}\sqrt{y^{y^2-z^2}} \times z^{z+x}\sqrt{z^{z^2-x^2}}$
- (x) $\frac{1}{1+a^{x-y} + a^{z-y}} + \frac{1}{1+a^{y-z} + a^{x-z}} + \frac{1}{1+a^{z-x} + a^{y-x}}$

8.2 घाताङ्कयुक्त समीकरण (Exponential Equation)

यहाँ, $a^x = a^2$ मा

x को मान कति होला ?

a को मान कति होला ?

त्यस्तै गरी $a^x = 2^x$ मा x को मान कति होला ? के $a = 2$ लेखेमा उक्त समीकरण हल भएको मानिन्छ होला, छलफल गर्नुहोस् ।

हामीलाई थाहा छ,

यदि, $x^y = x^z$ भए $y = z$ हुन्छ । उही आधार भएको अवस्थामा समीकरणहरू हल गरी घाताङ्कको मान निकाल्नुलाई घाताङ्कयुक्त समीकरण हल भएको मानिन्छ ।

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् : $2^x = 32$

समाधान :

यहाँ, $2^x = 32$

अथवा, $2^x = 2^5$

$$\therefore x = 5 \quad [x^a = x^b \text{ हुँदा } a = b \text{ हुन्छ ।}]$$

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् : $27^x = 3^{x+4}$

समाधान:

यहाँ, $27^x = 3^{x+4}$

अथवा, $(3^3)^x = 3^{x+4}$

अथवा, $3^{3x} = 3^{x+4}$

अथवा, $3x = x + 4$

अथवा, $3x - x = 4$

अथवा, $2x = 4$

अथवा, $x = \frac{4}{2}$

$$\therefore x = 2$$

हल गर्नुहोस् : $3^{-x} = \frac{1}{243}$

समाधान:

यहाँ, $3^{-x} = \frac{1}{243}$

अथवा, $3^{-x} = \frac{1}{3^5}$

अथवा, $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{3^5}$

अथवा, $3^{-x} = 3^{-5}$

अथवा, $-x = -5$

$$\therefore x = 5$$

उदाहरण: 3

उदाहरण: 4

हल गर्नुहोस् : $2^x + 2^{x+2} = 5$

समाधान :

$$2^x + 2^{x+2} = 5$$

$$2^x + 2^x \times 2^2 = 5$$

$$2^x(1 + 2^2) = 5$$

$$2^x(1 + 4) = 5$$

$$2^x \cdot 5 = 5$$

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$\therefore x = 0$$

अभ्यास 8.2

हल गर्नुहोस् र जाँच्नुहोस् :

1. $3^x = 81$

2. $8^x = 2^{2x+1}$

3. $3 \times 81^x = 9^{x+2}$

4. $5 \times 125^x = 5^{x-2}$

5. $3^{x+1} + 3^x = 108$

6. $5^{2x+1} + 5^{2x} = 150$

7. $3^{x+1} \times 2^{2x+1} = 6$

8. $2^{x+3} + 2^x = 18$

9. $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

10. $5^x + \frac{1}{5^x} = 5\frac{1}{5}$

11. यदि $a^x = b^y = c^z$ र $b^2 = ac$ भए $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

पाठ 9

अनुपात र समानुपात (Ratio and Proportion)

9.0 पुनरावलोकन

प्रति किलो गोब्रे च्याउको मूल्य रु. 300 र प्रति किलो कन्ये च्याउको मूल्य रु.150 छ । त्यसो भए गोब्रे च्याउको मूल्य कन्ये च्याउको मूल्यभन्दा कति गुणाले बढी छ ? यसलाई अनुपातमा कसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ? प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

के 2 र 4 तथा 4 र 8 को अनुपात बराबर छ ?

दुई वा सोभन्दा बढी अनुपातहरू बराबर हुन्छन् भने ती अनुपातलाई समानुपात भनिन्छ ।

9.1 समानुपातका गुणहरू (Properties of Proportion)

- (i) यदि $a:b = c:d$ छ भने $b:a = d:c$ हुन्छ । समानुपातको यो गुणलाई उत्क्रम अनुपात (invertendo) भनिन्छ । जस्तै : $2:4 = 8:16$ हुन्छ भने $4:2 = 16:8$ हुन्छ ।
- (ii) यदि $a:b = c:d$ छ भने $a:c = b:d$ हुन्छ । समानुपातको यो गुणलाई एकान्तर अनुपात (alternendo) भनिन्छ ।
- (iii) यदि $a:b = c:d$ छ भने $(a + b) : b = (c + d) : d$ हुन्छ । समानुपातको यो गुणलाई योगान्तर (componendo) भनिन्छ ।
- (iv) यदि $a:b = c:d$ छ भने $(a - b) : b = (c - d) : d$ हुन्छ । समानुपातको यो गुणलाई अन्तर (dividendo) भनिन्छ ।
- (v) यदि $a:b = c:d$ छ भने $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$ हुन्छ । समानुपातको यो नियमलाई योगान्तर र अन्तर अनुपात (componendo and dividendo) भनिन्छ ।
- (vi) यदि $a:b = c:d$ छ भने $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ हुन्छ । यसलाई योग अनुपात (addenda) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ भए $\frac{4a+2b}{4a+3b}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

अब, $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ बाट $4a = 3b$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\frac{4a+2b}{4a+3b} = \frac{3b+2b}{3b+3b}$ [$\therefore 4a = 3b$]

$$= \frac{5b}{6b}$$

$$= \frac{5}{6} \quad [\text{अंश र हरबाट साभ्ना } b \text{ हटाउँदा}]$$

$$(4a + 2b) : (4a + 3b) = 5:6 \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 2

यदि $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ भए $\frac{5a-2b}{6a+2b}$ को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{6} \text{ भए } \frac{5a-2b}{6a+2b} = ?$$

अब $\frac{5a-2b}{6a+2b} = \frac{5\frac{a}{b}-2\frac{b}{b}}{6\frac{a}{b}+2\frac{b}{b}}$ [\therefore अंश र हरलाई b ले भाग गर्दा]

$$= \frac{5 \times \frac{5}{6} - 2}{6 \times \frac{5}{6} + 2} \quad [\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{6} \text{ भएकाले}]$$

$$= \frac{\frac{25}{6} - 2}{\frac{30}{6} + 2} = \frac{25 - 12}{6} \times \frac{6}{30 + 12} \quad [\therefore \frac{x}{1} = \frac{x}{1} \text{ हुने भएकाले}]$$

$$= \frac{13}{42}$$

$$\therefore (5a - 2b) : (6a + 2b) = 13:42 \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 3

यदि $(4a - 5b) : (5a + 4b) = \frac{1}{3}$ छ भने $a : b$ को मान कति होला ?

समाधान :

$$\text{यहाँ } (4a - 5b) : (5a + 4b) = \frac{1}{3} \text{ र } a : b = ?$$

$$\text{अब, } \frac{4a - 5b}{5a + 4b} = \frac{1}{3} \text{ बाट}$$

अथवा, $12a - 15b = 5a + 4b$

अथवा, $12a - 5a = 4b + 15b$

अथवा, $7a = 19b$

अथवा, $a : b = 19 : 7$

उदाहरण 4

यदि दुई ओटा सङ्ख्याहरूको अनुपात 5:6 छ र तिनीहरूको योगफल 33 छ भने ती सङ्ख्याहरूको मान कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान:

आवश्यक दुई सङ्ख्याहरू x र y मानौं,

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$ र $x + y = 33$ हुन्छ ।

अथवा $6x = 5y$ र $y = 33 - x$ हुन्छ ।

$\therefore 6x = 5(33 - x)$ [$\therefore y$ को मान $33 - x$ राख्दा]

अथवा, $6x = 165 - 5x$ [\therefore छ ले $33 - x$ लाई गुणन गर्दा]

अथवा, $6x + 5x = 165$ [$\therefore -5x$ लाई बायाँतर्फ लाँदा]

अथवा, $11x = 11 \times 15$ [$\therefore 165$ को गुणन खण्ड 11×15 राख्न सकिने]

$\therefore x = 15$ [\therefore दुवै तर्फबाट साभ्रा गुणन खण्ड 11 हटाउँदा]

र $y = 33 - 15$ [$\therefore x$ को मान 15 प्रतिस्थापन गर्दा]

$= 18$

अतः आवश्यक दुई सङ्ख्याहरू 15 र 18 हुन् ।

के यसलाई अर्को विधिबाट समाधान गर्न सकिन्छ, छलफल गरौं ।

उदाहरण 5

सङ्ख्या 455 लाई 6:7 को अनुपातमा हुने गरी दुई भागमा बाँड्नुहोस् ।

समाधान:

6:7 को अनुपातमा सङ्ख्याहरूलाई $6k$ र $7k$ मानौं, जहाँ k भनेको अचल हो ।

अब $6k + 7k = 455$ हुन्छ ।

अथवा, $13k = 13 \times 35$ [$\therefore 455 = 13 \times 7 \times 5 = 13 \times 35$]

$\therefore k = 35$

अब, k को मान प्रतिस्थापन गर्दा, $6k = 6 \times 35 = 210$ र

$$7k = 7 \times 35 = 245$$

अतः ती आवश्यक सङ्ख्याहरू 210 र 245 हुन् ।

अभ्यास 9.1

1. यदि $a:b = 1:2$ छ भने $(3a + b) : (4a + 2b)$ को मान कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. यदि $a:b = 3:4$ छ भने $(5a + 3b) : (5a + 4b)$ को मान निकाल्नुहोस् ।
3. यदि $a:b = 4:5$ छ भने $(6a - 3b) : (5a + 2b)$ को मान निकाल्नुहोस् ।
4. यदि $(3a - 5b) : (3a + 5b) = 1:4$ भए $a : b$ को मान कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. यदि $(5a - 3b) : (7a - 4b) = 9:13$ भए $a : b$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. दुई ओटा सङ्ख्याहरूको अनुपात $3:2$ छ भने ती सङ्ख्याहरू कति होलान्, जबकि ती दुई सङ्ख्याको अन्तर 5 छ ।
7. दुई ओटा सङ्ख्याहरूको योगफल 80 छ । यदि तिनीहरूको अनुपात $7:9$ भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. दुई ओटा सङ्ख्याहरूको फरक 20 छ । यदि ती सङ्ख्याहरूको अनुपात $9:13$ भए उक्त सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. बाबु र छोराको हालको उमेरको अनुपात $5:3$ छ । बाबु र छोराको हालको उमेरको अन्तर 30 छ । अब तिनीहरूको हालको वास्तविक उमेर निकाल्नुहोस् ।
10. आमा छोरीको हालको उमेरको अनुपात $1:3$ छ । यदि तिनीहरूको 5 वर्षपछिको उमेरको अनुपात $2:5$ भए तिनीहरूको हालको उमेरको अनुपात निकाल्नुहोस् ।
11. दुई जना मानिसहरूको हालको उमेरको अनुपात $4:5$ छ । यदि 6 वर्षअघि तिनीहरूको उमेरको अनुपात $7:9$ भए तिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।
12. प्रति कि.ग्रा. कन्ये च्याउ र गोब्रे च्याउको हालको बजार मूल्यको अनुपात $1:3$ छ । यदि प्रति कि.ग्रा. ती च्याउको मूल्यमा रु.50 ले वृद्धि हुँदा ती च्याउको बजार मूल्यको अनुपात $3:7$ हुन्छ भने प्रत्येक च्याउको सुरुको बजार मूल्य कति कति होला ?
13. रुपैयाँ 810 लाई $7:8$ को अनुपातमा हुने गरी दुई भागमा बाँड्नुहोस् ।
14. एक डोकामा भएको 192 ओटा सुन्तलालाई $7:9$ को अनुपातमा हुने गरी दुई भागमा बाँड्नुहोस् ।
15. दुई सङ्ख्याहरू $8:5$ को अनुपातमा छन्, यदि प्रत्येकमा 6 जोड्दा तिनीहरूको अनुपात $3:2$ हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

9.2 निरन्तर समानुपात (continued proportion)

कक्षा ९ का निम्नानुसारका रोल नम्बर जनाउने सङ्ख्याहरू छानौं ।

2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 1, 3, 9, 27

यी सङ्ख्याहरूबाट कति प्रकारले अनुपातहरू बनाउन सकिएला ? ती अनुपातहरू मध्ये कति ओटा समानुपातहरू देखाउन सकिएला ? कक्षामा साथीहरूसँग आवश्यक छलफल गरी अनुपात, समानुपात र निरन्तर समानुपातहरूको सूची तयार गर्नुहोस् । यहाँ केही समानुपातको नमुना प्रस्तुत गरिएको छ :

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \quad \text{र} \quad \frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24}$$

यी समानुपातमा अघिल्ला पाठमा पढेका समानुपातभन्दा के कस्ता नयाँ विशेषताहरू छन् ? छलफल गरी ती विशेषताहरू पत्ता लगाउनुहोस् । के ती विशेषताहरूले निरन्तर समानुपात (continuous proportion) लाई बुझ्न मद्दत गर्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ को रूपमा प्रस्तुत गर्न सकिने समानुपातलाई निरन्तर समानुपात भनिन्छ । यदि a, b,

c र d बाट $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ प्रस्तुत गर्न सकिने अवस्थामा a, b, c र d लाई निरन्तर समानुपातमा भएको मानिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ छ भने $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ मानौं,}$$

$$\text{तब, } \frac{a}{b} = k \text{ र } \frac{c}{d} = k \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{अथवा, } a = bk \text{ र } c = dk \text{ हुन्छ ।}$$

अब, a र c का मान बायाँ पक्ष र दायाँ पक्षमा क्रमशः प्रतिस्थापन गर्दा

$$\text{बायाँ पक्ष (LHS)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$= \frac{bk+b}{bk-b}$$

$$= \frac{b(k+1)}{b(k-1)}$$

$$= \frac{k+1}{k-1}$$

$$\text{दायाँ पक्ष (RHS)} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$= \frac{dk+d}{dk-d}$$

$$= \frac{d(k+1)}{d(k-1)}$$

$$= \frac{k+1}{k-1}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ छ भने $\frac{7a-5b}{7a+5b} = \frac{7c-5d}{7c+5d}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानौं,

तब, $a = bk$ र $c = dk$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष (LHS)} &= \frac{7a-5b}{7a+5b} \\ &= \frac{7.bk-5b}{7.bk+5b} \\ &= \frac{b(7k-5)}{b(7k+5)} \\ &= \frac{7k-5}{7k+5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दायाँ पक्ष (RHS)} &= \frac{7c-5d}{7c+5d} \\ &= \frac{7.dk-5d}{7.dk+5d} \\ &= \frac{d(7k-5)}{d(7k+5)} \\ &= \frac{7k-5}{7k+5}\end{aligned}$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f} = \sqrt[3]{\frac{ace}{bdf}}$

समाधान :

यहाँ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ मानौं

तब, $a = bk$, $c = dk$ र $e = fk$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष (LHS)} &= \frac{a+2c+3e}{b+2d+3f} \\ &= \frac{bk+2dk+3fk}{b+2d+3f} \\ &= \frac{k(b+2d+3f)}{b+2d+3f} \\ &= k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दायाँ पक्ष (RHS)} &= \sqrt[3]{\frac{ace}{bdf}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{bk.dk.fk}{bdf}} \\ &= \sqrt[3]{k^3} \\ &= k\end{aligned}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{b^2 + c^2 + 2bc} = \frac{a}{c}$

यहाँ, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ मानौं

तब, $b = ck$ र $a = bk = ck \cdot k = ck^2$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष (L.H.S)} &= \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{b^2 + c^2 + 2bc} \\ &= \frac{(ck^2)^2 + (ck)^2 + 2ck \cdot ck^2}{(ck)^2 + c^2 + 2 \cdot ck \cdot c} \\ &= \frac{c^2k^2(k^2 + 1 + 2k)}{c^2(k^2 + 1 + 2k)} \\ &= k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दायाँ पक्ष} &= \frac{a}{c} \\ &= \frac{ck^2}{c} \\ &= k^2\end{aligned}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ भए $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$ हुन्छ भनी देखाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ मानौं

तब, $c = dk$

$$b = ck = dk \cdot k = dk^2$$

$$a = bk = dk^2 \cdot k = dk^3 \text{ हुन्छ ।}$$

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष (LHS)} &= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \\ &= \frac{d^3k^9 + d^3k^6 + d^3k^3}{d^3k^6 + d^3k^3 + d^3} \\ &= \frac{d^3k^3(k^6 + k^3 + 1)}{d^3(k^6 + k^3 + 1)} \\ &= k^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दायाँ पक्ष (RHS)} &= \frac{a}{d} \\ &= \frac{dk^3}{d} \\ &= k^3\end{aligned}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 9.2

(क) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$1. \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

$$2. \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$$

$$3. \frac{7a+5c}{7a-5c} = \frac{7b+5d}{7b-5d}$$

$$4. \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$$

$$5. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$$

$$6. \frac{a^2+c^2}{b^2-d^2} = \frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}$$

$$7. \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ca}{db} = \frac{c^2}{d^2}$$

$$8. \frac{(a+b)^2}{(b+d)^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$9. \frac{a^2-ca+c^2}{b^2-bd+d^2} = \frac{(c+a)^2}{(b+d)^2}$$

$$10. \frac{(c+a)^3}{(b+d)^3} = \frac{b(a-c)^4}{a(b-d)^4}$$

(ख) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$1. \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}$$

$$2. \frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2} = \frac{ca}{bd}$$

$$3. \frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3} = \frac{ace}{bdf}$$

$$4. \left(\frac{a+c+e}{b+d+f} \right)^3 = \frac{ace}{bdf}$$

$$5. \frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3} = \left(\frac{a-2c+3e}{b-2d+3f} \right)^3$$

$$6. \frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2} = \frac{ac+ce+ea}{bd+df+fb}$$

$$7. \sqrt{\frac{a^3c^3+c^3e^3+e^3a^3}{b^3d^3+d^3f^3+f^3b^3}} = \frac{ace}{bdf}$$

$$8. \frac{a^2+c^2+e^2+2ac+2ce+2ea}{b^2+d^2+f^2+2bd+2df+2fb} = \frac{ac}{bd}$$

$$9. \frac{a^3-c^3-e^3}{b^3-d^3-f^3} = \left(\frac{a-c}{b-d} \right)^3$$

$$10. \frac{a^2c-c^2e-e^2a}{b^2d-d^2f-f^2b} = \frac{ace}{bdf}$$

(ग) यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$1. \frac{a-b}{b-c} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}}$$

$$2. \frac{a(a-b)}{b(b-c)} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$$

$$3. \frac{a(a-b)}{c(b-c)} = \frac{a^3-b^3}{b^3-c^3}$$

$$4. \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2} = \frac{a}{c}$$

$$5. \frac{a(a+b)}{c(b+c)} = \sqrt{\frac{a^3}{c^3}} \quad 6. \quad abc(a+b+c)^3 = (ab+bc+ca)^3$$

$$7. \quad a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^3 + b^3 + c^3 \quad 8. \quad \frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{a(a+b)}{c(b+c)}$$

$$9. \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^3} \quad 10. \quad abc(a^3 - b^3 - c^3) = (a^3b^3 - b^3c^3 - c^3a^3)$$

(घ) यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$1. \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{bc}{d^2}$$

$$2. \quad \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b^2c + c^2d + d^2b} = \frac{a}{d}$$

$$3. \quad \frac{a^3 + b^3 + abc}{b^3 + c^3 + bcd} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$$

$$4. \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + d^2} = \frac{a-b}{c-d}$$

$$5. \quad \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b^2c + c^2d + d^2b} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$$

$$6. \quad \frac{a-b}{b-c} = \frac{b-c}{c-d}$$

$$7. \quad \frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d}$$

$$8. \quad \frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{(c-d)^2}{cd}$$

$$9. \quad \frac{a^2 - ab}{b^2} = \frac{b^2 - bc}{c^2} = \frac{c^2 - cd}{d^2}$$

$$10. \quad \sqrt{(a-b-c)(b-c-d)} = \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{cd}$$

(ङ) यदि a, b र c निरन्तर समानुपातमा छन् भने $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(च) यदि a, b, c, d, e र f निरन्तर समानुपाती छन् भने $\frac{a}{f} = \frac{a^5}{b^5}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

पाठ

10 रेखीय समीकरण (Linear Equation)

10.0 पुनरावलोकन

एक जना उपभोक्ताले 3 कि.ग्रा. कन्ये च्याउ र 2 कि.ग्रा. गोब्रे च्याउको मूल्य रु.1050 तिरेछन् । तर अर्का उपभोक्ताले 2 कि.ग्रा. कन्ये च्याउ र 3 कि.ग्रा. गोब्रे च्याउको मूल्य रु.1200 तिरेछन् भने प्रत्येक च्याउको मूल्य कति कति पच्यो होला ? कक्षाकोठामा छलफल तथा तर्कबाट सही उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् । यस समस्यालाई बीज गणितीय ढङ्गले हल गर्न सकिन्छ वा सकिँदैन ? सकिन्छ भने यसलाई बीज गणितीय भाषामा कसरी प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ? शिक्षकसँग आवश्यक परामर्श वा निर्देशनमा लेख्ने प्रयास गर्नुहोस् ।

यहाँ माथि उल्लेखित दुई प्रकारका च्याउको मूल्यमा केन्द्रित भएर दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणहरू निर्माण र हल गर्ने तरिका बारे हेरौं ।

(i) 3 कि.ग्रा. कन्ये च्याउ र 2 कि.ग्रा. गोब्रे च्याउको मूल्य = रु.1050

(ii) 2 कि.ग्रा. कन्ये च्याउ र 3 कि.ग्रा. गोब्रे च्याउको मूल्य = रु.1200

प्रति कि.ग्रा. कन्ये च्याउको मूल्य = रु. x र प्रति कि.ग्रा. गोब्रे च्याउको मूल्य. रु. y मान्दा

$$3x + 2y = 1050 \dots \dots (i)$$

$$2x + 3y = 1200 \dots \dots (ii)$$

माथिका एक जोडी समीकरणमा x र y चल हुन् । यी दुवै प्रथम डिग्रीको समीकरण भएकाले ग्राफमा प्रत्येक समीकरणले सरल रेखा दिन्छन् । यहाँ पत्ता लगाउनुपर्ने चलहरू x र y का मानहरू दुवै समीकरणहरूलाई मान्य हुन्छ । x र y को मान पत्ता लगाउनुलाई नै समीकरणको हल भनिन्छ । यदि दुवै समीकरणहरूका चलहरूलाई एउटा निश्चित मान मात्र मान्य हुन्छ भने त्यस्ता समीकरणलाई युगपत रेखीय समीकरण भनिन्छ । यहाँ युगपत रेखीय समीकरणमा दुई ओटा चलहरू भएकाले ती समीकरणलाई दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरण पनि भनिन्छ ।

10.1 दुई चलयुक्त रेखीय समीकरण हल गर्ने विधिहरू

(Methods of Solving Simultaneous Linear Equations)

$x + y = 12$ र $x - y = 2$ मा दोस्रो समीकरणबाट $x = y + 2$ लेखी पहिलो समीकरण $x + y = 12$ मा x को मान $y + 2$ राख्दा y को मान कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

यसका विधिहरू निम्नानुसार छन् :

(क) प्रतिस्थापन विधि

(ख) हटाउने विधि

(ग) लेखाचित्र विधि

यसरी दुई वा सोभन्दा बढी युगपत रेखीय समीकरणमा एउटा समीकरणबाट एउटा चलको मान पत्ता लगाएर दोस्रो समीकरणमा राखेर चलहरूको मान पत्ता लगाउने तरिकालाई प्रतिस्थापन विधि भनिन्छ ।

10.1.1 प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् :

$$3x + 2y = 1050 \dots \dots (i)$$

$$2x + 3y = 1200 \dots \dots (ii)$$

यहाँ समीकरण (i) बाट

$$3x = 1050 - 2y \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{1050 - 2y}{3} \quad [\because \text{दुवै तर्फ 3 ले भाग गर्दा}]$$

अब, x को मानलाई समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$\frac{2(1050 - 2y)}{3} + 3y = 1200$$

$$\text{अथवा, } \frac{2100 - 4y + 9y}{3} = 1200$$

$$\text{अथवा, } 2100 + 5y = 3600 \quad [\because \text{क्रस गुणन गर्दा}]$$

$$\text{अथवा, } 5y = 3600 - 2100 \quad [\because 2100 \text{ लाई दायाँतर्फ लगदा}]$$

$$\text{अथवा, } y = 1500/5 \quad [\because \text{दुवैतर्फ 5 ले भाग गर्दा}]$$

$$\text{अथवा, } y = 300$$

$$\therefore y = 300 \text{ हुन्छ ।}$$

अब, y को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा

(यहाँ, y को मान समीकरण (i) र (ii) मध्ये जहाँ प्रतिस्थापन गर्दा पनि मान्य हुन्छ ।)

$$2x + 3 \times 300 = 1200 \text{ हुन्छ ।}$$

अथवा, $2x + 900 = 1200$

अथवा, $2x = 1200 - 900$ [\therefore 900 लाई दायाँतर्फ लम्दा]

अथवा, $2x = 300$

अथवा, $x = \frac{300}{2}$ [\therefore दुवैतर्फ 2 ले भाग गर्दा]

$\therefore x = 150$ हुन्छ ।

यहाँ माथि हल गरिएका x र y को मान प्रतिस्थापन गरी जाँचेर हेरौं :

पहिलो समीकरण

$$3x + 2y = 1050$$

अथवा, $3 \times 150 + 2 \times 300 = 1050$

अथवा, $450 + 600 = 1050$

अथवा, $1050 = 1050$

\therefore बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

पुनः दोस्रो समीकरण $2x + 3y = 1200$

अथवा, $2 \times 150 + 3 \times 300 = 1200$

अथवा, $300 + 900 = 1200$

अथवा, $1200 = 1200$

\therefore बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

तसर्थ x र y का प्रत्येक मान दुवै समीकरणमा मान्य छन् । हल गरेको बीज गणितीय प्रक्रिया उचित छ ।

10.1.2 हटाउने विधि (Elimination Method)

एक जना अभिभावकले 4 ओटा साना र 3 ओटा ठुला कापीको जम्मा मूल्य रु. 100, अर्को अभिभावकले उस्तै साना 5 ओटा र ठुला 2 ओटा कापीको जम्मा मूल्य रु. 90 तिर्नुपर्छ भने सो प्रति एकाइ सानो र ठुलो कापीको मूल्य कसरी पत्ता लगाउन सकिएला हटाउने विधिद्वारा हल गर्नुहोस् ।

यहाँ सानो कापीको बजार मूल्य रु. x र ठुलो कापीको बजार मूल्य रु. y मान्दा

$$4x + 3y = 100 \dots \dots (i)$$

र $5x + 2y = 90 \dots \dots (ii)$ हुन्छ ।

यहाँ y लाई हटाएर x मान निकाल्न समीकरण (i) लाई 2 ले र समीकरण (ii) लाई 3 ले गुणन गर्दा

$$[4x + 3y = 100] \times 2$$

र $[5x + 2y = 90] \times 3$ हुन्छ ।

अथवा, $8x + 6y = 200 \dots \dots \dots$ (iii)

$$15x + 6y = 270 \dots \dots \dots$$
 (iv)

यहाँ समीकरण (iii) र (iv) मा y को गुणाङ्क एउटै अङ्क 6 छ । त्यसैले समीकरण (iv) बाट समीकरण (iii) घटाउँदा y हट्छ र x मात्र बाँकी रहन्छ ।

$$\therefore 15x + 6y = 270 \dots \dots \dots$$
 (iv)

$$- (8x + 6y = 200) \dots \dots \dots$$
 (iii)

$$7x = 70 \quad [\text{घटाउदा चिह्न बदलनुपर्छ किन ?}]$$

अथवा, $x = \frac{7 \times 10}{7} \quad [\therefore 70 = 7 \times 10 \text{ तथा दुवैतर्फ 7 ले भाग गर्दा }]$

$$\therefore x = 10$$

अब x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$5 \times 10 + 2y = 90$$

अथवा, $2y = 90 - 50 \quad [\therefore 5 \times 10 = 50 \text{ लाई दायाँतर्फ लगदा }]$

अथवा, $y = \frac{40}{2} \quad [\therefore 90 - 50 = 40 \text{ र दुवैतर्फ 2 ले भाग गर्दा }]$

$$\therefore y = 20 \quad [\therefore 40 = 2 \times 20 \text{ र दायाँतर्फको अंश र हरबाट 2 हटाउँदा }]$$

अतः सानो कापीको मूल्य रु.10 पर्छ भने ठूलो कापीको मूल्य रु.20 पर्दछ ।

के यसलाई अर्को विधिबाट पनि समाधान गर्न सकिएला ? छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 2

हटाउने विधिद्वारा हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :

$$3x + 2y = 11 \dots \dots \dots$$
 (i)

$$4x - 3y = 9 \dots \dots \dots$$
 (ii)

समाधान : यहाँ समीकरण (i) लाई 3 र समीकरण (ii) लाई 2 ले गुणन गर्दा दुवै समीकरणमा y को गुणाङ्क समान हुन्छ ।

अतः $[3x + 2y = 11] \times 3$

$$[4x - 3y = 9] \times 2$$

अथवा, $9x + 6y = 33 \dots \dots \dots$ (iii)

$$8x - 6y = 18 \dots \dots \dots (iv)$$

समीकरण (iii) र (iv) लाई जोड्दा y हट्छ र x को मान निस्कन्छ ।

$$\therefore 9x + 6y = 33$$

$$+ \underline{8x - 6y = 18}$$

$$17x = 51 \text{ [जोड्दा चिह्न बदल्नु पर्दैन किन ?]}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{51}{17} = \frac{3 \times 17}{17}$$

$$\therefore x = 3 \text{ [}\therefore 51 = 3 \times 17 \text{ र दायाँतर्फको अंश र हरबाट 17 हटाउँदा]}$$

अब, x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$4 \times 3 - 3y = 9$$

$$\text{अथवा, } 12 - 3y = 9$$

$$\text{अथवा, } 3 = 3y$$

$$\therefore y = 1$$

अब, $x = 3$ र $y = 1$ राखी जाँचेर हेर्दा

समीकरण (i) बाट $3x + 2y = 11$ समीकरण

$$\text{अथवा, } 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$$

$$\text{अथवा, } 9 + 2 = 11$$

$$\text{अथवा, } 11 = 11$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

पुनः समीकरण (ii) बाट $4x - 3y = 9$

$$\text{अथवा, } 4 \times 3 - 3 \times 1 = 9$$

$$\text{अथवा, } 12 - 3 = 9$$

$$\text{अथवा, } 9 = 9$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

निष्कर्षः तसर्थ x र y को मान ठिक छ ।

10.1.3 लेखाचित्र विधि (Graphical Method)

समान्यतः दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणका आधारमा ग्राफमा लेखाचित्र अथवा सरल रेखाहरू खिच्दा दुवै सरल रेखाहरू एक आपसमा काटिँदा बन्ने प्रतिच्छेदन बिन्दु नै दुई चलहरूको मान हुन्छ। यसरी ग्राफमा दुई ओटा सरल रेखाहरू खिचेर दुई ओटा चलहरूको मान निकाल्ने वा पत्ता लगाउने विधिलाई लेखाचित्र विधि भनिन्छ।

उदाहरण 3

लेखाचित्र विधिद्वारा हल गर्नुहोस् : $2x + 3y = 12$ (i) र $x + 2y = 7$ (ii)

यहाँ समीकरण (i) र (ii) लाई ग्राफमा प्रस्तुत गर्न सर्वप्रथम दुवै समीकरणलाई $y = mx + c$ को रूपमा रूपान्तरण गर्नुपर्दछ।

$$\begin{aligned} \text{जस्तै: } 2x + 3y &= 12 & \text{र} & & x + 2y &= 7 \\ 3y &= -2x + 12 & & & 2y &= 7 - x \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{-2x + 12}{3}$$

$$\therefore y = \frac{-x + 7}{2}$$

त्यसपछि x का विभिन्न मानहरू राखी y का मानहरू निकालिन्छ। जसका आधारमा जोडा समीकरणलाई ग्राफमा प्रस्तुत गरिन्छ।

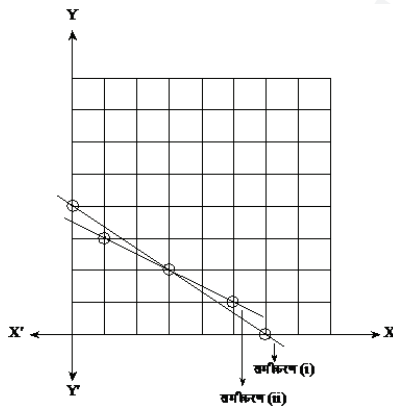
समीकरण (i) बाट

x	0	3	6
y	4	2	0

समीकरण (ii) बाट

x	1	3	5
y	3	2	1

तसर्थ समीकरण (i) र समीकरण (ii) को साझा बिन्दु (3, 2) हो।



समीकरण (i) का क्रमजोडा सङ्ख्याहरू (0, 4), (3, 2) र (6, 0) तथा समीकरण (ii) क्रमजोडा सङ्ख्याहरू (1, 3), (3, 2) र (5, 1) हुन्। यी क्रमजोडा सङ्ख्याहरूका आधारमा ग्राफमा सरल रेखाहरू खिच्दा बिन्दु (3, 2) मा काटिएका छन्। काटिएको उक्त बिन्दुको क्रमजोडा सङ्ख्या वा निर्देशाङ्क नै x र y का हल हुन्। तसर्थ $x = 3$ र $y = 2$ हुन्छ।

अभ्यास 10

(क) तल दिइएका जोडा रेखीय समीकरणहरूलाई प्रतिस्थापन विधिद्वारा हल गरी जाँचनुहोस् :

1. $x + y = 7$,
 $3x + y = 15$
2. $3x - 2y = 11$,
 $x + 3y = 11$
3. $2x + 3y = 7$,
 $3x + 5y = 24$
4. $3x - 2y = 3$,
 $x + 2y = 8$
5. $4x - 3y = 2$,
 $3x + 4y = 39$
6. $5x - 2y = 20$,
 $3x + 5y = 43$
7. $3x + 7y = 13$,
 $9x + y = 19$
8. $4x - 3y = -1$,
 $3x + 2y = 12$
9. $y = 5x + 1$,
 $2x - 5y = -51$
10. $3x + 4y = 27$,
 $7x - 2y = 29$

(ख) तल दिइएका जोडा समीकरणहरूको हल हटाउने विधिद्वारा हल गरी जाँचनुहोस् :

1. $7x + 9y = 41$,
 $2x + 3y = 13$
2. $5x + 6y = 27$,
 $3x + 4y = 17$
3. $2x - y = 1$
 $y = 3x$
4. $3x - 2y = 11$,
 $x - 4y = -3$
5. $3x + y = 100$
 $x - 4y = 120$
6. $9x - 8y = 12$,
 $2x + 3y = 17$
7. $x - 6y + 36 = 0$,
 $3x - 4y = 4$
8. $3x + 2y - 340 = 0$,
 $2x + 3y = 360$
9. $2x + y - 12 = 0$,
 $y = -12x + 6$
10. $x + 2y = 7$,
 $2x - y = 4$

(ग) ग्राफ विधिको प्रयोग गरी तल दिइएका जोडा रेखीय समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् :

1. $x + y = 7$,
 $x - y = 2$
2. $3x + y = 15$,
 $2x + 3y = 17$
3. $3x - 2y = 4$,
 $5x + y = 23$
4. $4x - 3y = 6$,
 $3x - 4y = 1$
5. $x + y = 25$,
 $x - y = 5$
6. $x + y = 9$,
 $x + 2y = 12$
7. $2x + y = 6$,
 $x + 2y = 6$
8. $x + 2y = 10$,
 $2x - y = 0$
9. $5x + 2y = 165$,
 $5x - 3y = 65$
10. $3x + 2y = 8$,
 $2x + y = 5$

(घ) दुई कि.ग्रा. कुखुराको मासु र 1 कि.ग्रा. खसीको मासुको मूल्य रू.1500 पर्छ । यदि 1 कि.ग्रा. कुखुराको मासु र 2 कि.ग्रा. खसीको मासुको मूल्य रू.1950 पर्दछ भने खसी र कुखुराको मासुको मूल्य प्रति कि.ग्रा. कति होला ? जोडा रेखीय समीकरणहरू बनाएर हल गर्नुहोस् ।

(ङ) कुनै विद्यालयको खेल मैदानको लम्बाइको एक तिहाइ चौडाइ छ । यदि उक्त आयताकार खेल मैदानको परिमिति 32 मिटर भए सो खेल मैदानको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

11 वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)

11.0 पुनरावलोकन

एक दिन निमाले आफ्नी दिदीलाई भनिन्छन् 'मसँग केही रूपैयाँ छ तर हजुरले मलाई 5 रूपैयाँ दिनु भयो भने मसँग 10 रूपैयाँ हुनेछ।' के यसलाई समीकरण बनाएर हल गर्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस्।

$0x^2 + 3x + 5 = 0$ र $x^2 - 12x + 20 = 0$ मध्ये कुन वर्ग समीकरण हो ? के $ax^2 + bx + c = 0$ सधैं वर्ग समीकरण हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस्। $x^2 - 25 = 0$ मा x को मान $-5, 0, 5, 25$ मध्ये कुन कुनले सन्तुलन गर्छन् ? समीकरण $x^2 - 25 = 0$ लाई शुद्ध वर्ग समीकरण (Pure Quadratic Equation) भनिन्छ भने $x^2 - 5x + 6 = 0$ लाई मिश्रित वर्ग समीकरण (Adfected Quadratic Equation) भनिन्छ। अतः $ax^2 - c = 0$ रूपको वर्ग समीकरण शुद्ध वर्ग समीकरण हो। जहाँ दोस्रो पद (bx) छैन। $ax^2 + bx + c = 0$ रूपको समीकरणलाई वर्ग समीकरणको सामान्य (General or Standard) रूप भनिन्छ। वर्ग समीकरणमा x को अधिकतम घाताङ्क '2' हुने भएकाले यसलाई दोस्रो डिग्री (Second Degree) समीकरण पनि भनिन्छ। वर्ग समीकरणमा x का दुई ओटा मानहरू (Values) हुन्छन्। जसलाई वर्ग समीकरणका मूलहरू (Roots of the Quadratic Equation) भनिन्छ। वर्ग समीकरणको हल विभिन्न तरिकाले गर्न सकिन्छ। यहाँ वर्ग समीकरणका हल गर्ने तिन ओटा विधिहरू प्रस्तुत गरिएको छ :

- खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरणको हल
- वर्ग पुरा गरेर वर्ग समीकरणको हल
- सूत्र प्रयोग गरेर वर्ग समीकरणको हल

11.1 खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरणको हल (Solution of the Quadratic Equation by Factorization Method)

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् : $x^2 - 3x + 2 = 0$

समाधान : यहाँ , $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\text{अथवा, } x^2 - (2 + 1)x + 2 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 2)(x - 1) = 0$$

अथवा कि, $x-2=0 \dots$ (i), कि $x-1=0 \dots$ (ii)

यहाँ पहिलो खण्डको समीकरणबाट $x=2$ र दास्रो खण्डको समीकरणबाट $x=1$ हुन्छ । अर्थात् $x=1$ र 2 हुन्छ । यसरी खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरण हल गर्दा सबै पदहरू बायाँतिर राखिन्छ र दायाँतर्फ केवल शून्य बाँकी राखिन्छ । बायाँतर्फको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई अघिल्ला पाठहरूमा गरिएका प्रक्रियाहरू अपनाएर खण्डीकरण गरिन्छ । वर्ग समीकरणमा भएको चलका दुई ओटा मानहरू निकालिन्छ । ती मानहरू धनात्मक वा ऋणात्मक कुनै पनि हुन सक्छन् ।

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् : $x^2 - 5x + 6 = 0$

समाधान : यहाँ, $x^2 - 5x + 6 = 0$

अथवा, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

अथवा, $x(x-3) - 2(x-3) = 0$

अथवा, $(x-3)(x-2) = 0$

कि, $x-3=0$ अथवा $x-2=0$ हुन्छ ।

अथवा, $x=3$ अथवा $x=2$

∴ माथि दिइएका वर्ग समीकरणका मूलहरू 2 र 3 हुन् ।

उदाहरण 3

हल गर्नुहोस् : $x^2 + 3x + 2 = 0$

समाधान : यहाँ, $x^2 + 3x + 2 = 0$

अथवा, $x^2 + 2x + x + 2 = 0$

अथवा, $x(x+2) + 1(x+2) = 0$

अथवा, $(x+2)(x+1) = 0$

कि, $x+2=0 \dots \dots \dots$ (i),

अथवा, $x+1=0 \dots \dots \dots$ (ii)

समीकरण (i) बाट $x=-2$ र समीकरण (ii) बाट $x=-1$ हुन्छ ।

∴ माथि दिइएका वर्ग समीकरणका मूलहरू -1 र -2 हुन् ।

उदाहरण 4

हल गर्नुहोस् : $x^2 + 4x + 4 = 0$

समाधान : यहाँ, $x^2 + 4x + 4 = 0$

अथवा, $x^2 + 2x + 2x + 4 = 0$

अथवा, $x(x + 2) + 2(x + 2) = 0$

अथवा, $(x + 2)(x + 2) = 0$

कि, $x + 2 = 0 \dots \dots (i),$

अथवा, $x + 2 = 0 \dots \dots (ii)$

समीकरण (i) र (ii) दुवैमा $x = -2$ हुन्छ । तसर्थ माथि दिइएका वर्ग समीकरणका मूलहरू -2 र -2 हुन् ।

11.2 वर्ग पुरा गरेर वर्ग समीकरणको हल**(Solving Quadratic Equation by Completing Square)****उदाहरण 5**

दिइएको वर्ग समीकरणलाई वर्ग पुरा गरेर हल गर्नुहोस् : $x^2 - 4x = -4$

समाधान :

यहाँ, $x^2 - 4x = -4$

अथवा, $x^2 - 4x + 4 = 0$

अथवा, $x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 0$

अथवा, $(x - 2)^2 = 0$

$x - 2 = 0$ अथवा $x - 2 = 0$ हुन्छ ।

$\therefore x = 2$ र $x = 2$ हुन्छ ।

अर्थात् वर्ग समीकरण $x^2 - 4x = -4$ का मूलहरू 2 र 2 हुन् ।

उदाहरण 6

वर्ग पुरा गरेर वर्ग समीकरणको हल गर्नुहोस् : $x^2 - 7x + 12 = 0$

समाधान :

यहाँ $x^2 - 7x + 12 = 0$

अथवा, $x^2 - 7x = -12$

अथवा, $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$ $[\because \text{दुवै तर्फ } \left(\frac{7}{2}\right)^2 \text{ थप्दा}]$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-12 \times 4 + 49}{4}$ [$\therefore a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ प्रयोग गर्दा]

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ [$\therefore -12 \times 4 + 49 = -48 + 49 = 1$]

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore x - \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$ [\therefore दुवैतर्फ वर्ग हटाउँदा]

अब घनात्मक चिह्न लिँदा

$$x - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

अथवा, $x = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$

अथवा, $x = \frac{1+7}{2}$

अथवा, $x = \frac{8}{2}$

$\therefore x = 4$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा

$$x - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

अथवा $x = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}$

अथवा, $x = \frac{-1+7}{2}$

अथवा, $x = \frac{6}{2}$

$\therefore x = 3$

\therefore वर्ग समीकरण $x^2 - 7x + 12 = 0$ का मूलहरू 3 र 4 हुन् ।

उदाहरण 7

वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ लाई वर्ग पुरा गरेर हल गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ $ax^2 + bx + c = 0$

अथवा, $ax^2 + bx = -c$

अथवा, $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$ [\therefore दुवैतर्फ a ले भाग गर्दा]

अथवा, $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ [\therefore दुवैतर्फ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ थप्दा]

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ [$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ प्रयोग गर्दा]

$$\text{अथवा, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\text{अथवा, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}} \quad [\text{दुवैतर्फ वर्ग हटाउँदा}]$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

तसर्थ वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूलहरू $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ र $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ हुन् ।

अतः वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ रूपमा रहँदा त्यसका मूलहरू निकाल्न $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ लाई सूत्रको रूपमा प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

जस्तै वर्ग समीकरण $x^2 - 5x - 6 = 0$ लाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा $a = 1, b = -5$ र $c = -6$ हुन्छ ।

$$\text{सूत्रअनुसार, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

यहाँ a, b र c का मानहरू प्रतिस्थापन गर्दा

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-6)(1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 7}{2}$$

अब धनात्मक चिह्न लिँदा

$$\begin{aligned}x &= \frac{5+7}{2} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा

$$\begin{aligned}x &= \frac{5-7}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1\end{aligned}$$

तसर्थ वर्ग समीकरण $x^2 - 5x - 6 = 0$ का मूलहरू 6 र -1 हुन् ।

11.3 सूत्र प्रयोग गरेर वर्ग समीकरणको हल

उदाहरण 8

सूत्र प्रयोग गरी दिइएको वर्ग समीकरणको हल गर्नुहोस् : $x^2 - 5x - 24 = 0$

समाधान :

यहाँ $x^2 - 5x - 24 = 0$ लाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा $a = 1$, $b = -5$ र $c = -24$ हुन्छ ।

अब, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ सूत्र प्रयोग गर्दा

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (-24) \cdot 1}}{2 \times 1} \quad [\because a, b \text{ र } c \text{ का मानहरू प्रतिस्थापन गर्दा }] \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 11}{2}\end{aligned}$$

अब, धनात्मक चिह्न लिँदा

$$\begin{aligned}x &= \frac{5+11}{2} \\ &= \frac{16}{2} \\ &= 8\end{aligned}$$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा

$$\begin{aligned}x &= \frac{5-11}{2} \\ &= \frac{-6}{2} \\ &= -3\end{aligned}$$

\therefore तसर्थ वर्ग समीकरण $x^2 - 5x - 24 = 0$ का मूलहरू -3 र 8 हुन् ।

अभ्यास 11.1

1. तल दिइएका वर्ग समीकरणहरू हल गर्नुहोस् र जाँचेर पनि हेर्नुहोस् :

(i) $(x - 1)(x + 2) = 0$

(ii) $(x - 2)(x - 3) = 0$

(iii) $(x - 5)(x - 3) = 0$

(iv) $(3x - 9)(x - 5) = 0$

2. खण्डीकरण विधिद्वारा हल गर्नुहोस् :

(i) $x(2x + 1) = 3x$

(ii) $x(x - 3) + 4x = 0$

(iii) $x^2 - x - 12 = 0$

(iv) $x^2 - x - 20 = 0$

(v) $x^2 + 11x + 30 = 0$

(vi) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(vii) $x^2 - 2x - 35 = 0$

(viii) $x^2 - 13x + 42 = 0$

(ix) $-x^2 + 16x - 63 = 0$

(x) $x^2 = 1225$

3. वर्ग पुरा गरेर हल गर्नुहोस् :

(i) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(ii) $x^2 - 18x + 81 = 0$

(iii) $x^2 - 4x - 21 = 0$

(iv) $x^2 - 4x - 45 = 0$

(v) $-x^2 + 4x + 77 = 0$

(vi) $x^2 + 117 = 22x$

(vii) $x^2 + x - 12 = 12$

(viii) $x^2 - 2x + 34 = 0$

(ix) $x^2 + \frac{15}{16} = 2x$

(x) $x^2 + \frac{2x}{3} = \frac{35}{9}$

4. सूत्र प्रयोग गरेर हल गर्नुहोस् :

(i) $x^2 - 10x + 21 = 0$

(ii) $x^2 - 17x + 72 = 0$

(iii) $x^2 = 2x + 143$

(iv) $x^2 - 30x + 221 = 0$

(v) $x^2 + 3x = 28$

(vi) $x^2 - 5x = 66$

(vii) $x\left(x + \frac{2}{7}\right) = \frac{3}{49}$

(viii) $x^2 + 2x = 323$

(ix) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$

(x) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{10}$

पाठ 12 त्रिभुज (Triangle)

12.0 पुनरावलोकन

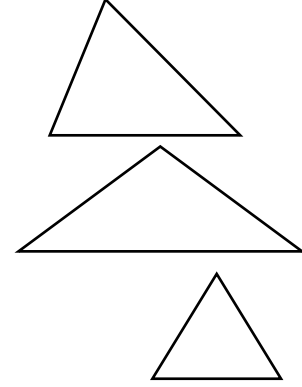
1 inch, 2 inch, 3 inch, 4 inch र 5 inch का बाँसका सिन्काहरू लिऔं । यिनीहरूमध्ये तिन तिन ओटा जोडेर के कति तरिकाले त्रिभुजाकारका आकृतिहरू बनाउन सकिन्छ ? के कुनै पनि तिन ओटा सिन्काहरूबाट त्रिभुजाकार आकृति बन्ला ? के 1 inch, 2 inch र 3 inch बाट त्रिभुज बन्ला ? नबने किन बन्दैन होला ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् । कम्पास र रूलरको प्रयोग गरी कापीमा उल्लिखित नापका आधारमा त्रिभुजहरू खिची छलफल गर्नुहोस् ।

भुजाका आधारमा त्रिभुजहरूको वर्गीकरण

(क) विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle): त्रिभुजमा तिन ओटै भुजाहरू एक आपसमा बराबर नभएको त्रिभुजलाई विषमबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।

(ख) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle): दुई ओटा भुजाहरू बराबर भएको त्रिभुजलाई समद्विबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।

(ग) समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle): तिन ओटै भुजाहरू बराबर भएको त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।

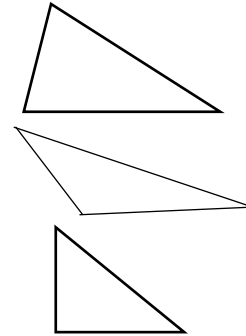


कोणका आधारमा त्रिभुजहरूको वर्गीकरण

(क) न्यूनकोण त्रिभुज (Acute-angled triangle): तिन ओटै कोणहरू न्यूनकोण (90° भन्दा कम) भएको त्रिभुजलाई न्यूनकोण त्रिभुज भनिन्छ ।

(ख) अधिककोण त्रिभुज (Obtuse-angled triangle): त्रिभुजको कुनै एक कोण अधिककोण (90° भन्दा बढी) भएको त्रिभुजलाई अधिककोण त्रिभुज भनिन्छ ।

(ग) समकोण त्रिभुज (Right-angled triangle): कुनै एउटा कोण समकोण (90°) भएको त्रिभुजलाई समकोण त्रिभुज भनिन्छ ।



12.1: ज्यामितीय गुणहरूको पुष्टि (Verification of geometrical properties)

प्रदीप र डिना कक्षा ९ मा अध्ययनरत विद्यार्थीहरू हुन्। उनीहरूबिच ज्यामितिको दोस्रो दिनको कक्षामा भएको वार्तालापको केही अंश तल दिइएको छ :

प्रदीप : त्रिभुजका के कस्ता गुणहरू हुन्छन् ?

डिना : त्रिभुजका भुजा र कोणहरूको सम्बन्ध जनाउने गुणहरू नै त्रिभुजका गुणहरू हुन्। जस्तै : त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ। त्रिभुजका दुई भुजाहरूको योगफल तेस्रोभन्दा बढी हुन्छ।

प्रदीप : त्रिभुजका गुणहरूलाई के कसरी प्रमाणित गर्न सकिन्छ ?

डिना : त्रिभुजका गुणहरूलाई प्रयोगात्मक र सैद्धान्तिक गरी दुई ओटा विधिद्वारा प्रमाणित गर्न सकिन्छ।

प्रदीप : ज्यामितीय गुणहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण र सैद्धान्तिक प्रमाण भन्नाले के बुझिन्छ ?

डिना : प्रयोगात्मक परीक्षण आगमन विधि (Inductive method) मा आधारित हुन्छ भने सैद्धान्तिक प्रमाण निगमन विधि (deductive method) मा आधारित हुन्छ। नापेर नतिजा निकाल्ने काम प्रयोगात्मक परीक्षणमा हुन्छ। विभिन्न त्रिभुजहरूको आन्तरिक कोणहरू नापी कुनै पनि त्रिभुजको आन्तरिक कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ भनेर पुष्टि गर्ने प्रयोगमा आधारित आगमन विधि हो। त्यस्तै पहिले पत्ता लागिसकेका सिद्धान्त, नियम वा सर्वस्वीकार्य गणितका तथ्यहरूमा आधारित भई पुष्टि गर्ने विधिलाई निगमन विधि भनिन्छ।

प्रदीप : पत्ता लागिसकेका सिद्धान्त भन्नाले केलाई जनाउँछ ?

डिना : यस बारेमा बढी स्पष्ट हुन गणित शिक्षकलाई नै सोधौं न।

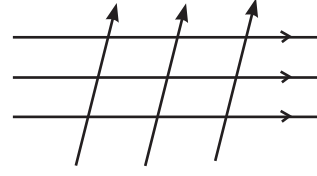
शिक्षक : त्यसो भए आगमन र निगमन विधि ज्यामितिमा कसरी प्रयोग गर्न सकिन्छ छोटकरीमा भन्न सक्छौ ?

विद्यार्थी : सक्छौं, आगमन विधिमा उदाहरणबाट सुरु गरी सामान्य नियम वा कथन लेख्नुपर्ने हुन्छ तर निगमन विधिमा एउटा सामान्य सत्य विषय वा सिद्धान्तका आधारमा कथनलाई प्रस्ट पार्ने काम हुन्छ।

शिक्षक : माथि प्रदीप र डिनाका बिचमा भएको छलफल पढिसकेपछि हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा ज्यामितिका विभिन्न गुणहरू कसरी स्थापित गरेका छौं, पुष्टि गरेका छौं, छलफल गरौं। आगमन विधिको साथै निगमन विधि किन आवश्यक पर्ला, छलफल गरी निष्कर्ष निकालौं।

12.2 समानान्तरीय रेखाहरूमा बन्ने कोणको अन्तर सम्बन्ध (Angle Relation on Parallel lines)

रुलर वा सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी कम्तीमा तिन ओटा समानान्तर रेखाहरू खिचौं र तिनीहरूलाई तिन वा सोभन्दा बढी छड्के समानान्तर रेखाहरूले चित्रमा देखाए जस्तै छेदन गरौं। अब त्यसबाट बन्ने ज्यामितीय आकृतिहरूका बारेमा छलफल गरौं।



त्यसपछि अर्का तिन ओटा समानान्तरीय रेखाले छेदन गर्ने गरी तल चित्रमा देखाए जस्तै बनेका कोणहरू कुन कुन समान छन्, पहिचान गरी लेखौं। यसरी बनेका एकान्तर कोणहरू, आन्तरिक र बाह्य कोणहरू त्यसै गरी भित्री कोणहरूको सम्बन्ध खोजौं। त्यसपछि चित्रमा देखिएका त्रिभुजका आन्तरिक कोणहरूको योगफल पत्ता लगाऔं।

जस्तै, त्रिभुज ABC मा

(क) $\angle 1$ र $\angle 2$ का एकान्तर कोण कुन कुन हुन् ?

(ख) $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ (किन ?)

(ग) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ को मान कति होला ?

(घ) त्रिभुज ABC भित्री कोणहरूको योगफल कति भयो कसरी भयो ?

(ङ) यस्तै प्रकारले अन्य त्रिभुजहरू देखाइ आन्तरिक कोणको योगफल निकाली यसका बारेमा पुष्टि गर्नुहोस्।

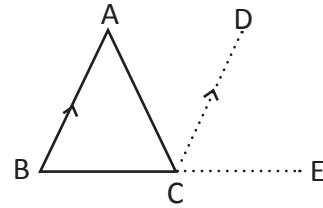
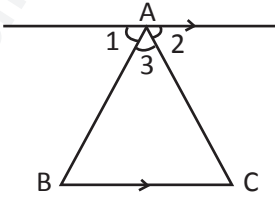
त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ भनेर पुष्टि गर्न समानान्तरीय रेखाका कोणहरू कसरी प्रयोग भएका छन् उल्लेख गर्नुहोस्।

साध्य 1 : त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल दुई समकोण हुन्छ।

थाहा दिइएको : ABC एउटा त्रिभुज हो। $\angle BAC$, $\angle ABC$ र $\angle ACB$ त्रिभुजका भित्री कोणहरू हुन्।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

रचना : BC लाई बिन्दु E सम्म लम्ब्याऔं। बिन्दु C बाट BA सँग समानान्तर हुने गरी CD खिचौं।



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\angle BAC = \angle ACD$	1. एकान्तर कोणहरू ($BA \parallel CD$) भएकाले।
2. $\angle ABC = \angle DCE$	2. सङ्गत कोणहरू ($BA \parallel CD$) भएकाले।
3. $\angle BCA + \angle ACD + \angle DCE = 180^\circ$	3. सिधा रेखा BE का एकैतिर एउटै बिन्दुमा बनेका कोणहरू भएकाले
4. $\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$	4. तथ्य 1, 2 र 3 बाट

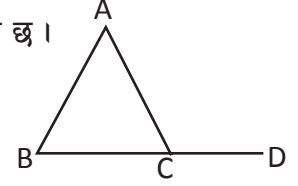
प्रमाणित भयो।

साध्य 2 : त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउदा बन्ने बाहिरी कोण दुई अनासन्न कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

थाहा दिइएको : त्रिभुज ABC को भुजा BC लाई बिन्दु D सम्म लम्ब्याइएको छ ।

$\angle ACD$ बाह्य कोण तथा $\angle ABC$ र $\angle BAC$ अनासन्न भित्री कोणहरू हुन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$	1. त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले । (साध्य १)
2. $\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$	2. सिधा रेखाका एकैतिर एउटै बिन्दुमा बनेका कोणहरू
3. $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle ACB + \angle ACD$	3. तथ्य 1 र 2 बाट
4. $\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$	4. तथ्य 3 मा दुवै तिरबाट $\angle ACB$ घटाउँदा ।

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा $BE \perp AC$ छ । यदि $\angle EBC = 30^\circ$, र $\angle DAC = 20^\circ$ भए

(क) $\angle ACD$ (ख) $\angle ADB$ (ग) $\angle AMB$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

(क) यहाँ, $BE \perp AC$ छ । त्यसैले, $\angle BEC = 90^\circ$ हुन्छ ।

फेरि, $\triangle BEC$ मा $\angle BEC + \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ$

अथवा, $90^\circ + 30^\circ + \angle ACD = 180^\circ$ [किन, कारण दिनुहोस् ।]

अथवा, $\angle ACD + 120^\circ = 180^\circ$ [किन, कारण दिनुहोस् ।]

अथवा, $\angle ACD = 180^\circ - 120^\circ$ [किन, कारण दिनुहोस् ।]

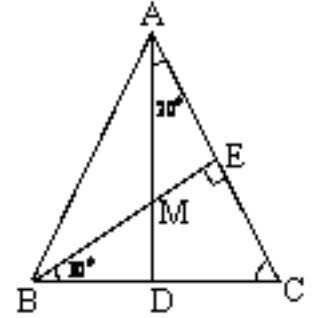
अथवा, $\angle ACD = 60^\circ$

(ख) $\triangle ADC$ मा $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$ [बाहिरी कोण, अनासन्न भित्री कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुने भएकाले]

अथवा, $\angle ADB = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$

(ग) $\triangle BMD$ मा, $\angle AMB = \angle MBD + \angle BDM$

अथवा, $\angle AMB = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$



उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा भुजा BC लाई बिन्दु D सम्म लम्ब्याइएको छ ।

यदि $\angle ABC$ को अर्धक BE र $\angle ACD$ को अर्धक CE भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\angle BAC = 2 \angle BEC$$

समाधान :

$\angle ABC = 2\angle EBC$ र $\angle ACD = 2\angle ECD$ [अर्धकले दिइएको कोणलाई दुई बराबर भागमा बाँड्ने भएकाले ।]

$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ [कुनै त्रिभुजमा बाह्यकोण, अनासन्न भित्री कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुने भएकाले ।]

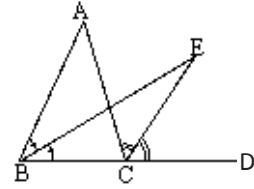
अथवा, $\angle BAC = \angle ACD - \angle ABC$

अथवा, $\angle BAC = 2\angle ECD - 2\angle EBC = 2(\angle ECD - \angle EBC)$

$\angle EBC + \angle BEC = \angle ECD$ [$\triangle BEC$ मा भुजा BC लाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण अनासन्न भित्री कोणहरूसँग बराबर हुने भएकाले]

अथवा, $\angle BEC = \angle ECD - \angle EBC$

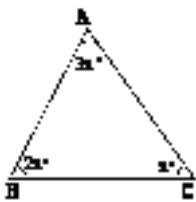
अथवा, $\angle BAC = 2\angle BEC$ (तथ्य 2 र 3 बाट)



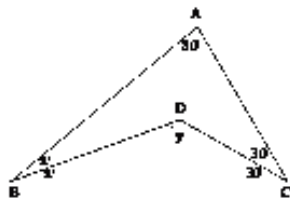
अभ्यास 12.1

1. तल दिइएका चित्रहरूमा x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

क)



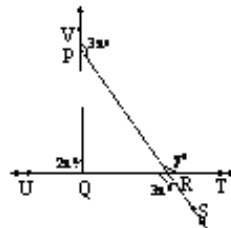
घ)



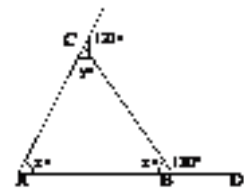
ख)



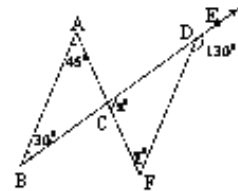
ङ)



ग)

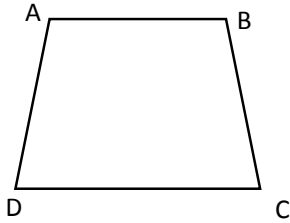


च)

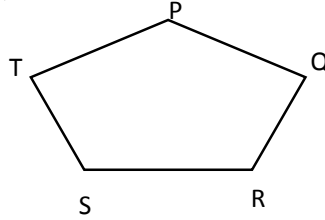


2. त्रिभुजका भित्री कोणहरूका योगफलको तथ्यलाई आधार मानेर तलका बहुभुजहरूका भित्री कोणहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

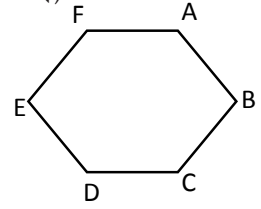
क)



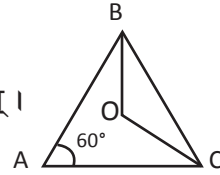
ख)



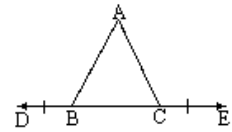
ग)



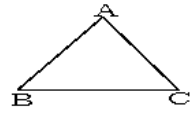
3. दिइएको चित्रमा, $\angle ABC$ र $\angle ACB$ का अर्धकहरू क्रमशः BO र CO छन् । $\angle BAC = 60^\circ$ छ । $\angle BOC = 120^\circ$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



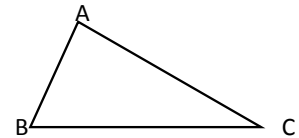
4. दिइएको चित्रमा भुजा BC लाई दुवैतिर बिन्दु D र E सम्म लम्ब्याइएको छ । $\angle ABE + \angle ACD + \angle BAC = 180^\circ$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



5. त्रिभुज ABC का भुजाहरू AB , AC र BC लाई क्रमशः दुवैतिर लम्ब्याउदा जम्मा फरक फरक कति ओटा बाहिरी कोणहरू बन्न सक्छन् ? ती सबै बाहिरी कोणहरूको योगफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ? यसका साथै बाहिरी र भित्री कोणको योगफलको अन्तरसम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।



6. तल दिइएको त्रिभुज ABC को शीर्ष बिन्दुहरू A , B र C बाट जाने गरी क्रमशः BC , CA र AB सँग समानान्तर हुने गरी समानान्तर रेखाहरू खिचनुहोस् । प्रत्येकका लागि त्रिभुज ABC को अन्तरिक कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



12.2: समद्विबाहु त्रिभुजका गुणहरूको पुष्टि (Verification of properties of Isosceles triangle)

समद्विबाहु त्रिभुज एक विशेष प्रकारको त्रिभुज हो, जसमा कुनै दुई ओटा भुजा बराबर हुन्छन् । दुई ओटा भुजा समान हुनाले यस्तो त्रिभुज सममितीय त्रिभुज (symmetric triangle) हुन जान्छ । यस कारणले यसमा विभिन्न गुणहरू छन् । समद्विबाहु त्रिभुजका समानबाहुका विपरीत कोणहरू बराबर हुन्छन् । यस्ता गुणहरूलाई सैद्धान्तिक साध्यको रूपमा प्रमाणित गरिन्छ । त्यस्ता प्रमाणमा दुई ओटा त्रिभुज अनुरूप हुने अवस्थाको प्रयोग हुने भएकाले त्रिभुजका अनुरूपताका शर्तहरूलाई यहाँ छोटकरीमा पुनरावलोकन गरिएको छ ।

दुई ओटा त्रिभुजहरू अनुरूप हुने अवस्थाहरूको पुनरावलोकन

(क) एउटा त्रिभुज अर्को त्रिभुजमाथि ट्याक्कै मिल्ने गरी राख्न सकिने भए के होला ?

(ख) भु.को.भु., को.भु.को. र भु.भु. अवस्थाहरू भनेका के होलान् ? यस्ता अवस्थाहरू किन आवश्यक परे होलान् ?

(ग) के समकोण, कर्ण र अर्को एक भुजालाई स.क.भु. लेख्न सकिन्छ होला ?

(घ) के दुई ओटा कोणहरू र तिनीहरूबिचका भुजा बराबर भएमा एउटा त्रिभुज अर्को त्रिभुजमाथि ट्याक्कै मिल्छ होला ?

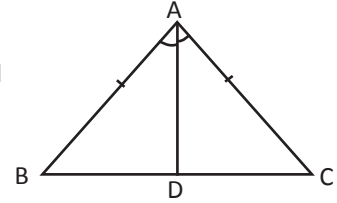
त्यस्तै, भु.को.भु. अवस्थामा दुई ओटा त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् भने भु.भु.को. अवस्थामा पनि त्रिभुजहरू अनुरूप होलान् ? जाँचेर हेरौं । यी अवस्थाहरूलाई कम्पास र रूलरका माध्यमबाट पनि पुष्टि गर्न सकिएला ? प्रयास गरौं ।

साध्य 3: समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : ABC एउटा समद्विबाहु त्रिभुज हो । जहाँ $AB = AC$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ABC = \angle ACB$

रचना : $\angle BAC$ को अर्धक AD खिचौं ।



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ मा	1.
(i) $AB = AC$ (भु)	i. थाहा दिइएकोबाट
(ii) $\angle BAD = \angle CAD$ (को)	ii $\angle BAC$ को अर्धक AD भएकाले (रचना)
(iii) $AD = AD$ (भु)	iii साझा भुजा भएकाले
2. $\triangle BAD \cong \triangle CAD$	2. भु.को.भु. अवस्थाबाट
3. $\angle ABD = \angle ACD$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू भएकाले

प्रमाणित भयो ।

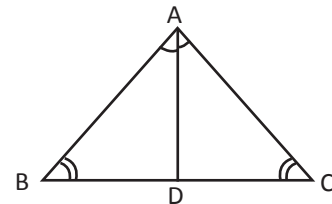
साध्य 4: कुनै त्रिभुजका दुई कोणहरू बराबर छन् भने ती कोणका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

(साध्य 3 को बिलोम)

थाहा दिइएको : $\triangle ABC$ मा $\angle ABC$ र $\angle ACB$ बराबर छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AB = AC$

रचना : $\angle BAC$ को अर्धक AD खिचौं ।



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ मा	
i. $\angle ABD = \angle ACD$ (को.)	i. थाहा दिइएअनुसार
ii. $\angle BAD = \angle CAD$ (को.)	ii. $\angle BAC$ को अर्धक AD भएकाले (रचना)
iii. $AD = AD$ (भु.)	iii. साझा भुजा भएकाले
2. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	2. को.को.भु. अवस्थाबाट
3. $AB = AC$	3. अनुरूप त्रिभुजहरू ABD र ACD का सङ्गत भुजाहरू भएकाले

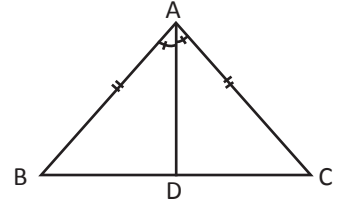
प्रमाणित भयो ।

साध्य 5: समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धक आधारमा लम्ब हुन्छ र यसले आधारलाई समद्विभाजन गर्दछ ।

थाहा दिइएको : समद्विबाहु $\triangle ABC$ मा $AB = AC$ र $\angle BAC$ को अर्धक AD छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $BD = DC$ र $AD \perp BC$.

($\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$)



प्रमाण:

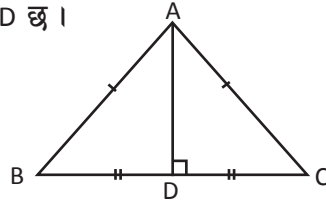
तथ्यहरू	कारणहरू
$\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ मा	1.
i. $AB = AC$ (भु.)	i. थाहा दिइएअनुसार
ii. $\angle BAD = \angle CAD$ (को.)	ii. $\angle BAC$ को अर्धक AD भएकाले (रचना)
iii. $AD = AD$ (भु.)	iii. साझा भुजा भएकाले
2. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	2. भु.को.भु. अवस्थाबाट
3. $BD = DC$	3. अनुरूप त्रिभुजहरू $\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ का सङ्गत भुजाहरू भएकाले
4. $\angle BDA = \angle CDA$	4. अनुरूप त्रिभुजहरू $\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ का सङ्गत कोणहरू भएकाले
5. $\angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$	5. सिधा रेखामा एकैतिर बनेका कोणहरूको योगफल भएकाले
6. $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$	6. तथ्य 4 र 5 बाट
7. $AD \perp BC$	7. तथ्य 6 बाट

प्रमाणित भयो ।

साध्य 6 : समद्विबाहु त्रिभुजमा आधारको लम्बार्धकले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ । (साध्य 5 को बिलोम)

थाहा दिइएको : $\triangle ABC$ मा $AB = AC$ छ र BC को लम्बार्धक AD छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BAD = \angle CAD$



प्रमाण :

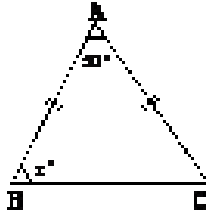
तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle ABD$ र $\triangle ACD$ मा	
ii) $\angle ADB = \angle ADC$ (स.)	(i) थाहा दिइएअनुसार
(ii) $AB = AC$ (क.)	(ii) थाहा दिइएअनुसार
(iii) $BD = DC$ (भु.)	(iii) BC को लम्बार्धक AD भएकाले
2. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	2.स.क.भु. अवस्थाबाट
3. $\angle BAD = \angle CAD$	3.अनुरूप त्रिभुजहरू BAD र CAD का सङ्गत कोणहरू भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

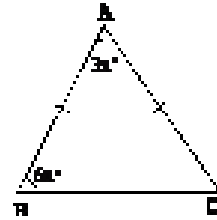
उदाहरण : 1

दिइएका चित्रहरूमा यदि $AB = AC$ भए x° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

क)



(ख)



समाधान :

क) (i) $\angle BAC = 50^\circ$, $AB = AC$ [थाहा दिइएकोबाट]

(ii) $\angle ABC = \angle ACB$ [समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू भएकाले]

(iii) $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ [त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले]

$$\text{अथवा, } x^\circ + x^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } 2x^\circ = 130^\circ$$

$$\text{अथवा, } x^\circ = \frac{130^\circ}{2}$$

$$\therefore x^\circ = 65^\circ$$

ख) (i) $\angle ABC = 6x^\circ$, $\angle BAC = 3x^\circ$, $AB = AC$ [थाहा दिइएकोबाट]

(ii) $\angle ABC = \angle ACB$

[समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू भएकाले]

(iii) $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ [त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले]

अथवा, $6x^\circ + 6x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$

अथवा, $15x^\circ = 180^\circ$

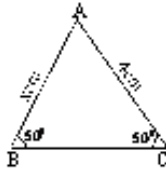
अथवा, $x^\circ = \frac{180^\circ}{15}$

$\therefore x^\circ = 12^\circ$

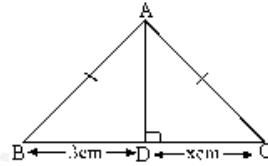
उदाहरण : 2

तल चित्रमा दिइएको जानकारीका आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)



(ख)



समाधान :

(क) (i) $\angle ABC = \angle ACB = 50^\circ$; $AC = 4\text{ cm}$, $AB = x\text{ cm}$ [थाहा दिइएकाबाट]

(ii) $AB = AC$ [त्रिभुजका बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरू भएकाले]

अथवा, $x\text{ cm} = 4\text{ cm}$

अथवा, $x = 4$

ख) (i) $AB = AC$, $AD \perp BC$, $DC = x\text{ cm}$, $BD = 3\text{ cm}$ [थाहा दिइएकाबाट]

(ii) $BD = DC$ [समद्विबाहु त्रिभुजमा लम्ब रेखाले आधारलाई दुई बराबर भागमा बाँड्ने भएकाले]

अथवा, $3\text{ cm} = x\text{ cm}$

$\therefore x = 3$

उदाहरण : 3

दिइएको चित्रमा $PQ = PR$ र $AQ = BR$ छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $AP = BP$

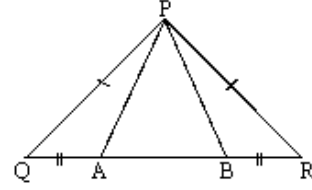
(ख) $\angle PAB = \angle PBA$

समाधान :

थाहा दिइएको : $PQ = PR$ र $AQ = BR$

प्रमाणित गर्नुपर्ने : क) $AP = BP$

(ख) $\angle PAB = \angle PBA$



1. $\angle APQ$ र $\angle BRP$ मा

(i) $PQ = PR$ (भु.)

[थाहा दिइएकाबाट]

(ii) $\angle PQA = \angle PRB$ (को.)

[समद्विबाहु त्रिभुज PQR का आधारका कोणहरू भएकाले]

(iii) $QA = BR$ (भु.)

[थाहा दिइएकाबाट]

2. $\triangle APQ \cong \triangle BRP$

[भु.को.भु. अवस्थाअनुसार]

3. $AP = BP$; $\angle QPA = \angle RPB$

[अनुरूप त्रिभुजहरू APQ र RPB को सङ्गत भुजाहरू र कोणहरू भएकाले]

4. $\angle PQA + \angle APQ = \angle PRB + \angle RPB$ [बराबर कोणहरूको योगफल भएकाले]

5. $\angle PAB = \angle PBA$ [त्रिभुजको कुनै एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाह्यकोण भित्री अनासन्न दुई कोणको योगफलसँग बराबर हुने भएकाले।]

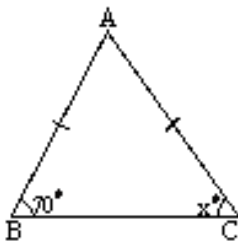
\therefore क) $AP = BP$

(ख) $\angle PAB = \angle PBA$ [तथ्य 3 र 5 बाट]

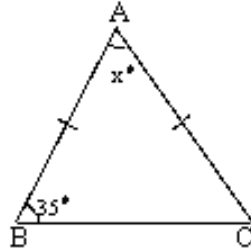
अभ्यास 12.2

1. तल चित्रमा दिइएको जानकारीका आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

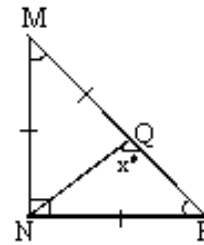
(क)



(ख)

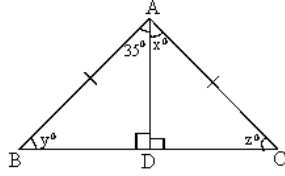


(ग)

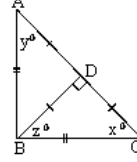


2. तल चित्रमा दिइएको जानकारीका आधारमा x° , y° र z° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

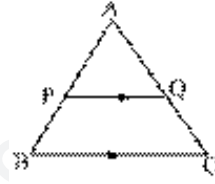
(क)



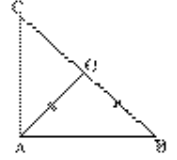
(ख)



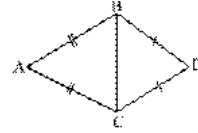
3. (क) दिइएको चित्रमा $AB = AC$ र $PQ \parallel BC$ भए $AP = AQ$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ख) दिइएको चित्रमा $AO = OB$ भए $\angle BAC = 90^\circ$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ग) दिइएको चित्रमा $\triangle ABC$ र $\triangle BCD$ समद्विबाहु त्रिभुजहरू हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



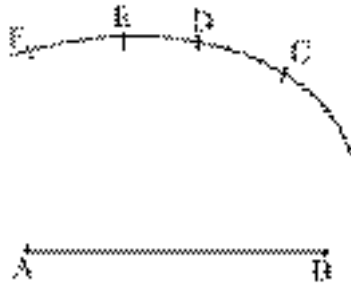
4. समबाहु त्रिभुजका तिन ओटै कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् । साथै यसको बिलोमको कथन लेखी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

5. के समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज हो, व्याख्या गर्नुहोस् ।

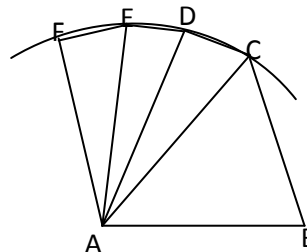
6. समद्विबाहु त्रिभुज रेखाङ्कित आकृतिहरू कुन कुन वस्तुहरूमा देख्न सकिन्छ सूची बनाउनुहोस् ।

12.3 त्रिभुजका कोणहरू र भुजाहरूको सम्बन्ध (Relation Between Sides and Angles of a Triangle)

क्रियाकलाप : चित्र नं 1 मा जस्तै एउटा रेखाखण्ड AB खिचौं । बिन्दु A बाट कम्पासका सहायताले एउटा निश्चित नापको चाप काटौं । उक्त चापमा C, D, E, F बिन्दुहरू देखाऔं ।



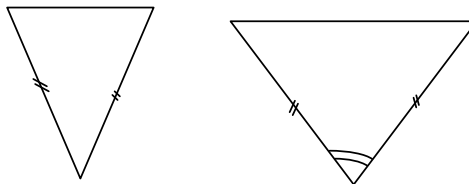
चित्र नं 1



चित्र नं 2

चित्र नं 2 जस्तै बिन्दुहरू C, D, E र F लाई A र B सँग जोडौं । तल दिइएका प्रश्नहरूको अवलोकन र मापन गरी जवाफ दिने प्रयास गरौं ।

- (क) आधार AB मा जम्मा कति ओटा त्रिभुजहरू बने ?
 (ख) प्रत्येक त्रिभुजमा सबभन्दा लामो भुजा कुन हो ?
 (ग) प्रत्येक त्रिभुजमा सबभन्दा छोटो भुजा कुन हो ?
 (घ) प्रत्येक त्रिभुजमा सबभन्दा ठुलो कोण कुन हो ?
 (ङ) प्रत्येक त्रिभुजमा सबभन्दा सानो कोण कुन हो ?
 (च) बिन्दु A र B मा बनेका कोणहरूको नापमा कसरी परिवर्तन भयो ?

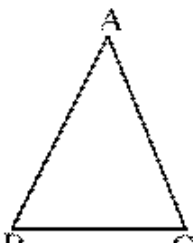


त्रिभुजमा भुजाको लम्बाइको अन्तर सम्बन्ध (Relation among sides in a triangle)

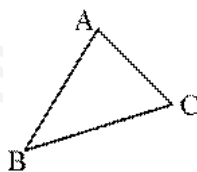
प्रयोगात्मक कार्य 1 (क) : विभिन्न लम्बाइका बाँसका सिन्काहरूको मुठा तयार गरी विद्यार्थीहरूलाई समूहमा बाँडौं । लामा र छोटो सिन्काको प्रयोगबाट प्रत्येक समूहलाई त्रिभुजाकार आकृतिहरू निर्माण गर्न लगाऔं । कस्ता सिन्काहरूले त्रिभुजाकार बने र कस्ताले बनेनन् । त्यस्ता सिन्काहरू अलग अलग राख्न लगाऔं । माथिका क्रियाकलापहरूबाट त्रिभुजका भुजाहरूका बिच कस्तो सम्बन्ध पाइयो प्रयोगात्मक अभ्यास गरौं । समूहमा निष्कर्ष पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरौं । त्यसपछि तलका प्रयोगात्मक अभ्यास गरौं ।

प्रयोगात्मक कार्य नं : 1 (ख)

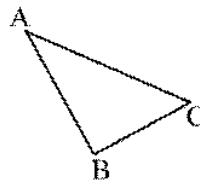
चित्रमा देखाइएजस्तै फरक फरक नापका तिन ओटा त्रिभुजहरू खिच्नुहोस् ।



चित्र नं : 1 (क)



चित्र नं 1 (ख)



चित्र नं : 1 (ग)

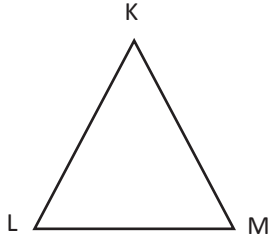
प्रत्येक त्रिभुजका भुजाहरू नापौं र दुई ओटा भुजाहरूको योग पनि निकाल्नुहोस् । प्राप्त नतिजालाई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

त्रिभुज	AB	BC	AC	AB + AC	AB + BC	BC + AC
1(क)						
1(ख)						
1(ग)						

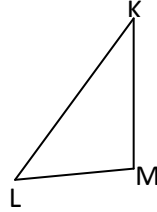
निष्कर्ष :

प्रयोगात्मक कार्य नं : 2 (क)

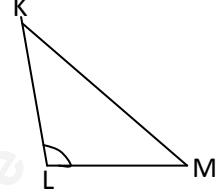
चित्रमा दिइए जस्तै तिन ओटा फरक फरक नापका विषमबाहु त्रिभुजहरू खिच्नुहोस् ।



चित्र नं : 2(क)



चित्र नं : 2(ख)



चित्र नं : 2(ग)

प्रत्येक त्रिभुजको सबभन्दा लामो भुजा र यसको सम्मुख कोण तथा सबभन्दा छोटो भुजा र यसको सम्मुख कोण नापी तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

त्रिभुज	सबभन्दा छोटो भुजा	सबभन्दा छोटो भुजाको सम्मुख कोण	सबभन्दा लामो भुजा	सबभन्दा लामो भुजाको सम्मुख कोण	कोण र भुजाहरूको तुलना
2(क)					
2(ख)					
2(ग)					

निष्कर्ष :

2. (ख) कोण भुजाको सम्बन्ध (Angle - side relation)

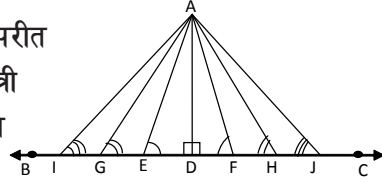
माथिको प्रयोगात्मक कार्यमा कोण र भुजाबिचको सम्बन्धको परीक्षण गरियो । यसबाट त्रिभुजमा ठुलो भुजाको सम्मुख कोण सानो भुजाको सम्मुख कोणभन्दा ठुलो हुन्छ भन्ने नतिजा देखियो । यसको बिलोम (converse) लाई कोण - भुजाका रूपमा जनाउँदा ठुलो कोणको विपरीत भुजा सानो कोणहरू विपरीत भुजाभन्दा ठुलो हुन्छ भनी प्रयोगात्मक रूपमा पुष्टि गर्नुहोस् ।

प्रयोगात्मक कार्य नं : 3

कुनै रेखामा नपर्ने बिन्दुबाट त्यस रेखामा खिचिएका रेखा खण्डहरूमध्ये लम्ब सबैभन्दा छोटो हुन्छ । सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी बिन्दु A बाट रेखा BC मा लम्ब AD खिचौं । लम्ब AD को दुवैतिर पर्ने गरी AE र AF, AG र AH, AI र AJ खिचौं । यसरी खिचिएका रेखाखण्डहरूमध्ये लम्बाइको आधारमा सबभन्दा छोटो कुन देखिन्छ सबभन्दा लामो कुन देखिन्छ, छलफल गरौं ।

दिइएको चित्रमा लम्बाइको आधारमा $AD < AF < AH < AJ$ छ भनेर कसरी पुष्टि गर्न सकिन्छ, विवेचना गर्नुहोस् ।

कुनै त्रिभुजमा ठुलो कोणको विपरीत भुजा सानो कोणको विपरीत भुजाभन्दा ठुलो हुन्छ भन्ने कथन र बाह्यकोण अनासन्न भित्री कोणभन्दा ठुलो हुन्छ भन्ने पहिले स्थापित कथनका आधारमा पुष्टि गरौं । यसपछि तलको प्रयोगात्मक कार्य नं. 4 गरौं ।



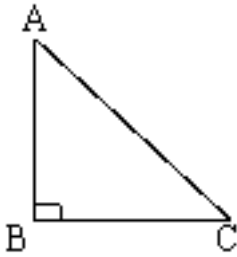
माथि उल्लिखित कथनको बिलोम कथन लेखी छलफल गर्नुहोस् ।

समकोण त्रिभुजमा भुजाहरूको नापको सम्बन्ध

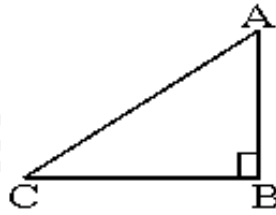
सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी समूहमा एक एक ओटा समकोण खिचौं । दुवै भुजाका अन्तिम बिन्दुहरू जोडी समकोण त्रिभुजहरू खिचौं र कर्णको लम्बाइ नापौं । उक्त समकोण त्रिभुजका तिन ओटा भुजाहरूमा वर्ग खिचौं । ती वर्गहरूको क्षेत्रफल निकालौं कर्ण र बाँकी भुजामा बनेका वर्गहरूको क्षेत्रफल तुलना गरौं । लेखाचित्रमा 3, 4, 5 र 6, 8, 10 इञ्च नाप भएका त्रिभुजहरू खिची उक्त सम्बन्ध पुष्टि गरौं । यसपछि तलको प्रयोगात्मक कार्य नं. 4 गरौं ।

प्रयोगात्मक कार्य नं : 4

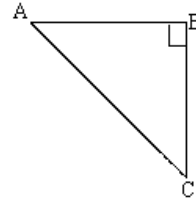
चित्रमा दिइए जस्तै सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी फरक फरक नापका तिन ओटा समकोण त्रिभुजहरू खिचौं ।



चित्र नं : 4(क)



चित्र नं : 4(ख)



चित्र नं : 4(ग)

प्रत्येक भुजाको नाप लिऔं र तिनीहरूको वर्ग निकालौं । प्राप्त नापअनुसार तल दिइएको तालिका भरौं ।

चित्र नं	AB को लम्बाइ	BC को लम्बाइ	AC को लम्बाइ	$AB^2 + BC^2$	AC^2
4(क)					
4(ख)					
4(ग)					

निष्कर्ष :

आफूले लेखेका निष्कर्षहरू तल दिइएका निष्कर्षहरूसँग मिल्नो मिलेन, दाँजेर हेरौं ।

प्रयोगात्मक कार्य	निष्कर्ष
1	त्रिभुजका जुनसुकै दुई भुजाहरूको योग तेस्रो भुजाभन्दा ठूलो हुन्छ ।
2	कुनै त्रिभुजको ठूलो कोणको सम्मुख भुजा सानो कोणको सम्मुख भुजाभन्दा ठूलो हुन्छ । कुनै त्रिभुजको लामो भुजाको सम्मुख कोण, छोटो भुजाको सम्मुख कोणभन्दा ठूलो हुन्छ ।
3	एउटा बाह्य बिन्दुबाट कुनै रेखासम्म खिचिएका रेखाखण्डहरू मध्ये लम्ब सबभन्दा छोटो हुन्छ ।
4	समकोण त्रिभुजमा कर्णको वर्ग अन्य दुई भुजाहरूको वर्गको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

प्रयोगात्मक कार्य नं 4 लाई पाइथागोरस साध्य भन्ने गरिन्छ, किनभने यसको नाम गणितज्ञ "पाइथागोरस" को नामबाट राखिएको हो । यसको प्रयोग ज्यामितिमा बाहेक अन्य गणितका क्षेत्रहरूमा समेत हुन्छ । त्रिभुजका कोण र भुजाहरूको सम्बन्ध तथा भुजाहरू र कोणहरूको अन्तर सम्बन्धलाई प्रस्ट पार्न तल दिइएका प्रश्नहरूमा आधारित भई छलफल गर्नुहोस् ।

- (क) कुनै पनि कोणको आकार बढाउँदा र घटाउँदा त्यसको भुजाका नापमा पनि फरक पर्छ, किन होला ?
- (ख) एउटा भोलुङ्गे पुल अथवा ठुला नदीहरूमा बनाइएका पुलहरूको भार सबभन्दा बढी पुलको केन्द्रमा हुन्छ किन होला ?
- (ग) के कुनै पनि समकोण त्रिभुजमा कर्णको वर्ग = लम्बको वर्ग + आधारको वर्गलाई ग्राफमा कसरी देखाउन सकिन्छ होला ?
- (घ) कुनै पनि त्रिभुज बनाउन दुई ओटा भुजाहरूको नापको योग तेस्रो भुजाभन्दा बढी नभए के हुन्छ होला ?

उदाहरण : 1

$\triangle ABC$ मा यदि $\angle BAC = 50^\circ$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भए सबैभन्दा लामो भुजा र सबैभन्दा छोटो भुजा कुन होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

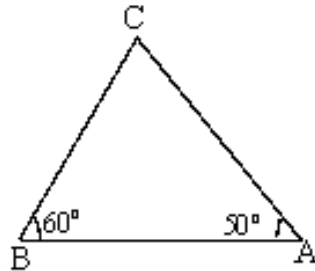
हामीलाई थाहा छ, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

अथवा, $50^\circ + 60^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

अथवा, $110^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

अथवा, $\angle ACB = 180^\circ - 110^\circ$

अथवा, $\angle ACB = 70^\circ$



यहाँ सबभन्दा ठुलो कोण $\angle ACB$ भएकाले त्यसको विपरीत भुजा AB सबभन्दा लामो भुजा हो भने सबभन्दा सानो कोण $\angle BAC$ भएकाले त्यसको विपरीत भुजा BC त्रिभुज ABC को सबभन्दा छोटो भुजा हुन्छ ।

उदाहरण : 2

चित्रमा $AB = AC = 25\text{cm}$ र $BC = 14\text{cm}$ छन् । यदि $AD \perp BC$ भए AD को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ,

$AB = AC = 25\text{cm}$, $BC = 14\text{cm}$ र $AD \perp BC$ [थाहा दिइएको]

$$BD = DC = \frac{1}{2} \times 14\text{cm}$$

$= 7\text{cm}$ [समद्विबाहु त्रिभुजमा शीर्षबिन्दुबाट आधारमा खिचिएको लम्बले आधारलाई दुई बराबर भागमा बाँड्ने भएकाले]

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ [समकोण } \triangle ADB \text{ मा पाइथागोरस साध्यअनुसार]}$$

$$\text{अथवा, } (25)^2 = (AD)^2 + (7)^2$$

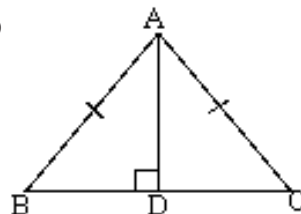
$$\text{अथवा, } 625 = (AD)^2 + 49$$

$$\text{अथवा, } 576 = (AD)^2$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{576} = AD$$

$$\text{अथवा, } 24 = AD$$

$\therefore AD$ को नाप 24cm हुन्छ ।



उदाहरण : 3

दिइएको चित्रमा $AB = BC$ भए AD र CD को बिचमा कस्तो सम्बन्ध होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, $\triangle ABC$ मा $AB = BC$ भएकाले AB र BC का सम्मुख कोणहरू $\angle BAC$ र $\angle ACB$ को नाप बराबर हुन्छ । त्यसैले $\angle BAC$ को नाप $\angle ADB$ भन्दा कम हुन्छ ।

फेरि $\triangle ACD$ मा AD को सम्मुख कोण $\angle BCA$ हो भने CD को सम्मुख कोण $\angle DAC$ हो । $\angle DAC$ को मान $\angle BAC$ भन्दा कम हुन्छ । त्यसैले $\angle DAC$ को नाप $\angle ACB$ भन्दा कम हुन्छ ।

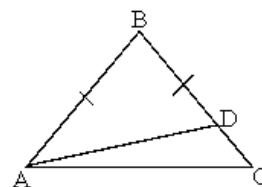
त्रिभुजका भुजा र कोणको सम्बन्धका आधारमा भुजा AD को नाप भुजा CD को नापभन्दा बढी हुन्छ ।

छोटकरीमा

(i) $\angle BAC = \angle BCA$

(ii) $\angle DAC < \angle BCA$

(iii) $CD < AD$ हुन्छ ।



अभ्यास : 12.3

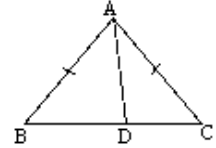
1. तलको क, ख, ग मा दिएअनुसार नाप भएको $\triangle ABC$ मा

- (i) सबभन्दा लामो भुजा (ii) सबभन्दा छोटो भुजा
 (iii) सबभन्दा ठुलो कोण (iv) सबभन्दा सानो कोण कुन हो, लेख्नुहोस् ।
 (क) $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$
 (ख) $\angle ABC = 2\angle ACB$, $\angle BAC = 80^\circ$
 (ग) $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$, $\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAB + \angle ACB = 150^\circ$

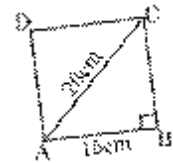
2. (क) $\triangle ABC$ मा $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 9\text{cm}$ र $AC = 40\text{cm}$ भए BC को नाप कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) 10cm , 12cm र 16cm भुजाहरूको नाप भएको त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो, होइन, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$ र $2mn$ एउटा समकोण त्रिभुजका भुजाहरू हुन भनी प्रमाणित गर्नुहोस्, जहाँ m र n धनात्मक सङ्ख्याहरू हुन् ।

(घ) 10cm लामो भुजा भएको समबाहु (equilateral) त्रिभुजको शीर्षबिन्दुदेखि आधारसम्मको लम्ब रेखाको लम्बाइ (उचाइ) कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

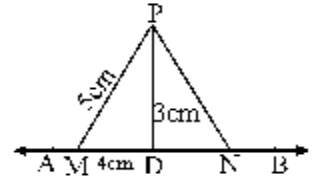
3. (क) दिइएको चित्रमा $AB = AC$ छ । के $AB > AD$ लेख्न सकिन्छ किन ?



(ख) चित्रमा ABCD एउटा आयत हो । यदि $AC = 20\text{cm}$ र $AB = 16\text{cm}$ भए BD र AD को लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



(ग) बिन्दु P बाट रेखा AB मा कति ओटा रेखाखण्डहरू खिच्न सकिन्छ ? तिनीहरूमध्ये सबभन्दा छोटो कुन होला लेख्नुहोस् ।



प्रयोगात्मक कार्य

1. निम्न नापहरूमध्ये कुन कुनले त्रिभुज बन्न सक्छ र कुन कुनले बन्दैन, पत्ता लगाई कारणसमेत दिनुहोस् ।

- (क) 1, 2, 3 (ख) 2, 3, 4 (ग) 3, 4, 5
 (घ) 3, 4, 8 (ङ) $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, 7

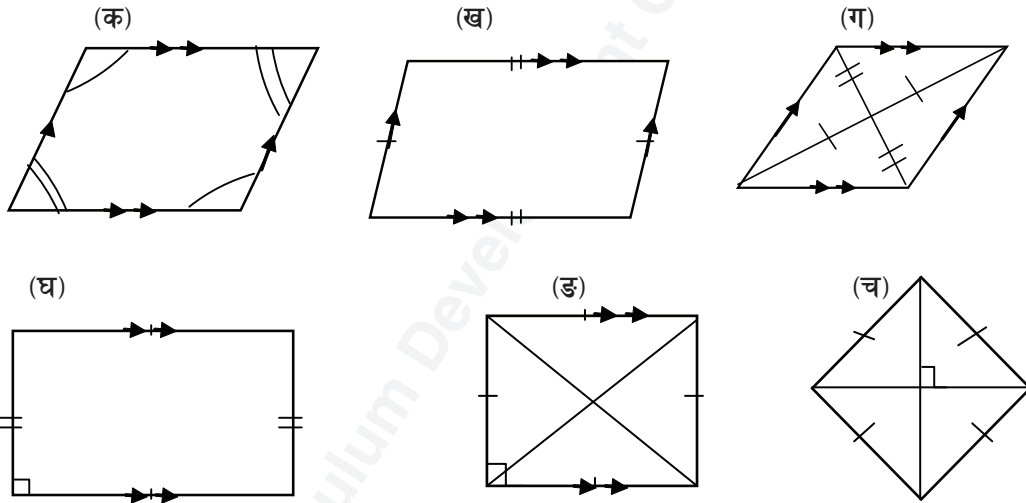
पाठ

13

समानान्तर चतुर्भुजहरू (Parallelograms)

13.0 पुनरावलोकन

तल दिइएका चित्रहरूलाई कक्षाकोठाका भित्ताहरूमा विभिन्न फरक फरक ठाउँमा एक एक ओटा छुट्टा छुट्टै टाँसौं। सबै विद्यार्थीहरूलाई एकपछि अर्को गर्दै उक्त चित्रहरूको अवलोकन गरी प्रत्येक चित्रको निष्कर्ष आआफ्नो कापीमा लेखौं। सबै चित्रहरूले के के देखाउन खोजेका छन्, आआफ्नो समूहमा छलफल गरी चित्रसहित बुँदागत रूपमा कापीमा लेख्नुहोस्।



बुँदाहरू तयार गरिसकेपछि कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस्। समूहगत रूपमा एक समूहले अर्को समूहको प्रस्तुतिमा एक आपसमा पृष्ठपोषण दिनुहोस्।

माथिको छलफलको निष्कर्षलाई निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ।

सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएको चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुज (parallelogram) भनिन्छ। यस परिभाषाका आधारमा ज्यामितिका अन्य तथ्यहरू प्रयोग गरी समानान्तर चतुर्भुजका विशेषताहरू प्रमाणित गरिएको छ। यसका मुख्य विशेषताहरू निम्नानुसारका छन् :

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन्।

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन्।

समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

उल्लिखित समानान्तर चतुर्भुजका विशेषताहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण अधिल्ला कक्षाहरूमा नै गरिसकेका छौं । यहाँ तिनीहरूलाई सैद्धान्तिक रूपमा प्रमाणित गर्ने छौं ।

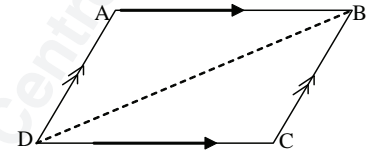
13.1 समानान्तर चतुर्भुजका विशेषताहरूको सैद्धान्तिक प्रमाण (Theoretical proof of properties of parallelogram)

साध्य 1

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू र सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको :

समानान्तर चतुर्भुज ABCD छ जसमा $AB \parallel CD$ र $AD \parallel BC$ छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने :

1. $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle DAB = \angle BCD$
2. $AB = CD$, $AD = BC$

रचना : बिन्दु B र D जोडौं ।

प्रमाण :

तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	$\triangle ABD$ र $\triangle BCD$ मा	1.	
i.	$\angle ABD = \angle BDC$	i.	$AB \parallel CD$ मा एकान्तर कोणहरू
ii.	$BD = BD$	ii.	साझा भुजा
iii.	$\angle ADB = \angle CBD$	iii.	$AD \parallel BC$ मा एकान्तर कोणहरू
2.	$\triangle ABD \cong \triangle BCD$	2.	को. भु. को. तथ्यअनुसार
3.	$AB = CD$ र $AD = BC$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
4.	$\angle DAB = \angle BCD$	4.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
5.	$\angle ABD + \angle DBC = \angle BDC + \angle CBD$	5.	बराबर कोणमा बराबर कोणहरू जोड्दा बराबर नै हुन्छ ।
6.	$\angle ABC = \angle ADC$	6.	तथ्य 5 बाट
अतः $AB = CD$, $AD = BC$ र $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle DAB = \angle BCD$			

प्रमाणित भयो ।

साध्य 2 (साध्य 1 को बिलोम 'क')

सम्मुख भुजाहरू बराबर भएको चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

थाहा दिइएको :

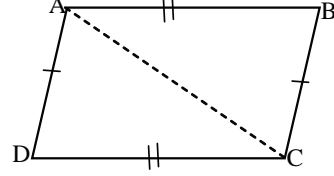
चतुर्भुज ABCD छ जसमा $AB = CD$ र $AD = BC$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

अर्थात्, $AB \parallel CD$ र $AD \parallel BC$

रचना : विकर्ण AC खिचौं ।

प्रमाण :



तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	$\triangle ABC$ र $\triangle ACD$ मा	1.	
i.	$AB = CD$	i.	थाहा दिइएको
ii.	$AD = BC$	ii.	थाहा दिइएको
	$AC = AC$	iii.	साझा भुजा
2.	$\triangle ABC \cong \triangle ACD$	2.	भु. भु. भु. तथ्यअनुसार
3.	$\angle ACB = \angle DAC$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
	$\angle BAC = \angle ACD$		
4.	$AB \parallel CD, AD \parallel BC$	5.	एकान्तर कोणहरू बराबर भएकाले ।
अतः ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।			

प्रमाणित भयो ।

साध्य 3 (साध्य 1 को बिलोम 'ख')

सम्मुख कोणहरू बराबर भएको चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

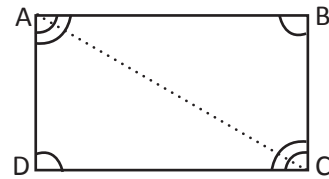
थाहा दिइएको :

चतुर्भुज ABCD छ जसमा $\angle ABC = \angle ADC$ र $\angle DAB = \angle BCD$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने :

ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । अर्थात्, $AB \parallel CD$ र $AD \parallel BC$

रचना : विकर्ण AC खिचौं ।



प्रमाण :

तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^\circ$	1.	चतुर्भुजका भित्री कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।
2.	$\angle ABC + \angle BCD + \angle ABC + \angle BCD = 360^\circ$ Or, $2\angle ABC + 2\angle BCD = 360^\circ$ Or, $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$	2.	$\angle ABC = \angle CDA$ र $\angle DAB = \angle BCD$ भएकाले ।
3.	$AB \parallel CD$	3.	क्रमागत भित्री कोणको योगफल 180° भएकाले ।
4.	त्यसै गरी, $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$	3.	कारण 1, 2 जस्तै ।
5.	$BC \parallel AD$	5.	क्रमागत भित्री कोणको योगफल 180° भएकाले ।
6.	$AB \parallel CD, BC \parallel AD$	6.	3 र 5 बाट
7.	अतः ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।	7.	विपरीत भुजाहरू समानान्तर भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

साध्य 4

दुई ओटा बराबर र समानान्तर रेखाखण्डका एकैतिरका छेउ छेउका बिन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डहरू पनि बराबर र समानान्तर नै हुन्छन् ।

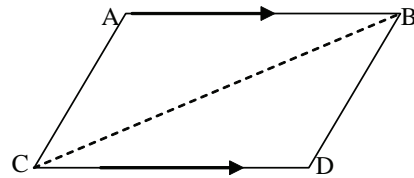
थाहा दिइएको :

AB र CD दुई ओटा बराबर र समानान्तर रेखाखण्डहरू छन् । $AB = CD$ र $AB \parallel CD$ छन् । साथै छेउहरू A र C ; B र D पनि जोडिएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने :

$AC = BD$ र $AC \parallel BD$

रचना: बिन्दु B र C जोडौं ।



प्रमाण :

तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	$\triangle ABC$ र $\triangle BCD$ मा	1.	
i.	$AB = CD$	i.	थाहा दिइएको
ii.	$\angle ABC = \angle BCD$	ii.	$AB \parallel CD$ मा बनेका एकान्तर कोणहरू
iii.	$BC = BC$	iii.	साझा भुजा
2.	$\triangle ABC \cong \triangle BCD$	2.	भु. को. भु. तथ्यअनुसार
3.	$AC = BD$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
4.	$\angle ACB = \angle CBD$	4.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
5.	$AC \parallel BD$	5.	एकान्तर कोणहरू बराबर भएकाले ।
अतः $AC = BD$ र $AC \parallel BD$ हुन्छ ।			

प्रमाणित भयो ।

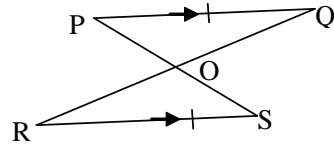
साध्य 5

बराबर र समानान्तर रेखा खण्डका विपरीततिरका छेउ छेउका बिन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : $PQ = RS$ र $PQ \parallel RS$ छ । जसमा विपरीत छेउहरू क्रमशः P र S तथा Q र R जोडिएको छ । रेखाखण्डहरू PS र QR बिन्दु O मा काटिएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने :

$PO = OS$ र $QO = OR$ अर्थात्, PS र QR आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।



प्रमाण :

तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	$\triangle POQ$ र $\triangle ROS$ मा	1.	
i.	$\angle OPQ = \angle OSR$	i.	$PQ \parallel RS$ मा बनेका एकान्तर कोणहरू
ii.	$PQ = RS$	ii.	थाहा दिइएको
iii.	$\angle PQO = \angle SRO$	iii.	$PQ \parallel RS$ मा बनेका एकान्तर कोणहरू
2.	$\triangle POQ \cong \triangle ROS$	2.	को. भु. को. तथ्यअनुसार
3.	$PO = OS, QO = OR$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
4.	PS र QR आपसमा समद्विभाजन भए ।	4.	तथ्य 3 बाट

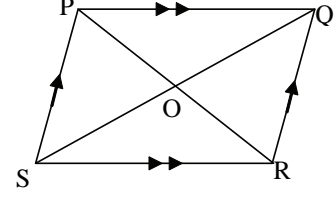
प्रमाणित भयो ।

साध्य 6

समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा विकर्णहरू PR र QS बिन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $PO = OR$ र $SO = OQ$



प्रमाण :

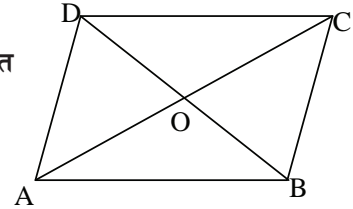
तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	ΔPOQ र ΔROS मा	1.	
i.	$\angle OPQ = \angle ORS$	i.	$PQ \parallel SR$ मा बनेका एकान्तर कोणहरू
ii.	$PQ = RS$	ii.	समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू
iii.	$\angle OQP = \angle OSR$	iii.	$PQ \parallel SR$ मा बनेका एकान्तर कोणहरू
2.	$\Delta POQ \cong \Delta ROS$	2.	को. भु. को. तथ्यअनुसार
3.	$PO = OR, OQ = OS$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
अतः स.च. ABCD का विकर्णहरू समद्विभाजन हुन्छन् ।			

प्रमाणित भयो ।

साध्य 7 (साध्य 6 को बिलोम)

यदि कुनै चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भने उक्त चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

थाहा दिइएको: ABCD एउटा चतुर्भुज हो । जसमा विकर्णहरू AC र BD बिन्दु O मा काटिएका छन् र आपसमा समद्विभाजन भएका छन् । $AO = OC$ र $DO = OB$ छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

प्रमाण :

तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	ΔAOB र ΔDOC मा	1.	
i.	$AO = OC$	i.	थाहा दिइएकाबाट
ii.	$\angle AOB = \angle COD$	ii.	शीर्षाभिमुख कोणहरू भएकाले
iii.	$OB = OD$	iii.	थाहा दिइएकाबाट

2.	$\triangle AOB \cong \triangle DOC$	2.	भु. को. भु. तथ्यअनुसार
3.	$AB = DC$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
4.	$\angle OBA = \angle ODC$	4.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
5.	$AB \parallel DC$	5.	एकान्तर कोणहरू बराबर भएकाले ।
6.	$AD \parallel BC, AD = BC$	6.	$AB \parallel DC$ र $AB = DC$ भएकाले ।
7.	ABCD एउटा स.च.हो ।	7.	सम्मुख भुजाहरू बराबर र समानान्तर भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान:

हामीलाई थाहा छ,

$$(i) \quad \angle BAE + \angle EDC = 180^\circ$$

[$\because AB \parallel CD$ मा क्रमागत भित्री कोणहरू

$$\text{अथवा, } \angle EDC = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$

$$(ii) \quad \angle DEC + \angle ECD + \angle EDC = 180^\circ \quad [\because \triangle CDE \text{ का भित्री कोणहरूको योगफल }]$$

$$\text{अथवा, } y + \angle ECD + 64^\circ = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } y + y = 180^\circ - 64^\circ$$

$$\text{अथवा, } 2y = 116^\circ$$

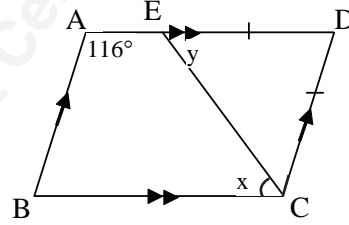
$$\text{त्यस कारण, } y = 58^\circ$$

$$\text{फेरि } \angle BCD = \angle BAD = 116^\circ$$

$$\text{अथवा, } x + y = 116^\circ$$

[\because स.च. ABCD का सम्मुख कोणहरू]

$$\text{अथवा, } x = 116^\circ - y = 116^\circ - 58^\circ = 58^\circ$$

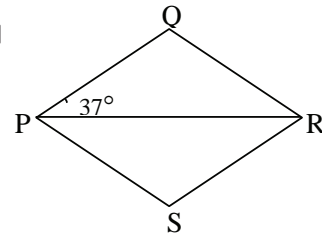


उदाहरण 2

सँगैको समबाहु चतुर्भुज PQRS मा $\angle PSR$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, $\angle QPR = \angle QRP = 37^\circ$ [... PQRS समबाहु चतुर्भुज भएकाले



$$\angle QPR + \angle QRP + \angle PQR = 180^\circ \quad [\because \angle PQR \text{ का भित्री कोणहरूको योगफल }]$$

$$\text{अथवा, } 37^\circ + 37^\circ + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } \angle PQR = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

फेरि, $\angle PSR = \angle PQR = 106^\circ$ [... समबाहु चतुर्भुज PQRS का सम्मुख कोणहरू

$$\text{अतः } \angle PSR = 106^\circ$$

उदाहरण 3

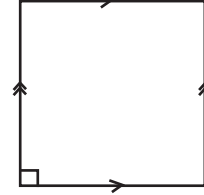
समानान्तर चर्तभुजमा एउटा कोण समकोण छ भने सबै कोणहरू समकोण हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

थाहा दिइएको :

ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो, जसमा $\angle ABC = 90^\circ$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने :

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ \text{ (एक समकोण)}$$



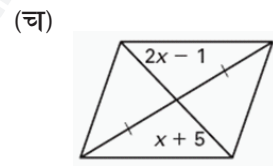
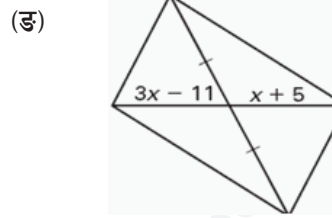
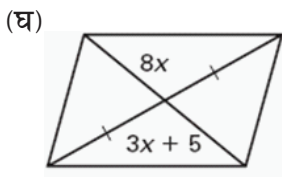
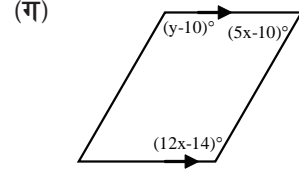
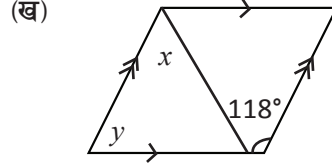
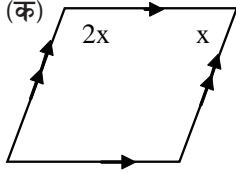
प्रमाण :

तथ्यहरू		कारणहरू	
1.	$\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ अथवा $\angle BAD + 90^\circ = 180^\circ$ अथवा $\angle BAD = 90^\circ$	1.	AD // BC मा क्रमागत भित्री कोणहरूको योग 180° हुन्छ र थाहा दिइएकोबाट
2.	$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$	2.	समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
5.	$\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$	5.	समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
6	$\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$		समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
अतः $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAC = 90^\circ$			

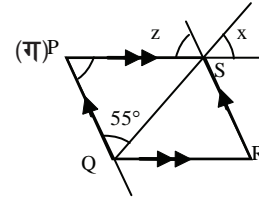
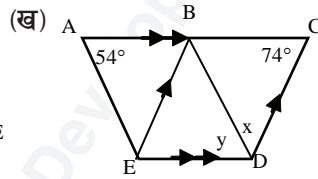
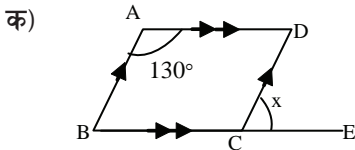
प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 13.1

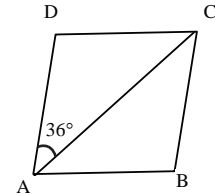
1. तल दिइएका चित्रहरू समानान्तर चतुर्भुज हुनका लागि x र y को मान कति हुनुपर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।



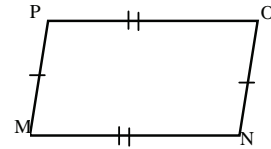
2. दिइएका चित्रहरूमा x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



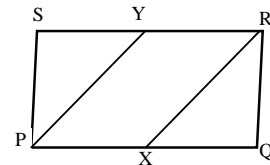
3. सँगैको चित्रमा ABCD एउटा समबाहु चतुर्भुज हो । यदि $\angle DAC = 36^\circ$, यसका अन्य कोणहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



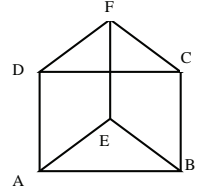
4. सँगैको चित्रमा $MN = OP$ र $PM = NO$ छ भने MNOP समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



5. PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । X र Y रेखाखण्डहरू PQ र RS का मध्य बिन्दुहरू हुन् भने PXRY समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

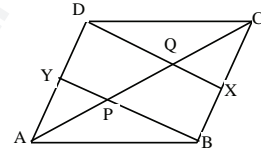


6. दिइएका चित्रमा $AD = EF$, $AD \parallel EF$, $EF = BC$ र $EF \parallel BC$ छ भने $ABCD$ समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



7. कुनै पनि चतुर्भुजका सबै भुजाहरूका मध्य बिन्दुहरू जोडेर बन्ने चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

8. दिइएका चित्रमा $ABCD$ एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।
 X र Y क्रमशः BC र AD का मध्य बिन्दुहरू हुन् ।
 BY र DX ले विकर्ण AC लाई बिन्दु P र Q मा काटेका छन् भने $AP = PQ = QC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



9. एउटा चतुर्भुज $SLOW$ छ जसमा $SL = LO = OW = SW$ छ भने उक्त चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।
10. एउटा चतुर्भुज $MOAT$ छ जसमा विकर्ण MA ले OT लाई बिन्दु R मा काटेको छ र $MR = RA$ र $TR = OR$ छ भने उक्त चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।
11. सबै आयतहरू समानान्तर चतुर्भुज हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् । यसको विलोम लेख्नुहोस् । के यो विलोमलाई प्रमाणित गर्न सकिन्छ, विवेचना गर्नुहोस् ।
12. तपाईंको घर तथा विद्यालयमा समानान्तर चतुर्भुज, आयतकार र वर्गाकार आकृति भएका उदाहरणहरूको सूची तयार गर्नुहोस् । तिनीहरूमा समानान्तर चतुर्भुजका विशेषताहरूको खोजी गर्नुहोस् ।

13.2. त्रिभुजको मध्य बिन्दुसँग सम्बन्धित तथ्यहरू
(Facts Related to Mid Point of a Triangle)

माथि प्रमाणित गरिएका समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको प्रयोग गरी त्रिभुज सम्बन्धी थप गुणहरू पुष्टि गर्न सकिन्छ ?

त्रिभुजमा भुजाहरूका मध्य बिन्दुहरू जोडेर कति ओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू बनाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

साध्य : 8

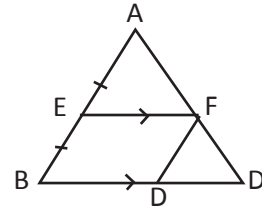
त्रिभुजका कुनै एउटा भुजाको मध्य बिन्दुबाट कुनै अर्को भुजासँग समानान्तर हुने गरी खिचिएको रेखाले बाँकी भुजालाई समद्विभाजन गर्दछ ।

थाहा दिइएको : $\triangle ABC$ मा $AE = BE$ र $EF \parallel BC$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AF = FC$

रचना : बिन्दु F बाट BC लाई D मा काट्ने गरी $FD \parallel EB$ बनाऔं ।

प्रमाण :



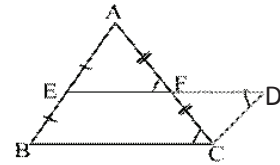
तथ्यहरू	कारणहरू
1. EFDB एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।	1. $EF \parallel BD$ र $EB \parallel FD$ भएकाले
2. $EB = FD$	2. समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू भएकाले
3. $AE = EB$	3. दिइएकाबाट
4. $AE = FD$	4. तथ्य 2 र 3 बाट
5. $\triangle AEF$ र $\triangle CFD$ मा	
i) $AE = FD$ (भुजा)	i) तथ्य 4 अनुसार
ii) $\angle EAF = \angle DFC$ (कोण)	ii) सङ्गत कोणहरू ($AB \parallel FD$)
iii) $\angle AFE = \angle DCF$ (कोण)	iii) सङ्गत कोणहरू ($EF \parallel BC$)
6. $\triangle AEF \cong \triangle CFD$	6. भु.को.को. अनुसार
7. $AF = FC$	7. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

साध्य 9 (साध्य 8 को बिलोम)

कुनै त्रिभुजका दुई भुजाका मध्य बिन्दुहरू जोड्ने रेखा तेस्रो भुजासँग समानान्तर हुन्छ ।

थाहा दिइएको : $\triangle ABC$ मा $AE = EB$ र $AF = FC$ छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : $EF \parallel BC$

रचना : $EF = FD$ हुने गरी EF लाई बिन्दु D सम्म बढाएर C र D जोडौं ।

प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle AEF$ र $\triangle CDF$ मा	1.
i. $AF = CF$ (भुजा)	(i) थाहा दिइएको
ii. $\angle AFE = \angle CFD$ (कोण)	ii. शीर्षाभिमुख कोणहरू भएकाले
iii. $EF = FD$ (भुजा)	iii. रचनाबाट
2. $\triangle AEF \cong \triangle CDF$	2. भु.को.भु. अनुसार
3. $\angle AEF = \angle CDF$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू भएकाले
4. $BE \parallel CD$	4. तथ्य (3) अनुसार एकान्तर कोणहरू बराबर भएकाले
5. $AE = CD$	5. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकाले
6. $AE = BE$	6. थाहा दिइएकोबाट
7. $BE = CD$	7. तथ्य (5) र (7) बाट
8. $BCDE$ समानान्तर चतुर्भुज हो ।	8. $BE = CD$ र $BE \parallel CD$ भएकाले
9. $BC \parallel ED$ (EF)	9. समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू भएकाले

प्रमाणित भयो ।

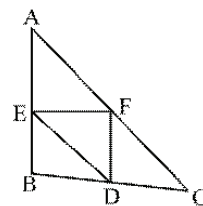
के $EF = \frac{1}{2} BC$ हुन्छ ? छलफल गरी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा D, E र F क्रमशः BC, AB र AC का मध्य

बिन्दुहरू हुन् । यदि $EF = 2$ cm, $ED = 2.6$ cm र $FD = 1.5$ cm भए

AB, BC र AC को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

हामीलाई थाहा छ, $EF = \frac{1}{2} BC$ [दुई ओटा भुजाको मध्य बिन्दु जोड्ने रेखाखण्ड तेस्रो भुजाको आधा हुने भएकाले]

$$\text{अथवा, } 2 = \frac{1}{2} BC$$

$$\text{अथवा, } BC = 4 \text{ cm}$$

त्यस्तै, $ED = \frac{1}{2} AC$

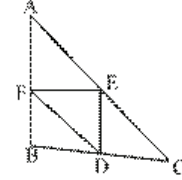
अथवा, $AC = 2ED$
 $= 2 \times 2.6$
 $= 5.2 \text{ cm}$
 $FD = \frac{1}{2} AB$

अथवा, $AB = 2FD$
 $= 2 \times 1.5 = 3 \text{ cm}$

उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा D, E र F क्रमशः BC, AC र AB का मध्य बिन्दुहरू हुन् ।

के D, E र F लाई जोड्दा चार ओटा अनुरूप त्रिभुजहरू बन्छन् ?
 प्रमाणित गर्नुहोस् ।



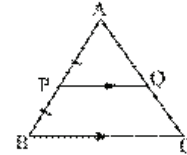
समाधान :

1. $DE = BF, DE \parallel BF$ [\because D र E क्रमशः BC र AC का मध्य बिन्दुहरू भएकाले ।
2. $\triangle EFD \cong \triangle EDC$ [\because विकर्ण ED ले समानान्तर चतुर्भुज DCEF लाई अनुरूप त्रिभुजमा विभाजन गर्ने भएकाले ।]
3. $\triangle DEF \cong \triangle BFD$ [\because विकर्ण FD ले समानान्तर चतुर्भुज BDEF लाई अनुरूप त्रिभुजमा विभाजन गर्ने भएकाले भएकाले ।]
4. $\triangle AEF \cong \triangle DEF$ [\because भु.भु.भु. बाट]

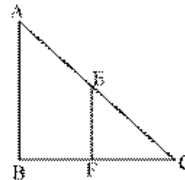
त्यस कारण, $\triangle AEF, \triangle DEF, \triangle BFD$ र $\triangle CED$ अनुरूप त्रिभुजहरू हुन् । [तथ्य 2, 3 र 4 बाट]

अभ्यास 13.2

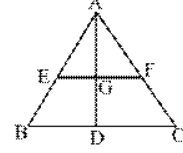
1. (क) दिइएका चित्रमा $AP = PB$ र $PQ \parallel BC$ छन् । $QC = 2 \text{ cm}$ भए CA कति होला ? $BC = 4.8 \text{ cm}$ भए PQ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



- (ख) दिइएका चित्रमा $CE = 2.4 \text{ cm}, AC = 4.8 \text{ cm},$
 $BF = 1.8 \text{ cm}, BC = 3.6 \text{ cm}$ र $\angle FEC = 52^\circ$ भए
 $\angle BAC$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



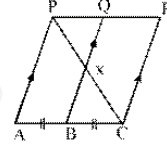
2. चित्रमा E र F क्रमशः AB र AC का मध्य बिन्दुहरू हुन् ।
AD ले BC लाई D मा र EF लाई G मा
काटेको छ । AG = GD हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



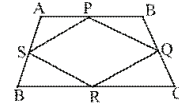
3. दिइएका चित्रमा AB = BC र AP//BQ//CR छ ।
प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $BX = \frac{1}{2} AP$

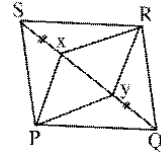
(ख) $AP + CR = 2BQ$



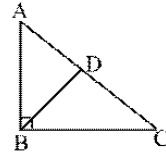
4. चतुर्भुज ABCD मा AB, BC, CD, DA का मध्य बिन्दुहरू
क्रमशः P, Q, R, S भए, PQRS एउटा
समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



5. सँगैको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।
विकर्ण QS मा पर्ने कुनै दुई बिन्दुहरू X र Y हुन । $SX = QY$ छ ।
PXRY एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



6. $\triangle ABC$ मा B समकोण हो र $AD = CD$ छ भने $BD = \frac{1}{2} AC$
हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

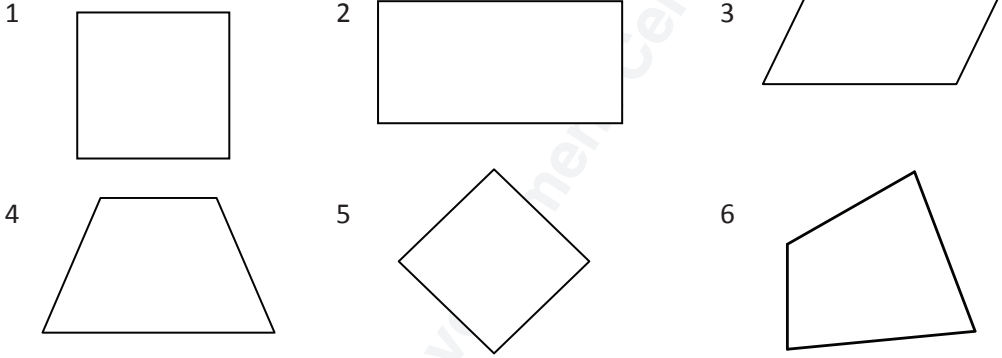


पाठ

14 रचना (Construction)

14.0 पुनरावलोकन

विद्यार्थीहरूलाई आआफ्नो कापी लिएर चौरमा लैजाऔं । त्यसपछि 6/6 जनाको समूहमा विभाजन गरौं । प्रत्येक समूहका सदस्यहरूलाई 1, 2, 3, 4, 5 र 6 नामाकरण गरौं । प्रत्येक समूहलाई तलका चित्रहरू प्रदान गरौं । आफ्नो नम्बरअनुसारको नम्बर भएको चित्र बाँडौं ।



अब सबै समूहका एउटै नम्बर भएका सदस्यहरू एउटा समूहमा बसौं । जस्तै सबै समूहका 1 पर्नेहरू एउटा समूहमा, 2 पर्नेहरू अर्को समूहमा बसौं । उक्त नयाँ समूहहरूमा आफूहरूलाई परेको चतुर्भुजको अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूको उत्तर खोजौं । समूहमा छलफल गरेर साझा निष्कर्ष तयार पारौं ।

(क) चतुर्भुजको नाम के हो ? (ख) चतुर्भुजका विशेषताहरू के के हुन् ?

नयाँ समूहमा निष्कर्ष तयार पारिसकेपछि पुनः पुरानो समूहमा फर्केर आफूले सिकेका कुरालाई पालैपालो गरी प्रस्तुत गरौं र सबै चतुर्भुजहरूका बारेमा समूहको निष्कर्ष तयार पारी कक्षामा समूहगत रूपमा प्रस्तुत गरौं ।

यसरी विभिन्न प्रकारका चतुर्भुजहरू र तिनीहरूका विशेषताहरूका बारेमा हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी विभिन्न प्रकारका चतुर्भुजहरूको रचनाका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

14.1 चतुर्भुजहरूको रचना (Construction of Quadrilaterals)

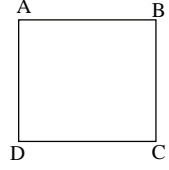
चतुर्भुजमा कति कति ओटा भुजा र कोणहरू हुन्छन् ?

विभिन्न प्रकारका कोणहरूको (जस्तै : 45° , 90° , 75° , 150° , 135°) रचना कम्पास र स्केलको प्रयोग गरेर कसरी गर्न सकिन्छ, समूहमा छलफल गरी समूहको निष्कर्षलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

अब तिनीहरूको रचना गरेर हेरौं ।

14.1.1 वर्गको रचना (Construction of Square)

वर्ग भनेको के हो ? यसमा भुजाहरू र कोणहरू कस्ता हुन्छन् ? यो हामीलाई थाहा भइसकेको कुरा हो । अब हामी दिइएका विभिन्न अवस्थाहरूमा वर्गको रचना गर्दछौं ।



चारै ओटा भुजाहरू बराबर र सबै कोणहरू समकोण भएको चतुर्भुजलाई वर्ग भनिन्छ ।

(क) एउटा भुजाको लम्बाइ दिइएमा वर्गको रचना (When length of a side of a square is given)

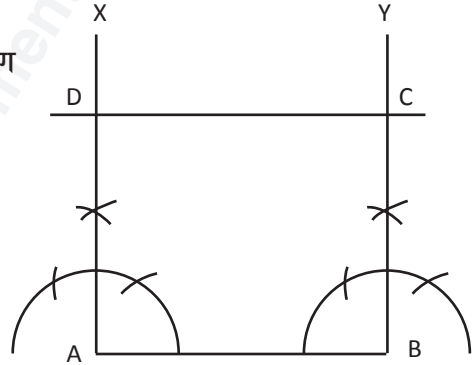
एउटा भुजा AB को लम्बाइ दिइएको वर्ग ABCD को रचना गर्नुहोस् ।

समाधान:

दिइएको नाप भएको अनुमानित वर्गको खाका तयार गरौं ।

चरणहरू

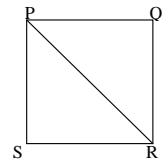
1. दिइएको लम्बाइ भएको रेखा खण्ड AB खिचौं ।
2. बिन्दु A र B मा कम्पासको प्रयोग गरेर 90° का कोण खिचौं । बिन्दु A र B मा 90° को कोण बनाउने रेखालाई क्रमशः AX र BY नाम दिऔं ।
3. कम्पासमा AB बराबरको अर्धव्यासको चाप लिएर बिन्दु A र B बाट क्रमशः AX र BY मा काटी D र C नाम दिऔं ।
4. बिन्दुहरू C र D जोडौं ।



यसरी आवश्यक वर्ग ABCD तयार भयो ।

(ख) एउटा विकर्णको लम्बाइ दिइएमा वर्गको रचना (When length of a diagonal of a square is given)

एउटा विकर्ण PR को लम्बाइ दिएको वर्ग PQRS को रचना गर्नुहोस् ।



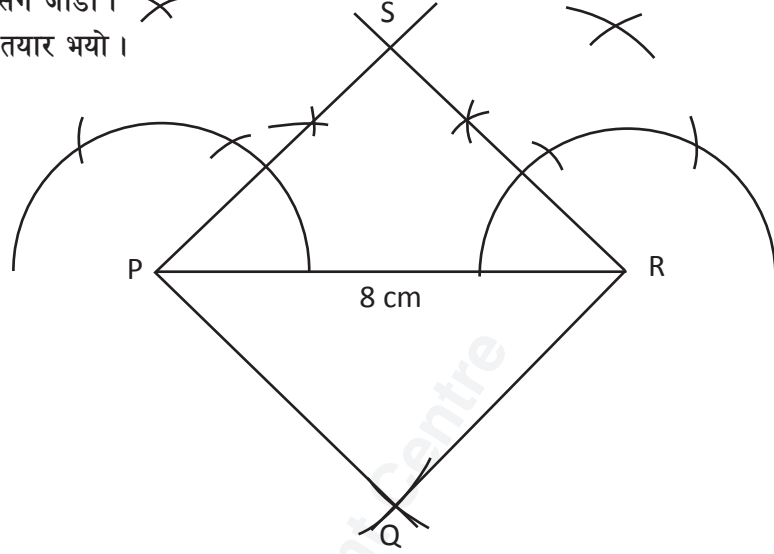
समाधान:

दिइएको नाप भएको अनुमानित वर्गको खाका खिचौं ।

चरणहरू

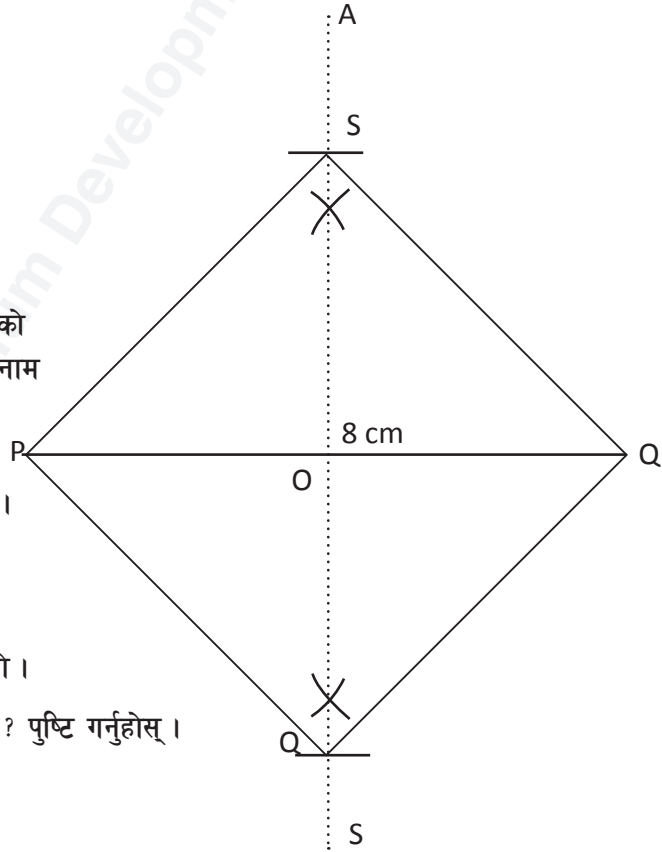
1. $PR = 8\text{cm}$ को एउटा सिधा रेखाखण्ड खिचौं ।
2. वर्गका शीर्षकोणहरूलाई विकर्णले आधा गर्छ । तसर्थ बिन्दु P र R मा कम्पासको प्रयोग गरेर 45° को कोण खिचौं र काटिएको बिन्दुलाई S नाम दिऔं ।
3. कम्पासमा PS बराबरको चाप लिएर P र R बाट S को विपरीत दिशामा चापहरू खिचौं र चापहरू काटिएको बिन्दुलाई Q लेखौं ।

4. बिन्दु Q लाई P र R सँग जोडौं । ✕
आवश्यक वर्ग PQRS तयार भयो ।



अर्को तरिका

1. $PR = 8\text{cm}$ को एउटा सिधा रेखाखण्ड खिचौं ।
2. विकर्ण PR को लम्बार्धक AB खिचौं र काटिएको बिन्दुलाई O नाम दिऔं ।
3. O बाट A तिर र B तिर 4 cm को चापले काटौं र क्रमशः S र Q नाम दिऔं किनभने वर्गका विकर्णहरू बराबर र आपसमा समद्विभाजन हुने गरी काटिन्छन् ।
4. बिन्दु S र Q लाई बिन्दुहरू P र R सँग जोडौं ।
आवश्यक वर्ग PQRS तयार भयो ।
5. किन चतुर्भुज PQRS वर्ग हुन्छ ? पुष्टि गर्नुहोस् ।



14.1.2 आयतको रचना (Construction of Rectangle)

आयत भनेको के हो ? यसमा भुजाहरू र कोणहरू कस्ता हुन्छन्, हामीहरूलाई थाहा भइसकेको कुरा हो । अब हामी दिइएका विभिन्न अवस्थाहरूमा आयतको रचना गर्दछौं ।

एउटा कोणको नाप 90° अथवा एक समकोण भएको समानान्तर चतुर्भुजलाई आयत (Rectangle) भनिन्छ ।

एउटा भुजा र एउटा विकर्णको लम्बाइ दिइएमा आयतको रचना

(Construction of rectangle when length of a side and a diagonal of a rectangle are given)

PQ = 5.2 cm, विकर्ण PR = 6 cm भएको आयतको रचना गर्नुहोस् ।

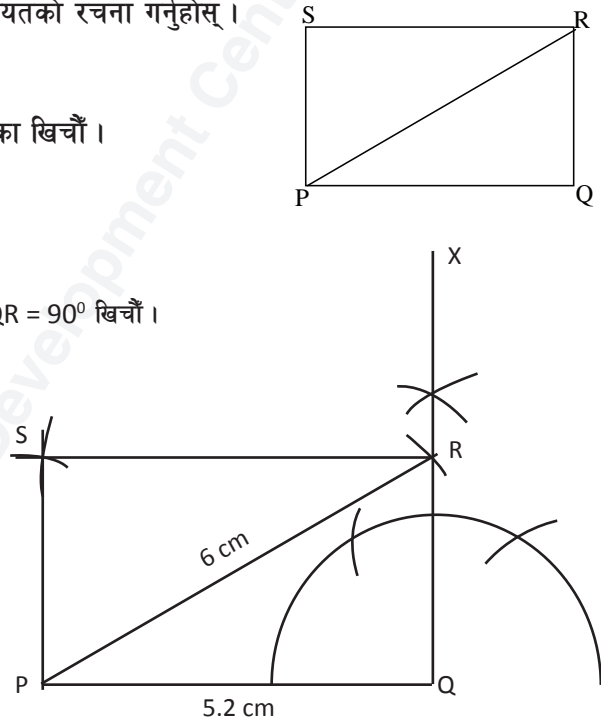
समाधान:

दिइएको नाप भएको अनुमानित आयतको खाका खिचौं ।

चरणहरू :

1. रेखाखण्ड PQ = 5.2 cm खिचौं ।
2. कम्पासको प्रयोग गरी बिन्दु Q मा $\angle PQR = 90^\circ$ खिचौं ।
3. कम्पासमा 6 cm को चाप लिएर बिन्दु P बाट QX मा काटौं र काटिएको बिन्दुमा R नाम दिऔं । (किन ?)
4. बिन्दु P बाट QR बराबरको चापले र बिन्दु R बाट 5.2 cm को चापले काटौं र काटिएको बिन्दुलाई S नाम दिऔं । (किन ?)
5. बिन्दु P र R लाई S सँग जोडौं ।

आवश्यक आयत PQRS तयार भयो । (किन?)



14.1.3 समानान्तर चतुर्भुजको रचना (Construction of parallelogram)

समानान्तर चतुर्भुज र यसका गुणहरूका बारेमा हामीले अघिल्ला दिनहरूमा छलफल गरिसकेका छौं । अब हामी दिइएका विभिन्न अवस्थाहरूमा समानान्तर चतुर्भुजहरूको रचना गर्दछौं ।

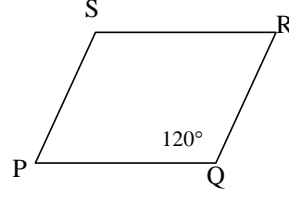
(क) आसन्न दुई ओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोण दिइएमा (When two adjacent sides and angle between them is given)

PQ = 6.2 cm QR = 4.5 cm र $\angle PQR = 120^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

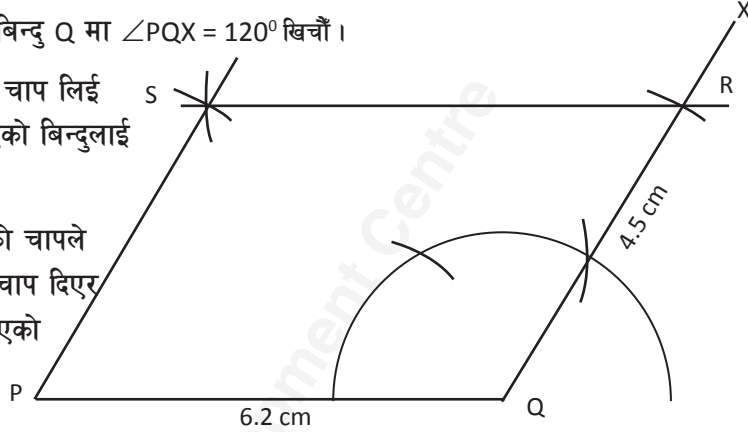
समाधान:

दिइएको नाप भएको अनुमानित समानान्तर चतुर्भुजको खाका खिचौं ।

चरणहरू :



1. रेखाखण्ड PQ = 6.2 cm खिचौं ।
2. कम्पासको प्रयोग गरी बिन्दु Q मा $\angle PQX = 120^\circ$ खिचौं ।
3. कम्पासमा 4.5 cm को चाप लिई QX मा काटौं र काटिएको बिन्दुलाई R नाम दिऔं ।
4. बिन्दु P बाट 4.5 cm को चापले र R बाट 6.2 cm को चाप दिएर चापहरू खिचौं र काटिएको बिन्दुलाई S नाम दिऔं ।
5. बिन्दुहरू P र S, R र S जोडौं ।
आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज PQRS तयार भयो ।
6. किन चतुर्भुज PQRS दिइएको सर्तअनुसारको समानान्तर चतुर्भुज हो ? पुष्टि गर्नुहोस् ।



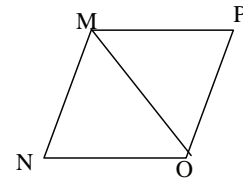
(ख) दुई ओटा आसन्न भुजाहरू र एउटा विकर्णको नाप दिइएमा (When two adjacent sides and a diagonal are given)

एउटा समानान्तर चतुर्भुज MNOP रचना गर्नुहोस्, जसमा MN= 5cm, NO= 3.8cm र MO = 6 cm छ ।

समाधान:

दिइएको नाप भएको अनुमानित समानान्तर चतुर्भुजको खाका खिचौं ।

चरणहरू



1. रेखाखण्ड MN = 5 cm खिचौं ।
2. कम्पासको प्रयोग गरी बिन्दु M बाट 6 cm को चाप खिचौं ।
3. बिन्दु N बाट 3.8 cm को चाप लिऔं र चरण 2 को चापलाई काट्ने गरी खिचौं । काटिएको बिन्दुलाई O नाम दिऔं ।
4. N र O जोडौं । (किन ?)

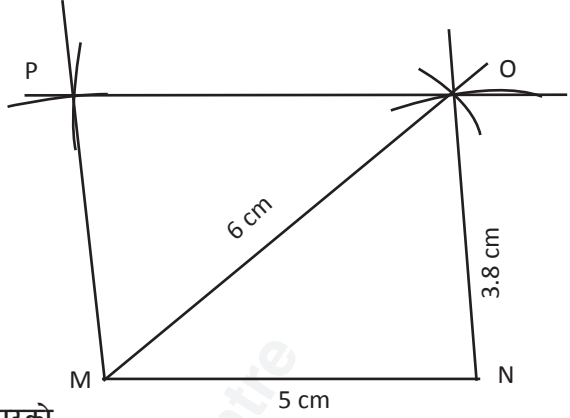
5. बिन्दु O बाट 5 cm को चाप खिचौं । साथै M बाट कम्पासमा 3.8 cm को चाप लिएर चाप खिचौं । (किन ?)

6. चरण 6 का चापहरू काटिएको बिन्दुलाई P नाम दिऔं ।

7. बिन्दुहरू P र M, P र O जोडौं ।

आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज MNOP तयार भयो ।

किन चतुर्भुज MNOP दिइएको अवस्थाअनुसारको समानान्तर चतुर्भुज हो ? पुष्टि गर्नुहोस् ।



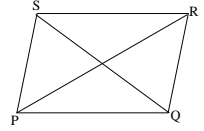
- (ग) एउटा भुजा र दुई ओटा विकर्णहरूको नाप दिइएमा समानान्तर चतुर्भुजको रचना

(Construction of parallelogram when length of a side and two diagonals are given)

एउटा भुजाको लम्बाइ PQ = 6.3 cm र विकर्णहरू PR = 8.8 cm र QS = 8 cm भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

समाधान:

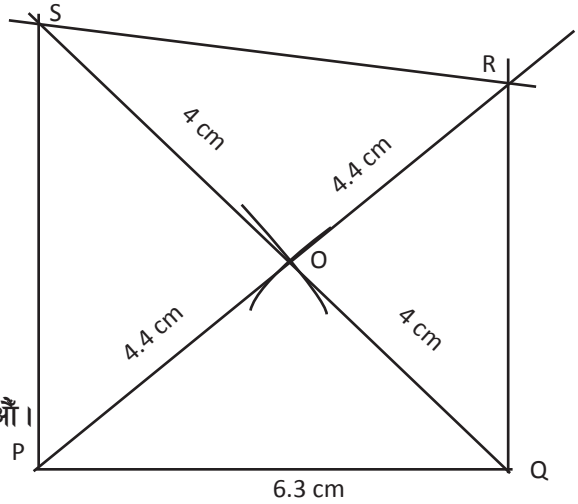
दिइएको नाप भएको अनुमानित समानान्तर चतुर्भुजको खाका खिचौं ।



चरणहरू

1. आधार रेखाखण्ड PQ = 6.3 cm खिचौं ।
2. कम्पासमा 4.4 cm को चाप लिएर बिन्दु P बाट माथि चाप खिचौं । (किन ?)
3. त्यसै गरी 4 cm को चापले Q बाट पनि चाप खिचौं र काटिएको बिन्दुलाई O नाम दिऔं ।
4. बिन्दु O लाई P र Q सँग जोडौं । (किन ?)
5. OP = OR हुने गरी PO लाई R सम्म लम्ब्याऔं । त्यस्तै OQ लाई OS हुने गरी S सम्म लम्ब्याऔं । (किन ?)
6. बिन्दुहरू P र S, Q र R, R र S जोडौं ।

आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज PQRS तयार भयो ।



(घ) दुई ओटा आसन्न भुजाहरू र उचाइ दिइएमा समानान्तर चतुर्भुजको रचना
(Construction of parallelogram when measure of two adjacent sides and height are given)

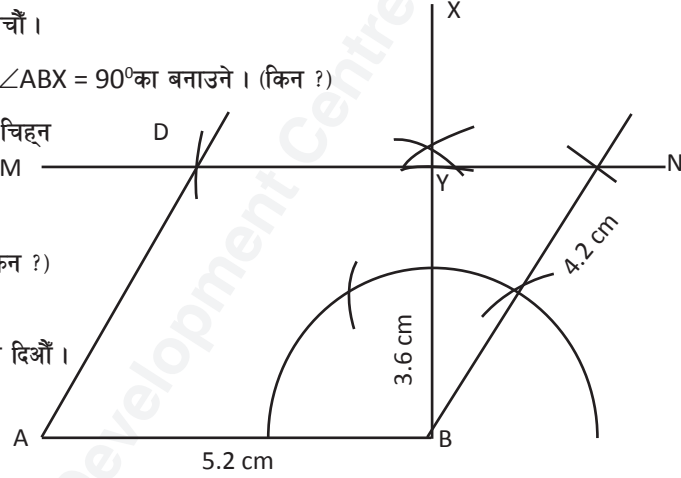
समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना गर्नुहोस् जसमा $AB = 5.2 \text{ cm}$, $BC = 4.2 \text{ cm}$ र उचाइ 3.6 cm छ ।

समाधान:

दिइएको नाप भएको अनुमानित समानान्तर चतुर्भुजको खाका खिचौं ।

चरणहरू

1. आधार रेखाखण्ड $AB = 5.2 \text{ cm}$ खिचौं ।
2. बिन्दु B मा कम्पासको प्रयोग गरेर $\angle ABX = 90^\circ$ का बनाउने । (किन ?)
3. 3.6 cm बराबरको चापले BX मा चिह्न लगाइ Y नाम दिऔं । (किन ?)
4. बिन्दु Y मा AB सँग समानान्तर हुने गरी रेखाखण्ड MN खिचौं । (किन ?)
5. बिन्दु B बाट 4.2 अर्को चाप लिएर MN मा चिह्न लगाइ C नाम दिऔं ।
6. बिन्दु C बाट 5.2 cm को चापले MN मा चिह्न लगाएर D नाम दिऔं ।



7. बिन्दुहरू B र C, A र D जोडौं । (किन ?)

आवश्यक समानान्त चतुर्भुज **ABCD** तयार भयो ।

14.1.4 समबाहु चतुर्भुजको रचना (Construction of Rhombus)

समबाहु चतुर्भुज भनेको के हो ? यसका गुणहरू के के हुन् ?

समबाहु चतुर्भुजको रचना गर्नुभन्दा पहिले यसका विभिन्न गुणहरूको बारेमा जानकारी हुनु आवश्यक छ । समबाहु चतुर्भुज भन्नाले चार ओटै भुजाहरूको लम्बाइ बराबर भएको चतुर्भुज भन्ने बुझिन्छ ।

यसका विशेषताहरू निम्नानुसार छन् :

1. सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
2. विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ?
3. विकर्णहरू लम्ब रूपमा काटिएका हुन्छन् ?

सबै भुजाहरू बराबर भएको चतुर्भुजलाई समबाहु चतुर्भुज (rhombus) भनिन्छ ।

अब हामी विभिन्न अवस्थाहरूमा समबाहु चतुर्भुजहरूको रचना गर्दछौं ।

(क) एउटा भुजाको लम्बाइ दिइएमा समबाहु चतुर्भुजको रचना (Construction of rhombus when the length of a side is given)

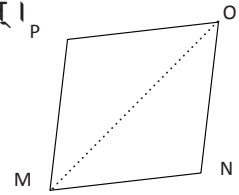
के कम्पास र रुलरको प्रयोग गरेर x cm, भुजाको लम्बाइ भएको समबाहु चतुर्भुजको रचना गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् । यदि नसकिने भएमा अरू कुन कुन वा कस्ता नाप निश्चित गर्नुपर्ला ? किन गर्नु पर्ला ? सम्भावित रचनासमेत उल्लेख गर्नुहोस् । त्यस्ता छलफल एवम् रचनाका आधारमा समबाहु चतुर्भुज रचना गर्ने विभिन्न अवस्थाहरू निश्चित गर्न लगाऔं ।

(ख) एउटा भुजा र एउटा विकर्णको नाप दिइएमा (When length of a side and a diagonal are given)

$MN = 5.2$ cm र $MO = 7.2$ cm भएको समबाहु चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

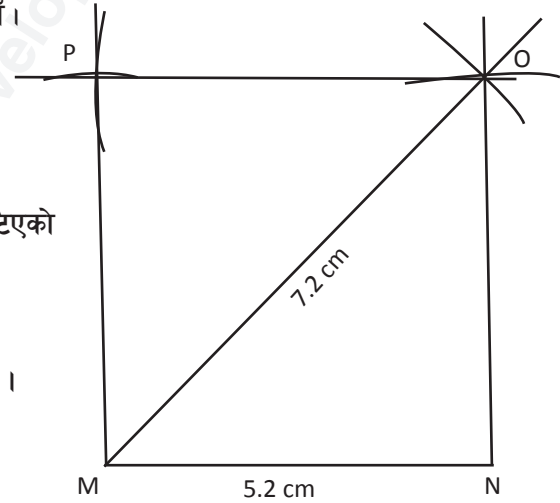
समाधान :

दिइएको नाप भएको अनुमानित समबाहु चतुर्भुजको खाका तयार गरी नाम लेखौं ।



चरणहरू :

1. $MN = 5.2$ cm भएको सिधा रेखाखण्ड खिचौं ।
2. M लाई केन्द्र मानेर 7.2 cm को अर्धव्यास लिएर एउटा चाप खिचौं ।
3. N बाट 5.2 cm को अर्धव्यासको चापले चरण 2 को चापमा पर्ने गरी काट्ने र काटिएको बिन्दुलाई O नाम दिने ।
4. N र O, M र O जोडौं ।
5. M लाई केन्द्र मानी 5.2 cm को चाप खिचौं । त्यस्तै गरी O बाट पनि सोही नापको चाप खिचौं र काटिएको बिन्दुलाई P नाम दिऔं ।
6. बिन्दुहरू O र P, P र M जोडौं ।



अब आवश्यक समबाहु चतुर्भुज MNOP तयार भयो ।

14.1.5 समलम्ब चतुर्भुजको रचना (Construction of Trapezoid)

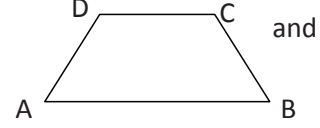
समलम्ब चतुर्भुजको रचना गर्नुभन्दा पहिले समलम्ब चतुर्भुज भनेको के हो ? यसका गुणहरू के के हुन्, सोका बारेमा जानकारी हुनु आवश्यक छ । समलम्ब चतुर्भुज भन्नाले एक जोडा समानान्तर भुजाहरू भएको चतुर्भुज भन्ने बुझिन्छ ।

अब हामी विभिन्न अवस्थाहरूमा समलम्ब चतुर्भुजहरूको रचना गर्दछौं ।

एक जोडी सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएको चर्तुभुजलाई समलम्ब चर्तुभुज (trapezoid) भनिन्छ ।

(क) तिन ओटा भुजा र एउटा कोणको नाप दिइएमा (When length of three sides and an angle are given)

$AB \parallel CD$, $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6.0 \text{ cm}$ र $CD = 4 \text{ cm}$
 $\angle ABC = 60^\circ$ भएको समलम्ब चर्तुभुजको रचना गर्नुहोस् ।

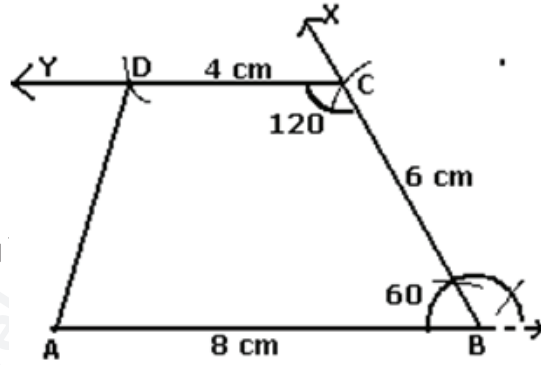


समाधान :

दिइएको नाप भएको अनुमानित समबाहु चर्तुभुजको खाका तयार गरी नाम लेखौ ।

चरणहरू

1. सिधारेखा $AB = 8 \text{ cm}$ खिचौ ।
2. बिन्दु B मा कम्पासको प्रयोग गरी $\angle ABX = 60^\circ$ खिचौ ।
3. 6 cm को चापले BX मा C चिह्न लगाऔ ।
4. बिन्दु C मा $\angle BCY = 120^\circ$ को कोण खिचौ ।
 $\angle B + \angle C = 180^\circ$
तसर्थ, $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
5. 4 cm बराबरको चापले CY मा D चिह्न लगाऔ ।
6. बिन्दु D र A जोडौ ।



आवश्यक समलम्ब चर्तुभुज ABCD तयार भयो ।

अभ्यास 14

1. दिइएका अवस्थाहरूमा वर्गहरूको रचना गरी त्यसको पुष्टि गर्नुहोस् ।
 - (a) भुजाको लम्बाइ 6.4 cm छ ।
 - (b) वर्ग ABCD जसमा $AB = 6 \text{ cm}$ छ ।
 - (c) विकर्णहरूको लम्बाइ $PR = 5.8 \text{ cm}$ छ ।
 - (d) विकर्णहरूको लम्बाइ 6 cm छ ।
2. दिइएका अवस्थाहरूमा आयतको रचना गर्नुहोस् ।
 - (a) आसन्न भुजाहरूको लम्बाइ 11 cm र 8.5 cm भएको आयत ABCD
 - (b) आयत PQRS जसमा $QR = 3.6 \text{ cm}$ विकर्ण $PR = 6 \text{ cm}$ छ ।
 - (c) आयत WXYZ जसमा $WX = 7 \text{ cm}$ र $XY = 4 \text{ cm}$.

3. दिइएका अवस्थाहरूमा समानान्तर चतुर्भुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।
- समानान्तर चतुर्भुज ABCD जसमा $BC = 5 \text{ cm}$, $\angle BCD = 120^\circ$ र $CD = 4.8 \text{ छ ।$
 - समानान्तर चतुर्भुज PQRS जसमा $PQ = 4.3 \text{ cm}$, $PS = 4 \text{ cm}$ र $PR = 6.8 \text{ cm छ ।$
 - समानान्तर चतुर्भुज जसमा एउटा भुजा 4.4 cm र विकर्णहरू 5.6 cm र $7 \text{ cm छन् ।$
 - समानान्तर चतुर्भुज WXYZ जसमा विकर्ण $WY = 3.8 \text{ cm}$, विकर्ण $XZ = 4.6 \text{ cm}$ तिनीहरूबिचको कोण $60^\circ छ ।$
 - समानान्तर चतुर्भुज ABCD जसमा $AB = 6.5 \text{ cm}$, $BC = 3.4 \text{ cm}$ र उचाइ $AL = 2.5 \text{ cm छ ।$
 - समानान्तर चतुर्भुज MNOP जसमा $MN = 5.5 \text{ cm}$, $MO = 5.2 \text{ cm}$ र उचाइ $3.5 छ ।$
4. दिइएका अवस्थाहरूमा समबाहु चतुर्भुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।
- समबाहु चतुर्भुज PQRS जसमा एउटा कोण 60° र भुजाको लम्बाइ $7.2 \text{ cm छ ।$
 - समबाहु चतुर्भुज ABCD जसमा $AB = 4 \text{ cm}$ र $AC = 6.5 \text{ cm}^5 ।$
 - समबाहु चतुर्भुज ABCD जसमा विकर्णहरू क्रमशः $AC = 8 \text{ cm}$, $BD = 6 \text{ cm छ ।$
 - समबाहु चतुर्भुज MNOP जसमा $MN = 6 \text{ cm}$, $\angle N = 75^\circ छ ।$
5. दिइएका अवस्थाहरूमा समलम्ब चतुर्भुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।
- स.ल.च, ABCD जसमा $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$, $CD = 3.2 \text{ cm}$, $\angle B = 75^\circ$ र $DC // AB$.
 - स.ल.च, ABCD जसमा $AB // DC$, $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$, $AD = 6.5 \text{ cm}$ र $\angle B = 60^\circ$.
 - स.ल.च, ABCD जसमा $AB // CD$, $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $CD = 4 \text{ cm}$ and $\angle C = 120^\circ$
6. दिइएका अवस्थाहरूमा चतुर्भुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।
- चतुर्भुज ABCD जसमा $AB = AD = 3 \text{ cm}$, $BC = 2.5 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$ र $BD = 5 \text{ cm}$.
 - चतुर्भुज MNOP जसमा $MO = MP = 6 \text{ cm}$, $NO = 7.5 \text{ cm}$, $OP = 5 \text{ cm}$ र $NP = 10 \text{ cm}$.
 - चतुर्भुज PQRS जसमा $PQ = 3.5 \text{ cm}$, $QR = 2.5 \text{ cm}$, $RS = 4 \text{ cm}$, $\angle Q = 75^\circ$, $\angle R = 120^\circ$
 - चार ओटा रेखाखण्डहरू जस्तै : 3 cm , 4 cm , 5 cm र 6 cm दिइएको छ भने चतुर्भुजको रचना गर्न सकिनेला ? कम्पास र रूलरको प्रयोग गरी खिच्ने प्रयास गर्नुहोस् । सम्भव भए नभएको कुरा कक्षामा अरु साथीहरूसँग छलफल गरी समाधानका विभिन्न उपायहरू विचार गर्नुहोस् ।
 - समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भन्ने कथन ठिक छ भने यसको विलोम ठिक छ या छैन रचनाद्वारा विवेचना गर्नुहोस् ।

पाठ

15

समरूपता (Similarity)

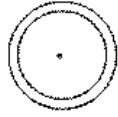
15.0 पुनरावलोकन

निरजले आफ्नो पसलमा फरक फरक नापका नेपालका नक्साहरू राखेका छन्। निमाले फोटो स्टुडियोमा नेपालका महाकविका फरक फरक आकारका फोटाहरू राखेकी छिन्। यी आकृतिहरूमा कुन कुन गुण साभ्ना छन्, छलफल गर्नुहोस्।

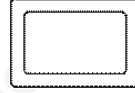
त्यस्तै, चित्र नं. 15.0 (i, ii, iii र iv) मा के कस्ता आकृतिहरू देख्नुभयो, छलफल गर्नुहोस्।



चित्र नं. 15.0 (i)



चित्र नं. 15.0 (ii)



चित्र नं. 15.0 (iii)



चित्र नं. 15.0 (iv)

उस्तै आकार वा स्वरूप भएका आकृतिहरूलाई समरूप आकृतिहरू भनिन्छ। सबै अनुरूप त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन्।

समरूपताको धारणा विकास गर्न निम्न सम्बन्धहरू बारेमा छलफल गरौं। दुई ओटा त्रिभुजाकार आकृतिहरू समरूप हुन के के अवस्थाहरू हुन सक्छन् सोचौं र आफूले सोचेका कुराहरू साथीहरूसँग व्यक्त गरौं।

- (क) के सबै वृत्तहरू उस्तै आकार वा स्वरूपका हुन्छन् ?
- (ख) के सबै वर्गहरू उस्तै आकार वा स्वरूपका हुन्छन् ?
- (ग) के सबै समबाहु त्रिभुजहरू उस्तै आकारका हुन्छन् ?
- (घ) के सबै आयतहरू उस्तै आकारका हुन्छन् ?

$\triangle ABC$ को भुजाहरू $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ र $AC = 5\text{cm}$ छन्। त्यस्तै $\triangle PQR$ का भुजाहरू $PQ = 6\text{cm}$, $QR = 9\text{cm}$ र $PR = 7.5\text{cm}$ छन्।

के $\triangle ABC$ र $\triangle PQR$ समरूप त्रिभुजहरू हुन् ? समरूप भए दुवै त्रिभुजका सङ्गत भुजा र कोणहरूको नाम लेख्नुहोस्।

त्यस्तै निष्ठाको घरको आँगनमा फरक फरक नापका दुई ओटा त्रिभुजाकार आकृतिहरू छन्। तिनीहरूमध्ये एउटा त्रिभुजका दुई ओटा कोणहरू 30° र 60° छन् भने अर्को त्रिभुजका दुई ओटा कोणहरू 60° र 90° छन्। के ती दुवै त्रिभुजहरू समरूप छन् ?

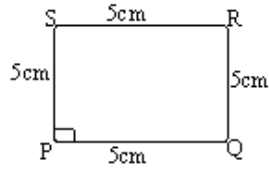
माथि दिइएका दुवै अवस्थाहरूमा त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

(क) यदि दुई ओटा त्रिभुजका भुजाहरूको अनुपात बराबर छ भने ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

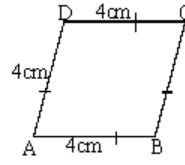
(ख) यदि त्रिभुजहरूमा दुई जोडी सङ्गत कोणहरू बराबर छन् भने ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

15.1 समरूप बहुभुज सम्बन्धी साधारण समस्याहरू (Simple problems related to similar polygons)

यहाँ हामी त्रिभुजबाहेक अन्य बहुभुजहरू पनि समरूप हुने अवस्थसँग सम्बन्धित समस्याहरूका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।



चित्र 15.1(i)



चित्र 15.1(ii)

दिइएका चित्र 15.1(i) मा 5 से.मी. भुजा भएको वर्ग र चित्र 15.1(ii) मा 4 से.मी. भुजा भएको समबाहु चतुर्भुज छ । उक्त जानकारीका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

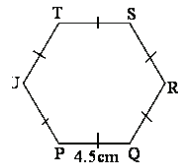
(क) के दुवै चित्रहरूका जुनसुकै भुजाहरूको अनुपात बराबर हुन्छ ?

(ख) के दुवै चित्रहरूको परिमितिको अनुपात बराबर हुन्छ ?

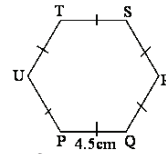
(ग) के भुजाहरूको अनुपात र परिमितिको अनुपात बराबर छ ?

(घ) के दुवै चित्रहरू समरूप छन् ?

त्यस्तै चित्र 15.1 (iii) र चित्र 15.1 (iv) मा क्रमशः 4.5cm र 3cm भुजा भएका नियमित षड्भुजहरू छन् ।



चित्र 15.1(iii)



चित्र 15.1(iv)

(क) के दुवै बहुभुजहरूको भित्री कोणहरूको नाप बराबर छ ?

(ख) के दुवै बहुभुजहरूका भुजाहरूको अनुपात बराबर छ ?

(ग) के दुवै बहुभुजहरूका परिमितिको अनुपात बराबर छ ?

(घ) के दुवै चित्रहरू समरूप छन् ?

माथि चित्र.नं. 15.1(i) र (ii) समरूप छैनन् भने 15.1(iii) र 15.1(iv) समरूप छन् । त्यसैले दुई ओटा बहुभुजहरू समरूप हुन निम्न अवस्थाहरू आवश्यक छ :

- (i) दुवै बहुभुजहरूमा भुजाको सङ्ख्या बराबर हुनुपर्छ ।
- (ii) दुवै बहुभुजका सङ्गत कोणहरू बराबर हुनुपर्छ ।
- (iii) सङ्गत भुजाहरूको अनुपात र परिमितिको अनुपात बराबर हुनुपर्छ ।

उदाहरण 1

दिपिकाको उचाइ 1.2 मिटर छ । उनी 3.9 मिटर अग्लो बत्तीको खम्बा अगाडि उभिएकी छिन् । खम्बाको छाया 6.5 मिटर लामो भएको समयमा उनले बनाएको छाया कति लामो हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

मानौं, चित्रमा, AB बत्तीको खम्बाको उचाइ, CD दिपिकाको उचाइ, BE खम्बाको छायाको लम्बाइ र ED दिपिकाको छायाको लम्बाइ छ ।

प्रश्नानुसार : AB = 3.9 m, BE = 6.5m, CD = 1.2m, ED = ?

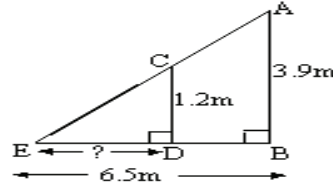
$\triangle CDE$ र $\triangle ABE$ समरूप छन् । [दुवै समकोण त्रिभुजहरू हुन् र $\angle E$ दुवैमा साझा कोण भएकाले]

अथवा, $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$ [समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले]

अथवा, $\frac{3.9m}{1.2m} = \frac{6.5m}{DE}$

अथवा, $3.9 DE = 6.5 \times 1.2$ m

अथवा, $DE = \frac{6.5 \times 1.2}{3.9} = 2$ m



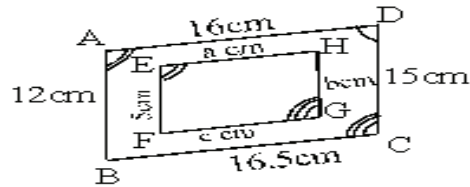
त्यसैले उक्त समयमा दिपिकाको छायाको लम्बाइ 2 मिटर हुन्छ ।

उदाहरण नं. 2

चित्रमा चतुर्भुजहरू ABCD र EFGH समरूप

छन् । जहाँ AD = 16cm, CD = 15cm, AB = 12cm, BC = 16.5cm, EF = 5cm, EH = a cm,

GH = b cm र FG = c cm छन् । a, b र c को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान:

यहाँ, चतुर्भुजहरू ABCD र EFGH समरूप छन् । त्यसैले, सङ्गत भुजाहरूको अनुपात लिँदा

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH} = \frac{DC}{GH} = \frac{BC}{FG} \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{अथवा, } \frac{12}{5} = \frac{16}{a} = \frac{15}{b} = \frac{16.5}{c}$$

(i) पहिलो र दोस्रो अनुपात लिँदा :

$$\text{अथवा, } \frac{12}{5} = \frac{16}{a}$$

$$\text{अथवा, } 12a = 16 \times 5$$

$$\text{अथवा, } a = \frac{16 \times 5}{12} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

$$\therefore EH = 6\frac{2}{3} \text{ cm}$$

(ii) पहिलो र तेस्रो अनुपात लिँदा

$$\frac{12}{5} = \frac{15}{b}$$

$$\text{अथवा, } 12b = 75$$

$$\text{अथवा, } b = \frac{75}{12}$$

$$\text{अथवा, } b = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$\therefore GH = 6\frac{1}{4} \text{ cm}$$

(iii) पहिलो र चौथो अनुपात लिँदा

$$\frac{12}{5} = \frac{16.5}{c}$$

$$\text{अथवा, } 12c = 16.5 \times 5$$

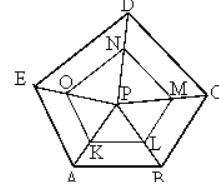
$$\text{अथवा, } c = \frac{16.5 \times 5}{12} = 6.88$$

$$\therefore FG = 6.88 \text{ cm}$$

उदाहरण 3

दिइएका चित्रमा पञ्चभुजहरू ABCDE र KLMNO समरूप छन् ।

- (क) पाँच जोडी समरूप त्रिभुजहरूको नाप लेख्नुहोस् ।
 (ख) यदि भुजा DC = 10cm, $\angle PMN$ को परिमिति = 12.5cm र $\angle PCD$ को परिमिति 25cm भए भुजा NM को नाप कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ?



समाधान :

यहाँ, पञ्चभुजहरू ABCDE र KLMNO समरूप छन् तथा दुवै पञ्चभुजका क्रमागत शीर्षबिन्दुहरूलाई साझा बिन्दु P सँग जोडिएको छ ।

त्यसैले (क) पाँच जोडी समरूप त्रिभुजहरू ($\triangle PMN$ र $\triangle PCD$), ($\triangle PON$ र $\triangle PED$), ($\triangle POK$ र $\triangle PEA$), ($\triangle PKL$ र $\triangle PAB$) र ($\triangle PLM$ र $\triangle PBC$) हुन् ।

(ख) $\frac{MN}{DC} = \frac{\triangle PMN \text{ को परिमिति}}{\triangle PCD \text{ को परिमिति}}$

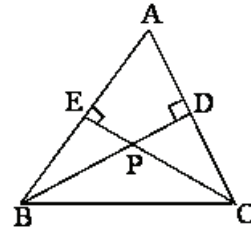
त्यसैले, $\frac{NM}{10\text{cm}} = \frac{12.5\text{cm}}{25\text{cm}}$

अथवा, $NM = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

$\therefore NM = 5\text{cm}$

उदाहरण 4

दिइएका चित्रमा $\triangle BDC$ र $\triangle BEC$ समकोणी त्रिभुजहरू हुन् भने $BP \times PD = EP \times PC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



समाधान :

1. $\triangle BPE$ र $\triangle PDC$ मा

(i) $\angle BEP = \angle CDP$ (A) [दुवै समकोण त्रिभुजहरू भएकाले]

(ii) $\angle EPB = \angle DPC$ (A) [शीर्षाभिमुख कोणहरू भएकाले]

(iii) $\triangle BPE \sim \triangle PDC$ [AA तथ्यबाट]

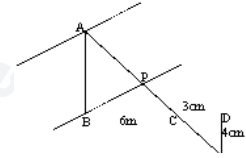
2. $\frac{EP}{PD} = \frac{BP}{CP}$ [सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले]

अथवा, $BP \times PD = EP \times CP$ प्रमाणित भयो ।

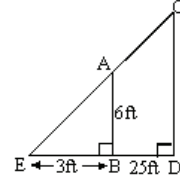
अभ्यास 15

1. (क) एउटा कोठाको लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 20 फिट र 18 फिट छ । उक्त कोठाको नक्सा बनाउन लम्बाइका लागि 5 से.मी. लामो रेखा बनाइन्छ भने चौडाइका लागि कति लामो रेखा चाहिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । साथै कोठाको आकृति कस्तो हुन्छ, बनाउनुहोस् ।

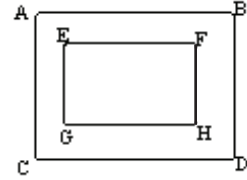
- (ख) दिइएका चित्रमा A र B कुनै एउटा खोलाका दुई किनाराहरूलाई जनाउने गरी चित्र बनाइएको छ । यदि $BC = 6$ मिटर, $CD = 3$ cm, $DE = 4$ cm र $AB \parallel DE$ भए खोलाको वास्तविक चौडाइ (AB) कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।



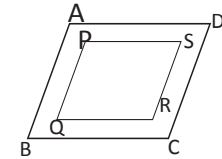
- (ग) दिइएका चित्रमा 6 फिट अग्लो मानिस एउटा खम्बा भन्दा 25 फिट टाढा उभिएको छ । दिनको कुनै समयमा उक्त व्यक्तिको छाया (BE) 3 फिट लामो छ भने खम्बाको उचाइ (CD) कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



2. (क) दिइएका चित्रमा दुई ओटा आयताकार फ्रेमहरूमा बाहिरी फ्रेमको चौडाइ भित्री फ्रेमको भन्दा दुई गुणा छ । यदि भित्री फ्रेमको लम्बाइ 8cm छ भने बाहिरी फ्रेमको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

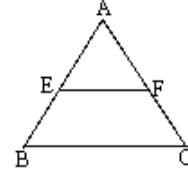


- (ख) चित्रमा ABCD र PQRS दुई समरूप समबाहु चतुर्भुजहरू हुन् । जहाँ $PS \parallel AD$ र $PQ \parallel AB$ छन् ।

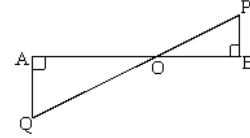


- (i) दुई जोडी समलम्ब चतुर्भुजहरू (trapezium) को नाम लेख्नुहोस् ।
- (ii) यदि $PQ : PS = 2 : 3$ र $AB = 5$ cm भए AD को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

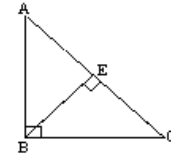
3. (क) दिइएको चित्रमा $EF \parallel BC$ छ । यदि $EF = 3\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$, $AE = 4.5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ भए AF र AB को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



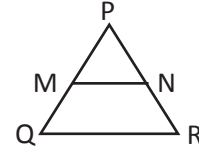
- (ख) दिइएको चित्रमा AB सँग लम्ब रेखाहरू PB र QA हुन् । यदि $OA = 10\text{cm}$, $BO = 6\text{cm}$, $PB = 9\text{cm}$ भए AQ को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



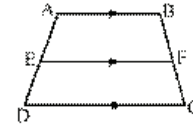
- (ग) दिइएको चित्रमा $\angle ABC = 90^\circ$ र $BE \perp AC$ छ । यदि $AE = 4\text{cm}$ र $CE = 9\text{cm}$ भए BE को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



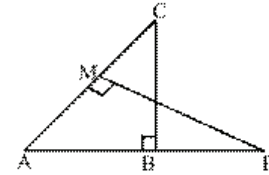
4. (क) दिइएको चित्रमा $MN \parallel QR$ छ । $\triangle PMN \sim \triangle PQR$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



- (ख) चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो । यदि $AB \parallel EF \parallel DC$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



- (ग) दिइएको चित्रमा $\triangle ABC$ र $\triangle AMP$ दुई बिन्दु B र M मा समकोण त्रिभुजहरू हुन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :



- (i) $\triangle ABC \sim \triangle AMP$

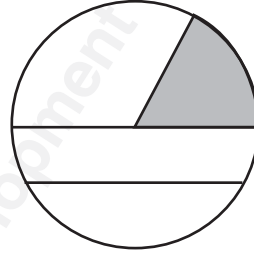
- (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

पाठ 16 वृत्त (Circle)

16.0 पुनरावलोकन

एउटा दुई रुपियाँको सिक्कालाई कापीमा ट्रेस गर्दा के को आकृति बन्छ छलफल गरौं । कम्पासको सहायताले त्यस्तै आकृति कसरी बनाउन सकिनेला ? यसरी कम्पासद्वारा बनाइएको आकृतिमा के

- अर्धव्यास (Radius)
- परिधि (Circumference)
- जिबा (Chord)
- व्यास (Diameter)
- चाप (Arc)
- अर्धवृत्त (Semi-circle)
- क्षेत्रक (Sector)



(viii) वृत्तखण्ड (Segment) हरू देखाउन सकिन्छ ? समूहमा बसेर चित्र बनाई छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै बिन्दुपथ (locus) एउटा निश्चित बिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छ भने त्यसलाई वृत्त भन्दछन् । वृत्तका विभिन्न भागहरू माथि दिइएअनुसार हुन्छन्, जुन हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा पढिसकेका छौं ।

तल दिइएका अवस्थाहरूका बारेमा सोचौं र एक आपसमा छलफल गरौं ।

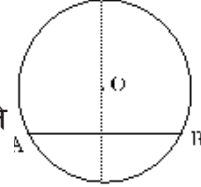
- के उही केन्द्र बिन्दु भएको तर फरक फरक अर्धव्यास भएको एउटा मात्र वृत्त हुन्छ ?
- एउटा वृत्तमा कति ओटासम्म अर्धव्यास तथा व्यासहरू खिचन सकिनेला ? तिनीहरूका बिचको सम्बन्ध के हुन सक्छ ?
- के बराबर अर्धव्यास भएका वृत्तहरूको एउटै केन्द्र बिन्दु हुन्छ ?
- के व्यासले वृत्तलाई आधा गर्छ ?
- सबभन्दा लामो जिबा कुन हुन सक्छ ?
- के एउटा सिधा रेखाले वृत्तलाई दुईभन्दा बढी बिन्दुमा काट्छ ?

16.1 वृत्तको जिबासँग सम्बन्धित साध्यहरूको सैद्धान्तिक प्रमाण

(Theoretical proof of theorems related to chord of a circle)

कुनै वृत्तको परिधिका दुई ओटा बिन्दु जोड्ने रेखालाई जिबा भनिन्छ । व्यास सबभन्दा लामो जिबा हो । यहाँ हामी जिबासँग सम्बन्धित साध्यहरूको सैद्धान्तिक प्रमाणका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

चित्रमा देखाए जस्तै एउटा ट्रेसिड पेपर अथवा सादा पेपरमा O केन्द्र भएको वृत्त खिचौं ।



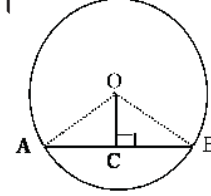
उक्त वृत्तमा AB जिबा खिचौं । सो जिबा AB सँग लम्ब हुने र केन्द्र बिन्दुबाट जाने रेखालाई आधार मानी फोल्ड गरौं । यसरी फोल्ड गर्दा बनेको रेखाले AB लाई दुई बराबर भागमा बाँड्छ बाँड्दैन, अवलोकन गरौं ।

साध्य 1: वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट कुनै जिबामा रेखित लम्बले त्यस जिबालाई समद्विभाजन गर्छ ।

थाहा दिइएको : चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु र AB जिबा छ । $OC \perp AB$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AC = BC$

रचना : AO र BO जोडौं ।



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle OAC$ र $\triangle OBC$ मा	1.
i) $\angle OCA = \angle OCB$ (स.)	i) $OC \perp AB$ भएकाले (प्रत्येक कोण 90°)
ii) $OA = OB$ (क.)	ii) एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू भएकाले
iii) $OC = OC$ (भु.)	iii) साझा भुजा भएकाले
2. $\triangle OAC \cong \triangle OBC$	2. स.क.भु. अनुसार
3. $AC = BC$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

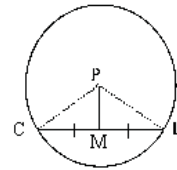
के केन्द्र बिन्दु र जिबाको नाम फरक राखेर माथिको साध्य प्रमाणित गर्न सकिन्छ ? सकिन्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् ।

साध्य : 2 वृत्तको कुनै जिबाको मध्य बिन्दु र केन्द्र जोड्ने रेखा जिबामा लम्ब हुन्छ ।

थाहा दिइएको : चित्रमा P वृत्तको केन्द्र बिन्दु र PM ले जिबा CD लाई आधा गरेको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $PM \perp CD$

रचना : PC र PD जोडौं ।

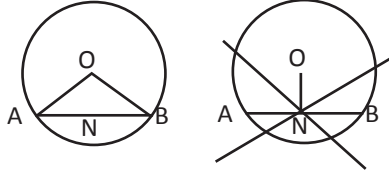


प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle PMC$ र $\triangle PMD$ मा	1.
i) $PC = PD$ (भुजा)	i. एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू भएकाले
ii) $PM = PM$ (भुजा)	ii. साझा भुजा भएकाले
iii) $CM = DM$ (भुजा)	iii. थाहा दिइएकाबाट
2. $\triangle PMC \cong \triangle PMD$	2. भु.भु.भु. बाट
3. $\angle PMC = \angle PMD$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू भएकाले
4. $\angle PMC + \angle PMD = 180^\circ$	4. सिधा रेखामा एकैतिर बनेका आसन्न कोणहरूको योगफल भएकोले
5. $\angle PMC + \angle PMD = 180^\circ$ or, $2\angle PMC = 180^\circ$ or, $\angle PMC = 90^\circ$	5. तथ्य 4 लाई सरल गर्दा
6. $PM \perp CD$	6. तथ्य 5 अनुसार or, $\angle PMC = 90^\circ$ भएकाले

प्रमाणित भयो ।

कम्पासको सहायताले एउटा वृत्त खिचौं । जसको केन्द्र बिन्दु O छ । जिबा AB को अर्धकहरू खिचौं (कक्षा 6 मा जस्तै) । तिनीहरूमध्ये एउटा अर्धक केन्द्रबाट खिचौं । केन्द्रबाट गएको अर्धकले जिबा AB सँग कति डिग्रीको कोण बनाउछ, नापौं । आफूले पाएको निष्कर्ष लेखौं । के यो काम पेपर फोल्ड गरेर पनि गर्न सकिन्छ, अभ्यास गरौं ।

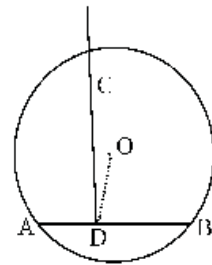


साध्य : 3 कुनै वृत्तको जिबाको लम्बार्धक त्यो वृत्तको केन्द्र बिन्दु भएर जान्छ ।

थाहा दिइएको : O वृत्तको केन्द्र बिन्दु छ । जिबा AB लाई CD ले लम्बार्धकका रूपमा काटेको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : CD मा केन्द्र बिन्दु पर्छ ।

रचना : मानौं CD मा केन्द्र बिन्दु O पर्दैन । OD खिचौं ।



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $CD \perp AB$	1. थाहा दिइएकाबाट
2. $OD \perp AB$	2. जिबा AB को मध्य बिन्दु D सँग केन्द्र बिन्दु जोडेकाले (साध्य 2 अनुसार)
3.(i) $\angle CDB = \angle ODB$	3.(i) CD र OD दुवै AB मा लम्ब हुने भएकाले ।
(ii) यो सम्भव हुदैन जब सम्म CD र OD एउटै रेखामा पर्दैन ।	(ii) $\angle CDO$ को नाप 0° हुने हुनाले ।
4. CD र OD एउटै रेखामा पर्छन् अथवा CD, केन्द्र बिन्दु O भएर जान्छ ।	4. तथ्य (3) बाट

प्रमाणित भयो ।

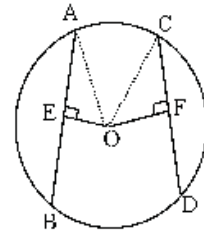
O केन्द्र बिन्दु भएको एउटा वृत्त खिचौं । यसमा दुई बराबर जिबाहरू AB र CD देखाऔं । अब उक्त वृत्तलाई काटेर छुट्याऔं । जिबा AB र CD लाई दुई बराबर भाग हुनेगरी फोल्ड गरौं । यसरी फोल्ड गर्दा जिबाहरूमा पर्ने बिन्दु केन्द्र बिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छ वा पर्दैन, अवलोकन गरौं ।

साध्य 4 : कुनै वृत्तका दुई बराबर जिबाहरू केन्द्र बिन्दुबाट बराबर दुरीमा हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : वृत्तको केन्द्र बिन्दु O छ । दुई बराबर जिबाहरू AB र CD मा $OE \perp AB$ र $OF \perp CD$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $OE = OF$

रचना : AO र CO जोडौं ।



तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle AEO$ र $\triangle CFO$ मा	1.
i) $\angle AEO = \angle CFO$ (स.)	i) दुवै समकोण भएकाले ।
ii) $AO = CO$ (क.)	ii) एउटै वृत्तका त्रिज्याहरू भएकाले ।
ii) $AE = CF$ (भु.)	iii) बराबर जिबाका आधा भागहरू भएकाले ।
2. $\triangle AEO \cong \triangle CFO$	2. स.क.भु. बाट
3. $OE = OF$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकाले

प्रमाणित भयो ।

कुनै पनि साध्यको थाहा दिइएको र प्रमाणित गर्नुपर्ने एक आपसमा साट्दा जुन नयाँ गणितीय वाक्य बन्छ, यस्तो वाक्यलाई उक्त साध्यको विलोम भनिन्छ । अब हामी साध्य 4 को विलोमको सैद्धान्तिक पुष्टि गरौं ।

साध्य 4 को विलोम : वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट बराबर दुरीमा रहेका जिबाहरू बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : वृत्तको केन्द्र बिन्दु O छ ।

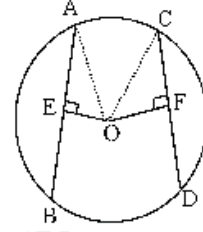
AB र CD दुई जिबाहरू हुन् ।

$OE \perp AB$, $OF \perp CD$, $OE = OF$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AB = CD$

रचना : OA र OC जोडौं ।

प्रमाण :



तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle OAE$ र $\triangle OCF$ मा	
i. $\angle AEO = \angle CFO$ (स.)	i. $OE \perp AB$ र $OF \perp CD$ भएकाले ।
ii. $OA = OC$ (क.)	ii. एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू भएकाले ।
iii. $OE = OF$ (भु.)	iii. थाहा दिइएकाबाट
2. $\triangle OAE \cong \triangle OCF$	2. स.क.भु. बाट
3. $AE = CF$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकाले ।
4. $2AE = 2CF$ अथवा, $AB = CD$	4. केन्द्र बिन्दुबाट जिबामा खिचिएको लम्बले जिबालाई आधा गर्ने भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1

यदि एउटा वृत्तको अर्धव्यास 10cm र एउटा जिबाको लम्बाइ 16cm भए उक्त जिबाको केन्द्र बिन्दु देखिको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु छ । O बाट जिबा AB मा OM लम्ब खिचिएको छ । $AM = \frac{1}{2} AB$ हुन्छ । [केन्द्र बिन्दुबाट जिबामा खिचिएको लम्बले उक्त जिबालाई समद्विभाजन गर्ने भएकाले ।]

फेरी, $\triangle OMA$ मा, $OA^2 = OM^2 + AM^2$ [पाइथागोरस साध्यअनुसार]

$$\text{अथवा, } 10^2 = OM^2 + 8^2 \quad [\because AM = \frac{1}{2} \times 16 \text{ cm} = 8 \text{ cm}]$$

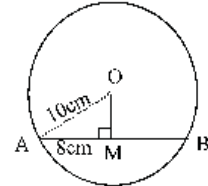
$$\text{अथवा, } 100 = OM^2 + 64$$

$$\text{अथवा, } 100 - 64 = OM^2$$

$$\text{अथवा, } 36 = OM^2$$

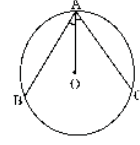
$$\text{अथवा, } 6 = OM$$

\therefore जिबाको केन्द्र बिन्दुदेखिको दुरी 6 से.मी. छ ।



उदाहरण : 2

दिइएको चित्रमा O केन्द्र बिन्दु भएका वृत्तका जिबाहरू AB र AC छन् । यदि $\angle BAO = \angle CAO$ भए $AB = AC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

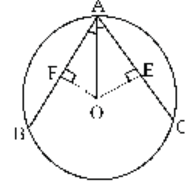


समाधान :

थाहा दिइएको : $\angle BAO = \angle CAO$, O केन्द्र बिन्दु हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AB = AC$

रचना : $OF \perp AB$ र $OE \perp AC$ खिचौ ।



तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\triangle OAF$ र $\triangle OAE$ मा	
i) $OA = OA$ (भु.)	i) साझा भुजा भएकाले ।
ii) $\angle OAF = \angle OAE$ (को.)	ii) थाहा दिइएकाबाट ।
iii) $\angle AFO = \angle AEO$ (को.)	iii) दुवै कोण 90° भएकाले ।
2. $\triangle OAF \cong \triangle OAE$	2. भु.को.को. तथ्य बाट
3. $AF = AE$	3. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकाले ।
4. $AF = BF$ र $AE = EC$	4. $OF \perp AB$ र $OE \perp AC$ भएकाले ।
5. $2AF = 2AE$ अथवा, $AB = AC$	5. तथ्य (3) र (4) बाट

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : 3

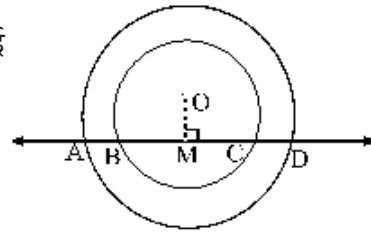
एक केन्द्रित (O) दुई ओटा वृत्तहरूलाई कुनै एउटा सिधा रेखाले A, B, C र D मा काटेको छ ।

प्रमाणित गर्नुहोस : $AB = CD$.

थाहा दिइएको : O वृत्तहरूको केन्द्र छ । सिधा रेखाले वृत्तहरूलाई बिन्दुहरू A, B, C र D मा काटेको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AB = CD$

रचना : $OM \perp AD$ खिचौ ।



प्रमाण :

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $AM = DM$	1. केन्द्रबाट जिबामा खिचिएको लम्बले जिबालाई समद्विभाजन गर्ने भएकाले
2. $BM = CM$	2. कारण (1) अनुसार
3. $AB = CD$	3. तथ्य (1) बाट तथ्य (2) घटाउँदा ।

प्रमाणित भयो ।

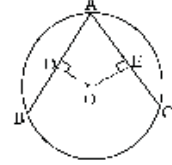
अभ्यास : 16

- (क) 5cm अर्धव्यास भएको वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट 4cm टाढा रहेको जिबाको लम्बाइ कति हुन्छ ?
 (ख) एउटा वृत्तको अर्धव्यास 26cm र कुनै जिबाको लम्बाइ 48cm छ । उक्त जिबा वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट कति टाढा होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) एउटा वृत्तको कुनै जिबा 24cm लामो छ । यसको केन्द्र बिन्दुबाट दुरी 10cm छ । वृत्तको व्यासको लम्बाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) केन्द्र बिन्दु O बाट एकैतिर पर्ने दुई समानान्तर जिबाहरू AB र CD को लम्बाइ क्रमशः 6cm र 12cm छ । यदि AB र CD को दुरी 3cm भए वृत्तको अर्धव्यास कति होला ?

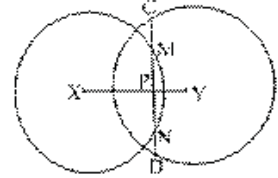
- (क) सँगैको चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु छ । AB र CD दुई बराबर जिबाहरू बिन्दु X मा प्रतिच्छेदित छन् । $AX = CX$ र $BX = DX$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



- (ख) दिइएको चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु छ । यदि $OD \perp AB$, $OE \perp AC$ र $AB = AC$ भए $\triangle ADE$ समद्विबाहु त्रिभुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



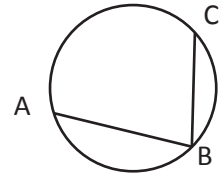
- दिइएको चित्रमा X र Y वृत्तका केन्द्र बिन्दुहरू हुन् । $XY \perp CD$ छ । CD ले केन्द्र बिन्दु X भएको वृत्तलाई बिन्दुहरू M र N मा तथा XY लाई P मा काटेको छ, प्रमाणित गर्नुहोस् ।



- (i) $CM = DN$ (ii) $CN = DM$

- तिन जना विद्यार्थीहरू अहमद, निम्बा र कृष्ण 10 मिटर अर्धव्यास भएको वृत्ताकार घेरामा उभिएर एउटा खेल खेल्दै छन् । अहमदले निम्बालाई र निम्बाले कृष्णतर्फ एक एक गरी भलिबल फ्याँके । अहमद र निम्बाबिच 12 मिटर र निम्बा र कृष्णबिच पनि 12 मिटरको दुरी छ । अहमद र कृष्णबिच कति मिटरको दुरी होला ? चित्र बनाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

- दिइएको चित्रमा AB र BC वृत्तका जिबाहरू हुन् । उक्त चित्रलाई कापीमा ट्रेस गर्नुहोस् र वृत्तको केन्द्र बिन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।



17.0 पुनरावलोकन

एउटा विद्यालयको चौरमा बसेर शिक्षक र विद्यार्थीबिच भएको

वार्तालापको एक अंश यहाँ प्रस्तुत गरिएको छ :

शिक्षक : दिलमाया, तिमी भन त, यहाँ गाडिएको भलिबलको खम्बा कति अग्लो होला ?

दिलमाया : सर, खम्बा अग्लो र सुरिलो छ । चढ्नै सकिँदैन, कसरी नाप्नु र ?

शिक्षक : किन चढ्नु पर्यो र ? त्यसको छाया यहाँसम्म आएको छ । त्यही छायालाई नापेर भन्न सकिहालिन्छ नि ।

जीवन : सर, यहाँ खम्बाको फेददेखि छायाको टुप्पासम्मको दुरी त 8m रहेछ । त्यसो भए खम्बा पनि त्यति नै उचाइको हुन्छ त ?

शिक्षक : त्यसो होइन, यहाँबाट खम्बाको टुप्पासम्म एउटा बाँस राखेर हेरौं त, बाँसको लम्बाइ 10m छ । अब भन जीवन खम्बा, छाया र बाँस राख्दा कस्तो चित्र बन्दो रहेछ ?

जीवन : त्यसो त समकोण त्रिभुज बन्दो रहेछ सर । अब बल्ल कुरा बुझेँ । हामीले ज्यामितिमा पढेको पाइथागोरस साध्य प्रयोग गरेर खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउन सक्ने रहेछौं, होइन सर ?

दिलमाया : ए हो त नि, बाँस समकोण सामुन्ने छ ।

त्यसैले कर्ण $AC = h = 10$ m, छ । छाया र बाँसको बिचको कोण C हो । यसलाई सन्दर्भ कोण भनिन्छ । खम्बा चाहिँ C को सम्मुख भुजा हो त्यसैले यो लम्ब $AB = p$ छ । छायाको लम्बाइ आसन्न भुजा वा आधार $BC = b = 8$ m छ ।

यहाँ पाइथागोरस साध्यअनुसार

(कर्ण)² = (लम्ब)² + (आधार)² वा $h^2 = p^2 + b^2$ हुन्छ ।

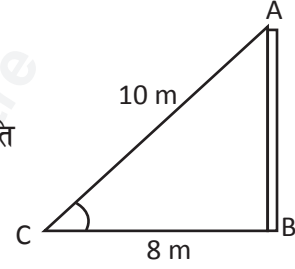
$$10^2 = p^2 + (8)^2$$

अथवा, $100 = p^2 + 64$

अथवा, $p = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ m हुन्छ ।

यसरी खम्बाको लम्बाइ 6m भयो होइन त, सर !

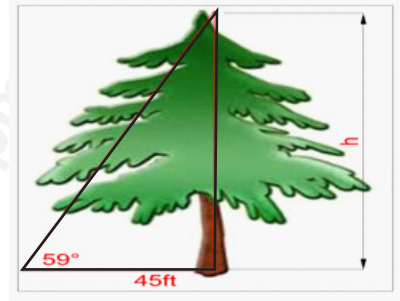
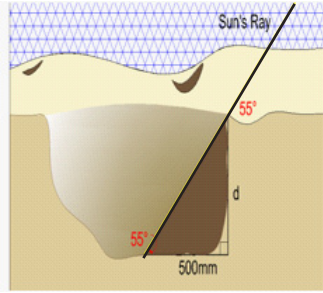
शिक्षक : हो, दिलमाया, तिमीले ठिक उत्तर निकाल्यौ ।



17.1 त्रिकोणमिति (Trigonometry)

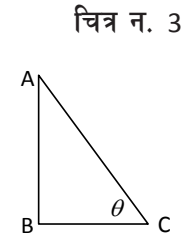
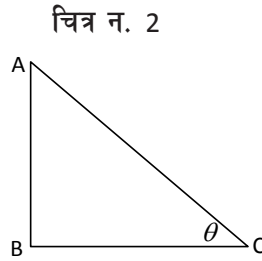
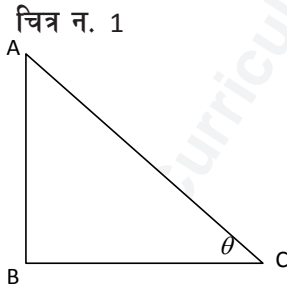
माथिका तथ्यका आधारमा त्रिकोणमितिको अर्थ तिन ओटा कोणहरूको नाप हो । त्रिकोणमितिले त्रिभुजका भुजाहरू र कोणहरूको सम्बन्धको अध्ययन गर्दछ । कुनै पनि सहजै नाप्न नसकिने वस्तुको उचाइ, लम्बाइ पत्ता लगाउने साधनका रूपमा त्रिकोणमितिको प्रयोग हुन्छ ।

उदाहरणका लागि दिइएको चित्रमा जस्तै कुनै नदीको गहिराइ र रुख वा खम्बाको उचाइ नाप्नु छ भने रुख वा खम्बादेखि कुनै स्थानसम्मको तेर्सो रेखा र सर्भेको सामान (Clinometer) जमिनको सतहदेखि रुखको टुप्पोसम्मको कोण नाप्न प्रयोग गरिने यन्त्रका सहायताबाट उचाइ तथा खम्बाको फेदसम्मको दुरी पत्ता लगाउन त्रिकोणमितिको प्रयोग हुन्छ । त्रिकोणमितिको सहायताबिना गणित, भौतिक विज्ञान तथा इन्जिनियरिङ क्षेत्रको विकास र विस्तार असम्भव छ । त्यसैले त्रिकोणमितिलाई गणित तथा विज्ञानको महत्त्वपूर्ण र अभिन्न अङ्गका रूपमा लिइन्छ ।



क्रियाकलाप 1

दिइएका त्रिभुजका चित्रमा भुजाहरू तथा कोणहरू नापी तलको तालिका पुरा गर्नुहोस् ।



तालिका नं 1

	AB	BC	CA	$\angle A$	$\angle C$	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{AB}{BC}$
चित्र न. 1								
चित्र न. 2								
चित्र न. 3								

माथिको तालिका भरी प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

- त्रिभुज ABC मा समकोण र सन्दर्भ कोण कुन कुन हुन् ?
 - त्रिभुज ABC मा कर्ण, सम्मुख भुजा र आसन्न भुजाहरू कुन कुन हुन् ? के ती भुजाहरू समानुपातमा छन् ?
- यसरी समकोण त्रिभुज ABC मा कर्ण h ले आधारसँग बनाएका कोण C र C को सम्मुख भुजा p र आसन्न भुजा b बिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध छ भन्ने तथ्य पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

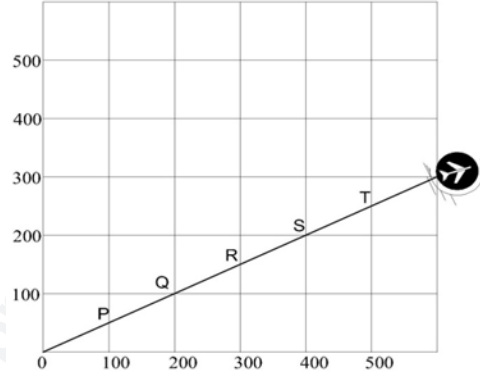
उदाहरण 1

दिइएको ग्राफमा 2071 सालमा बाढी पीडित उद्धारका लागि काठमाडौँबाट सुर्खेततर्फ उडेको विमानको हो । यसले मैदान छोडेर माथि उडी 500 मि. दुरी पार गर्दा कति उचाइमा पुग्दो रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

विमान उडेर P ठाउँमा पुग्दा जमिनबाट यसले 100 मिटर परको दुरी लिन्छ । त्यो जहाज 50 मिटर उचाइमा पुगेका हुन्छ । विमान P उचाइमा हुँदा उचाइ र दुरीको (जमिनमा पार गरेको दुरीको) अनुपात, अर्थात्,

$$\text{उचाइ : दुरी} = \frac{50}{100} \text{ हुन्छ ।}$$

विमान जमिनको दुरी क्रमशः 200, 300, 400, 500 मिटर पार गर्दा विमान जमिनबाट क्रमशः 100, 150, 200 र 250 मिटर उचाइमा हुन्छ । चित्रको अध्ययन गरी अनुपातलाई निम्न लिखित तालिकामा भर्नुहोस् ।



विमानको स्थान	उचाइ	दुरी	अनुपात (उचाइ : दुरी)	जमिनसँग बनाएको कोण
P	50	100	1:2 = 0.5	
Q	100			
R	150			
S	200			
T	250			

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ भने कुनै पनि समकोण त्रिभुजमा कर्ण h ले आधारसँग बनाएको कोणको सम्मुख भुजा p र आधार b को अनुपात (उचाइ: दुरी) $\frac{p}{b}$ को बिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध रहन्छ । एउटा स्थिर कोणका लागि (उचाइ: दुरी) $\frac{p}{b}$ पनि अचल हुन्छ । स्थिर कोणलाई सन्दर्भ कोण भनिन्छ । यसलाई ग्रीक अक्षर θ ले जनाइन्छ ।

कोण ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$) को मान बढ्दा अनुपात पनि बढ्छ भने θ को मान घट्दा अनुपात पनि घट्छ । त्यसैले (उचाइ: दूरी) $\frac{p}{b}$ थाहा हुँदा θ थाहा पाउन सकिन्छ । त्रिकोणमितिमा कोणहरूलाई जनाउन तलको तालिकामा दिइएका ग्रीक अक्षरहरू प्रयोग गरिन्छ ।

Small Greek letters	Name
α	Alpha (अल्फा)
β	Beta (बिटा)
γ	Gamma (गामा)
θ	Theta (थिटा)
ϕ	Phi (फाइ)
ψ	Psi (साइ)

17.1.2: आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Fundamental Trigonometric Ratios)

दिइएको चित्रमा समकोण त्रिभुज ABC मा सन्दर्भ कोण θ को सम्मुख भुजा $p = AB$, आसन्न भुजा $b = BC$ र कर्ण $h = AC$ छ ।

अब अनुपात $\frac{AB}{AC}$ लाई θ को sine भनिन्छ ।

यसलाई छोटकरीमा $\sin \theta$ लेखिन्छ ।

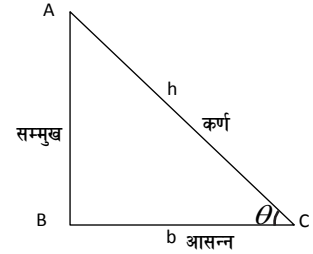
समकोण $\triangle ABC$ मा,

$$\theta \text{ को sine अथवा } \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{p}{h}$$

त्यसै गरी अरू दुई ओटा आधारभूत अनुपातको परिभाषा यसरी दिन सकिन्छ ।

$$\theta \text{ को cosine अथवा } \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{h}$$

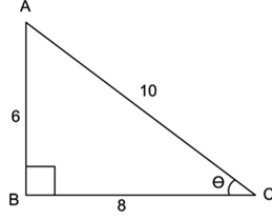
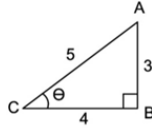
$$\theta \text{ को tangent अथवा } \tan \theta = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{आसन्न}} = \frac{AB}{BC} = \frac{p}{b}$$



यसरी यी तिन ओटा अनुपातहरू $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ लाई आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपात भनिन्छ ।

यसबाहेक त्रिभुजमा अन्य अनुपातहरू $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AC}{BC}$ र $\frac{BC}{AB}$ छन् । तिनलाई क्रमशः $\operatorname{cosec} \theta$, $\operatorname{sec} \theta$ र $\cot \theta$ ले जनाइन्छ ।

त्रिकोणमितीय अनुपातका केही महत्त्वपूर्ण गुणहरूलाई तलको उदाहरणबाट देखाउन सकिन्छ :



सानो $\triangle ABC$ मा

ठुलो $\triangle ABC$ मा

$$\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{3}{5},$$

$$\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{3}{4},$$

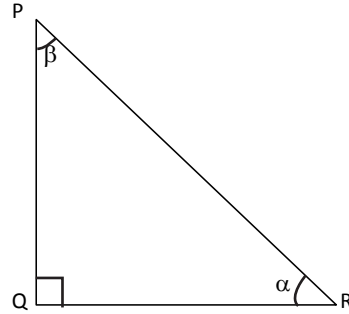
$$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

समकोण समरूप त्रिभुजमा त्रिभुजको आकारले त्रिकोणमितीय अनुपातका मानहरूमा कुनै फरक पर्दैन ।

क्रियाकलाप 2

सँगैको चित्र हेरी जोडा मिलाउनुहोस् :

i.	α का लागि लम्ब	PR
ii.	β का लागि लम्ब	$\frac{PQ}{PR}$
iii.	कर्ण	PQ
iv.	$\sin\alpha$	QR
v.	$\cos\beta$	$\frac{QR}{PQ}$
vi.	$\tan\alpha$	$\frac{QR}{PR}$
vii.	$\tan\beta$	$\frac{PQ}{QR}$



उदाहरण 3

मान निकाल्नुहोस् :

(क) $\sin\theta = \frac{3}{5}$ र $h = 20$ भए $p = ?$

(ख) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ र $b = 8$ भए $h = ?$

(ग) $\tan \theta = \frac{3}{4}$ र $b = 8$ भए $p = ?$

(घ) $\sin \theta = \frac{3}{4}$ भए $\cos \theta$ र $\tan \theta$ को मान कति होला ?

समाधान :

(क) यहाँ,

$$\sin \theta = \frac{p}{h} \quad \text{अथवा,} \quad \frac{p}{h} = \frac{3}{4},$$

$$h = 20 \text{ भए } \frac{p}{20} = \frac{3}{4} \text{ वा } 5p = 3 \times 20 \text{ अथवा } p = \frac{3 \times 20}{5} = 3 \times 4 = 12$$

त्यसैले $p = 12$ हुन्छ ।

(ख) यहाँ, $\cos \theta = \frac{b}{h} = \frac{4}{5}$

(ग) यहाँ, $\tan \theta = \frac{p}{b} = \frac{3}{4}$

अथवा, $\frac{b}{h} = \frac{4}{5}$, $b = 8$ भए $\frac{8}{h} = \frac{4}{5}$,

अथवा, $\frac{p}{b} = \frac{3}{4}$, $b = 8$ भए $\frac{p}{8} = \frac{3}{4}$

अथवा, $4h = 5 \times 8$

अथवा $4p = 8 \times 3$

त्यसैले $h = 10$ हुन्छ ।

त्यसैले $p = 6$ हुन्छ ।

(घ) $\sin \theta = 3/5$ भए $p = 3$, $h = 5$ (मानौं)

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$$h^2 = p^2 + b^2$$

$$\text{or, } 5^2 = 3^2 + b^2$$

$$\text{or, } b^2 = 25 - 9 = 16, \text{ त्यसैले } b = 4 \text{ हुन्छ ।}$$

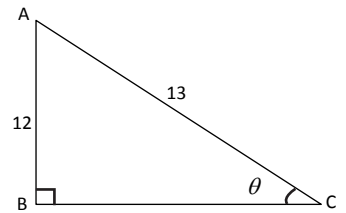
$$\text{अब, } \cos \theta = \frac{b}{h} = \frac{4}{5} \text{ र } \tan \theta = \frac{p}{b} = \frac{3}{4} \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 3

त्रिभुज ABC मा, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = \theta$, $AB = 12 \text{ cm}$, $AC = 13 \text{ cm}$

भए, प्रमाणित गर्नुहोस् ।

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$



समाधान :

यहाँ $AB = p = 12$ cm, $AC = h = 13$ cm, $BC = b = ?$

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$$h^2 = p^2 + b^2$$

$$\text{or, } 13^2 = 12^2 + b^2$$

$$\text{or, } b^2 = 169 - 144 = 25 \quad \text{त्यसैले } b = 5 \text{ cm हुन्छ ।}$$

अब, $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

$$= \frac{p^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{(12)^2}{(13)^2} + \frac{(5)^2}{(13)^2} = \frac{169}{169} = 1 \text{ प्रमाणित भयो ।}$$

उदाहरण 4

$\tan\theta$ लाई $\cos\theta$ को रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

समाधान :

हामीलाई थाहा छ, $\sin\theta = \frac{p}{h}$, $\cos\theta = \frac{b}{h}$,

$$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{\frac{p}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{\frac{\sqrt{h^2 - b^2}}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{\sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \frac{\sqrt{h^2 - \frac{b^2}{h^2}}}{\frac{b}{h}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{h}\right)^2}}{\frac{b}{h}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

अभ्यास 17.1

1. दिइएको समकोण त्रिभुजका आधारमा निम्न प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

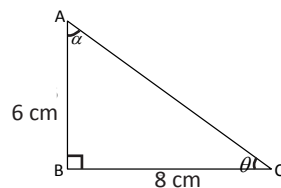
(क) (i) सबभन्दा लामो भुजा कुन हो ? यसको लम्बाइ कति छ ?

(ii) α को लागि लम्ब र आधार कुन कुन हुन् ?

(iii) θ को लागि लम्ब र आधार कुन कुन हुन् ?

(ख) मान पत्ता लगाउनुहोस् :

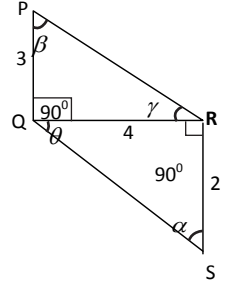
(i) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ (ii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$



(ग) प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$(i) \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (ii) \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

2. दिइएको चित्रमा $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ कोणहरू र तिनका भुजाहरूको सम्बन्धबाट sine, cosine र tangent पत्ता लगाउनुहोस् ।



3. हिसाब गर्नुहोस् :

(i) $\tan A$ लाई $\sin A$ को रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ii) $\sin A$ लाई $\cos A$ को रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(iii) $\tan \theta = \frac{3}{4}$ भए $\sin \theta$ र $\cos \theta$ को मान कति कति होला ?

(iv) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $\cos \theta$ र $\tan \theta$ को मान कति कति होला ?

(v) $\sin \theta = \frac{3}{5}$ छ भने $\cos \theta$ को मान कति हुन्छ ।

(vi) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए, $\sin \theta$ र $\cos \theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(vii) $\sin \theta = \frac{p}{h} = \frac{6}{10}$ र $h = 20$ भए $b = ?$

(viii) $\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}$ र $p = 6$ भए $h = ?$, $b = ?$

17.2 विशिष्ट कोणको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of some special Angles)

0° देखि 90° सम्मका विशिष्ट कोणहरूको सहायताले त्रिभुजका समस्याहरूको हल गर्न सकिन्छ ।

विशिष्ट कोणहरू मध्ये $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ र 90° को मान पत्ता लगाउन सिकौं ।

17.2.1: 45° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान

यहाँ, $\triangle PQR$ समकोण समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

जहाँ $P = 45^\circ$ र $R = 45^\circ$ हुन्छ ।

त्यसैले भुजा $PQ = QR = x$ मानौं ।

अब, पाइथागोरस साध्यानुसार,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

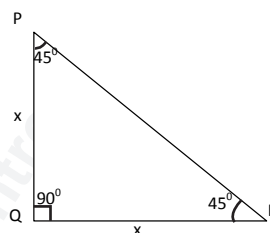
$$PR = \sqrt{2}x$$

समकोण $\triangle PQR$ मा,

$$\sin R = \sin 45^\circ = \frac{p}{h} = \frac{PQ}{PR} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\cos R = \cos 45^\circ = \frac{b}{h} = \frac{QR}{PR} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\tan R = \tan 45^\circ = \frac{p}{b} = \frac{PQ}{QR} = \frac{x}{x} = 1 = 1.000$$



17.2.2 30° र 60° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान

30° र 60° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान पत्ता लगाउनका लागि समबाहु त्रिभुज $\triangle PQR$ लिऔं। यसमा भुजा $PQ = QR = PR = x$ मानौं।

त्रिकोणमितीय अनुपातका लागि समकोण त्रिभुजको आवश्यकता पर्दछ।

त्यसैले P बाट आधारमा PM लम्ब खिचौं जसले आधार भुजा QR लाई समान दुई भागमा विभाजन

गर्दछ र यहाँ $QM = \frac{x}{2} = MR$ हुन्छ।

अब समकोण $\triangle PMR$ मा $\angle R = 60^\circ$; $\angle M = 90^\circ$ भए $\angle MPR = 30^\circ$ हुन्छ।

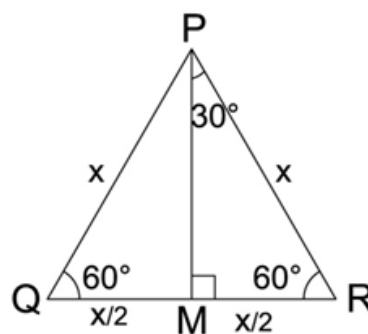
$\triangle PMR$ मा पाइथागोरस साध्यबाट,

$$(PM)^2 = (PR)^2 - (MR)^2$$

$$(PM)^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$(PM)^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$PM = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$



पुनः सन्दर्भ कोण $\angle MPR = 30^\circ$ को हुँदा $p = MR = \frac{x}{2}$, $h = PR = x$, $b = PM = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ हुन्छ।

$$\text{अतः } \sin 30^\circ = \frac{p}{h} = \frac{MR}{PR} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{h} = \frac{PM}{PR} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$\tan 30^\circ = \frac{p}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{x}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

फेरि समकोण $\triangle PMR$ मा सन्दर्भ कोण $\angle R = 60^\circ$ लिंदा,

$$P = PM = \frac{\sqrt{3}}{2}x, b = MR = \frac{x}{2} \quad \text{र} \quad h = PR = x \text{ हुन्छ ।}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{p}{h} = \frac{PM}{PR} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{h} = \frac{MR}{PR} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\tan 60^\circ = \frac{p}{b} = \frac{PM}{MR} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \times \frac{2}{x} = \sqrt{3} = 1.732$$

$$\text{यसरी हेर्दा, } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) \quad \therefore \sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$$

$$\text{त्यस्तै, } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) \quad \therefore \cos \theta = \sin (90^\circ - \theta)$$

17.2.3 0° र 90° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान

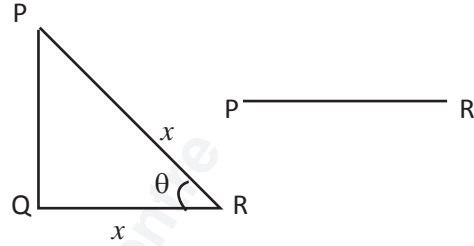
समकोण त्रिभुज PQR मा PR लाई घुमाउँदै लाने हो भने $\angle PRQ$ घट्दै गएर P बिन्दु Q मा खिचिन पुग्छ ।

यस बेला कोण PRQ घट्दै गएर 0° हुन्छ र $PQ=0$ हुन्छ । अर्थात् $PR=x$, $QR=x$, $PQ=0$ हुन्छ ।

$$\text{अतः } \sin 0^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{0}{x} = 0$$



त्यसै गरी,

$\triangle PQR$ मा, $\angle PRQ, 0^\circ$ बाट बढ्दै गएर $\angle \theta = 90^\circ$ मा पुग्दा

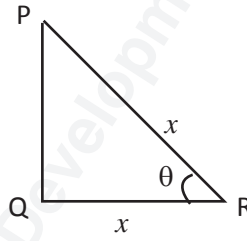
PQ र PR खिचिन्छ र $PR=x$ भए

$PQ=x$ हुन्छ । $QR=0$ हुन्छ ।

$$\sin 90^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{x}{0} = \infty \text{ (अपरिभाषित)}$$



माथिका विशिष्ट कोणहरूको त्रिकोणमितीय मानलाई एउटै तालिकामा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

कोण \ अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ अपरिभाषित

उदाहरण 4

यदि $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(i) $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 90^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 90^\circ \cdot \sin 60^\circ$

(ii) $\cos(45^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$

समाधान:

यहाँ, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $p = 1$, $h = \sqrt{2}$ मान्दा

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{h^2 - p^2}}{h} = \frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, भए $p = 1$, $h = 2$ मान्दा

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{h^2 - b^2}}{h} = \frac{\sqrt{4-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin 90^\circ = 1$, भए $p = 1$, $h = 1$ मान्दा

$$\cos 90^\circ = \frac{\sqrt{h^2 - p^2}}{h} = \frac{\sqrt{1-1}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

(i) LHS = $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

RHS, = $\sin 90^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 90^\circ \cdot \sin 60^\circ$

$$= 1 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

L.H.S = R.H. S proved

(ii) L.H.S = $\cos(45^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

R.H. S = $\cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

L.H.S = R.H. S proved.

अभ्यास 17.2

1. तालिका प्रयोग गरी निम्न त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान निकाल्नुहोस् :

- (i) $\tan 60^\circ$ (ii) $\tan 30^\circ$ (iii) $\sin 90^\circ$
(iv) $\cos 45^\circ$ (v) $\cos 60^\circ$ (vi) $\tan 45^\circ$
(vii) $\tan 60^\circ + \cos 60^\circ$ (viii) $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$ (ix) $\sin 60^\circ$

2. चित्र खिचेर नापी तलका मानका आधारमा समकोण त्रिभुजका न्यूनकोणहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (i) $\sin \theta$ को मान 0.5
(ii) $\cos \theta$ को मान 0.5
(ii) $\tan \theta$ को मान 1

3. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

- (i) $\sin 0^\circ + \sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ$ (ii) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ$
(iii) $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ (iv) $\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

- (i) $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$ (ii) $\sin 90^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$
(iii) $\tan 60^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ (iv) $\cos 60^\circ = 1 - 2 \sin^2 30^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$

5. हल गर्नुहोस् :

- (i) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan 30^\circ$ (ii) $2\sqrt{3} \cos \theta = 3$ (iii) $4 \cos^2 \theta = 1$

6. कुनै समकोण त्रिभुजमा कर्णको लम्बाइ 5 र सन्दर्भ कोण 30° छ भने बाँकी कोण र भुजाहरूको मान निकाल्नुहोस् ।

7. कुनै समबाहु त्रिभुजमा $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ र $\sin 60^\circ$ को मान निकाल्नुहोस् ।

8. 36m अग्लो घण्टाघरको फेदबाट $12\sqrt{3}$ मिटर पर गएर घण्टाघरको टुप्पामा हेर्दा जमिनदेखि घण्टाघरको टुप्पोमा बन्ने सन्दर्भ कोण निकाल्नुहोस् ।

18.0 पुनरावलोकन

कक्षा 8 को जिल्ला स्तरीय परीक्षामा एउटा विद्यालयमा भएका 15 जना विद्यार्थीहरूको गणित विषयको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ :

45, 46, 67, 78, 85, 92, 49, 65, 79, 58, 59, 45, 67, 85, 78,

उक्त तथ्याङ्कलाई के कति तरिकाले प्रस्तुत गर्न सकिन्छ, समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

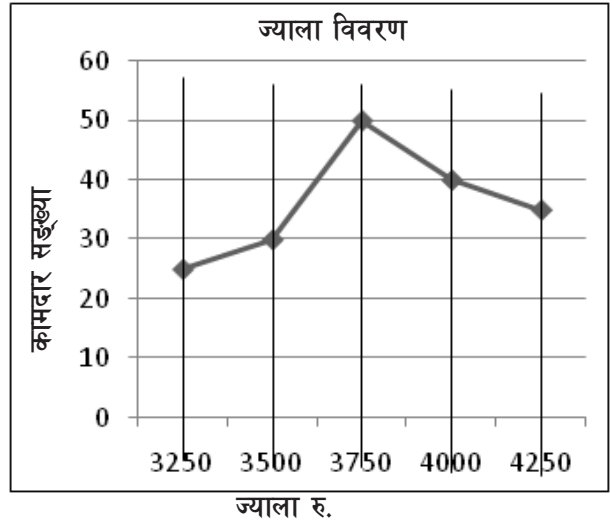
हामीले एउटा कक्षाका विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्कलाई सङ्कलन गरेर तालिकामा प्रस्तुत गर्छौं । यसबाट के कुरा बुझ्न सकिन्छ भने तथ्य भएका अङ्कहरूको सङ्कलनलाई नै तथ्याङ्क भनिन्छ । सङ्कलित मात्रात्मक सूचनाहरूको समूह नै तथ्याङ्क हो । यसरी माथिको छलफलबाट आउने निष्कर्षलाई व्यक्तिगत, खण्डित र अविच्छिन्न श्रेणीमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । अङ्ग्रेजीमा यसलाई statistics भनिन्छ । यो Latin भाषाबाट आएको हो । यसको अर्थ status of state हुन्छ । प्राचीन कालमा राज्यको जनसङ्ख्या र गरिबीको अध्ययन गर्न तथ्याङ्कको प्रयोग गरिन्थ्यो भने आजको आधुनिक युगमा जनसङ्ख्या, गरिबी मात्र नभई राज्यको आर्थिक, प्रशासनिक, वाणिज्य, व्यापार, अनुसन्धान तथा बैङ्किङ आदि क्षेत्रमा समेत प्रयोग गर्न थालिएको छ । त्यसैले तथ्याङ्कको महत्त्व अबै बढ्दै गएको छ ।

18.1 रेखाचित्र र वृत्तचित्र (Line graph and Pie Chart)

18.1.1 लेखाचित्र (Line graph)

दिइएको रेखाचित्रको अध्ययन गरी तल दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गरौं र समूहमा उत्तर खोजौं ।

1. सबैभन्दा कम ज्याला कति छ ? कम ज्याला पाउने कामदार कति जना होलान् ?
2. सबैभन्दा बढी ज्याला पाउने कामदारहरू कति होलान् ?
3. सबभन्दा बढी र सबभन्दा कम ज्यालाको बिचमा कति अन्तर होला ?



यसरी माथिका प्रश्नको छलफलपछि रेखाचित्रको परिभाषा निम्नानुसार गर्न सकिन्छ :

कुनै पनि तथ्याङ्क र सूचनाहरू, जस्तै : दिनभरिको तापक्रममा आएको परिवर्तन, विभिन्न सालमा जनसङ्ख्यामा भएको परिवर्तन, कुनै कम्पनीका कामदारहरूको ज्याला आदिलाई बिन्दु (point) को शृङ्खलाको रूपमा प्रस्तुत गरिने चित्रलाई रेखाचित्र (line graph) भनिन्छ। यसमा प्रत्येक बिन्दुहरूलाई माथिको चित्रमा जस्तै सरल रेखाको माध्यमले जोडिएको हुन्छ।

रेखाचित्र खिच्ने तरिका:

उदाहरण 1

बच्चाहरूको सङ्ख्याका आधारमा परिवारको सङ्ख्या निम्नानुसार देखाएको छ। यसलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

बच्चाको सङ्ख्या	1	2	3	4	5
परिवार सङ्ख्या	5	6	4	3	2

समाधान :

माथिको तथ्याङ्कलाई निम्नानुसार रेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

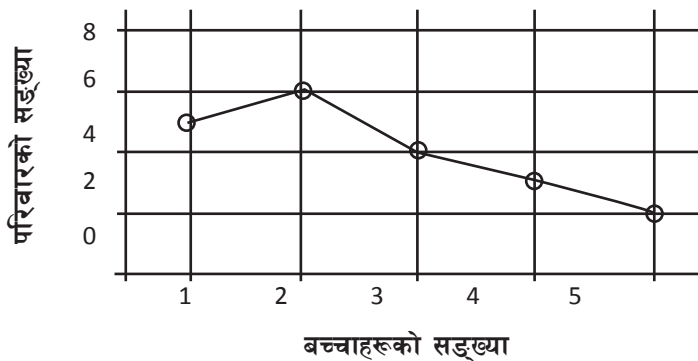
चरण 1 : X अक्षमा बच्चाहरूको सङ्ख्या र Y अक्षमा परिवार सङ्ख्या लेखौं।

चरण 2 : पहिलो बिन्दुका लागि बच्चाको सङ्ख्या 1 लाई X अक्षमा 1 एकाइ र परिवारको सङ्ख्या 5 लाई Y अक्षमा 5 एकाइमा भेट्ने बिन्दु अङ्कित गरौं। त्यसै गरी बच्चाको सङ्ख्या 2 भएको परिवारको सङ्ख्या 6, बच्चाको सङ्ख्या 3 भएको परिवारको सङ्ख्या 4, बच्चाको सङ्ख्या 4 भएको परिवारको सङ्ख्या 3 र बच्चाको सङ्ख्या 5 भएको परिवारको सङ्ख्या 2 भएका सबै बिन्दुहरूमा चिह्न लगाऔं।

चरण 3 : प्रत्येक बिन्दुलाई क्रमशः सरल रेखाले जोडौं।

अब निम्नानुसारको रेखाचित्र तयार भयो।

बच्चा र परिवारको सङ्ख्या



18.1.2 पाइचार्ट (Pie Chart)/ वृत्तचित्र (Angular Diagram)

उदाहरण : 1

कुनै एउटा परिवारको मासिक आमदानी रु. 4000 छ । उसले मासिक रूपले गर्ने खर्चको विवरण सँगैको वृत्तचित्रमा देखाइएको छ । सँगैको चित्रको अध्ययन गरी निम्न प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) खानामा जम्मा कति खर्च हुन्छ ?

(ख) घर भाडामा कति खर्च भयो ?

(ग) विविधमा कति खर्च भएछ ?

समाधान :

हामीलाई थाहा छ, वृत्तचित्रमा 360°

अथवा 100% भन्नाले जम्मा आवृत्ति (N) लाई जनाउँछ ।

चित्रमा, 100% = रु. 4000 छ ।

1% = रु. 40 हुन्छ ।

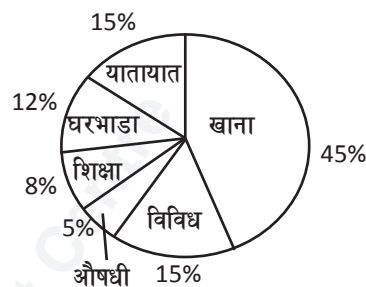
(क) खानामा जम्मा खर्च = 45% = $45 \times \text{रु. } 40 = \text{रु. } 1800$

(ख) घर भाडामा जम्मा खर्च = 12% = $12 \times \text{रु. } 40 = \text{रु. } 480$

(ग) विविधमा जम्मा खर्च = 15% = $15 \times \text{रु. } 40 = \text{रु. } 600$

माथिको छलफलपछि वृत्तचित्रको परिभाषा निम्नानुसार गर्न सकिन्छ :

दुई आयामिक (two dimensional) वृत्ताकार चित्रलाई वृत्तचित्र (pie chart) भनिन्छ जसमा क्षेत्रकको कोणले सम्बन्धित विषयको बारम्बारता जनाउँछ । वृत्तचित्रको माध्यमबाट सरकारले बजेटलाई विभिन्न शीर्षक जस्तै : कृषि, उद्योग, यातायात, सिँचाइ आदिमा कसरी र कति कति खर्च गर्दछ भन्ने कुरा सजिलै अध्ययन गर्न सकिन्छ । त्यस्तै कुनै पनि व्यक्तिले आफ्नो आमदानीको कति कति प्रतिशत रकम कुन कुन शीर्षकमा खर्च गर्‍यो भन्ने अध्ययन गर्न सकिन्छ ।



वृत्तचित्र (Pie Chart) खिच्ने तरिका

उदाहरण 2

कुनै गाउँको रक्तदान कार्यक्रममा सहभागी 2200 जना व्यक्तिहरूको रगत परीक्षण गर्दा 323 जना समूह A, 220 जना समूह B, 850 जना समूह O र 807 जना समूह AB भएका रहेछन् । यस आँकडालाई वृत्तचित्र (पाइचार्ट) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान :

यसलाई निम्नानुसार तिन चरणमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

पहिलो चरण

कुल रक्तदाताको सङ्ख्या 2200 लाई एउटा सिङ्गो वृत्तचित्रमा देखाउनु पर्दछ ।

त्यसैले $2200 = 360^\circ$ हुन्छ ।

अतः 1 जना = $\frac{360^\circ}{2200}$ हुन्छ ।

दोस्रो चरण

सूत्रअनुसार,

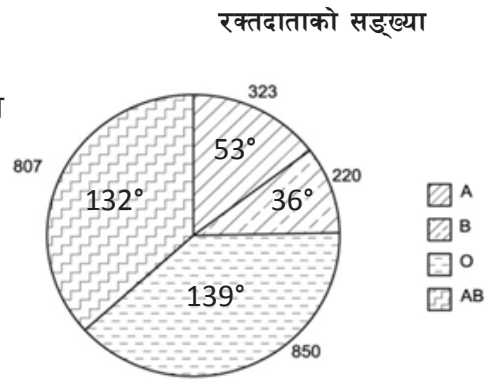
वृत्तको केन्द्रमा बन्ने कोणको मान (क्षेत्रक कोण) = $\frac{\text{सम्बन्धित समूहको सङ्ख्या}}{\text{कुल सङ्ख्या}} \times 360^\circ$ हुन्छ ।

जसलाई निम्न तालिकामा देखाइएको छ :

रक्त समूह	व्यक्तिको सङ्ख्या	केन्द्रको कोण	शून्यान्त मान
A	323	$\frac{323}{2200} \times 360^\circ = 52.85^\circ$	53°
B	220	$\frac{220}{2200} \times 360^\circ = 36^\circ$	36°
O	850	$\frac{850}{2200} \times 360^\circ = 139^\circ$	139°
AB	807	$\frac{807}{2200} \times 360^\circ = 132^\circ$	132°
Total	2200	$\frac{2200}{2200} \times 360^\circ = 360^\circ$	360°

तेस्रो चरण

- एउटा वृत्त खिचौं । (अर्धव्यास = 3 से.मी. भएको)
- एउटा अर्धव्यास खिचौं । त्यसलाई आधार रेखा मानेर चाँदको सहायताले 53° को कोण खिचौं । त्यो कोणमा रक्त समूह A लेखौं ।
- त्यसपछि क्रमशः 36° , 139° र 132° कोण बनाई वृत्तलाई विभाजन गरी सम्बन्धित समूहलाई फरक फरक सङ्केतले प्रतिविम्बित गरौं ।



अभ्यास 18.1

1. तल दिइएको आँकडा 30 ओटा फुटबल खेलहरूमा गरिएका गोलहरूको सङ्ख्याको हो । यसलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

1, 0, 2, 3, 4, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 0, 4, 2, 2, 3, 6, 2, 2, 3, 1, 5, 5, 1, 1, 2, 6, 3

2. एउटा स्वास्थ्य शिविरमा उपस्थित 37 जना व्यक्तिको नाडीको धड्कन यस प्रकार रहेको छ :

59, 52, 60, 66, 82, 68, 70, 59, 65, 72, 61, 56, 73, 78, 61, 66, 59, 51, 68, 84, 75, 79, 58, 68, 62, 71, 53, 57, 74, 70, 50, 66, 71, 64, 72, 58, 58

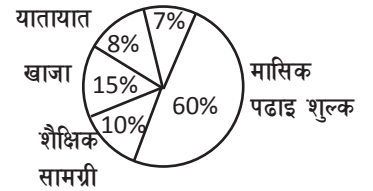
श्रेणी अन्तर 50 - 55, 55 - 60, 60- 65,..., लिएर माथिको आँकडालाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. एक जना निजी विद्यालयमा अध्ययन गर्ने विद्यार्थीको मासिक खर्च रु. 7500 तलको वृत्त चित्रमा देखाइएको छ । यो चित्र हेरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् : विविध

(क) मासिक पढाइ शुल्क कति लाग्दो रहेछ ?

(ख) शैक्षिक सामग्री र यातायातमा कति कति खर्च हुँदो रहेछ ?

(ग) कुन शीर्षकमा सबैभन्दा बढी खर्च भएको देखिन्छ ?



4. तलको तालिकामा दिइएको विभिन्न जिल्लामा भएको धान उत्पादनलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

जिल्ला	भापा	मोरङ	धनुषा	काठमाडौँ	काभ्रे
उत्पादन (मेट्रिक टन)	1500	1250	1550	500	1200

5. तलको तालिकामा दिइएको विभिन्न देशमा भएको नेपाली घरबुना कपडा निर्यात तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्र (पाइचार्ट) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

देश	अमेरिका	अस्ट्रेलिया	बेलायत	फ्रान्स	अन्य	जम्मा
निकासी (रु. हजारमा)	530	55	83	48	24	740

6. नेपालका विभिन्न अग्ला हिमशृङ्खलाहरूको उचाइ तलको तालिकामा दिइएको छ । त्यसबाट रेखाचित्र (line graph) खिच्नुहोस् ।

हिमाल	धवलागिरी	अन्नपूर्ण	मनास्लु	सगरमाथा	लोत्से	मकालु	कञ्चनजङ्घा
उचाइ (meter)	8172	8078	8156	8848	8501	8470	8598

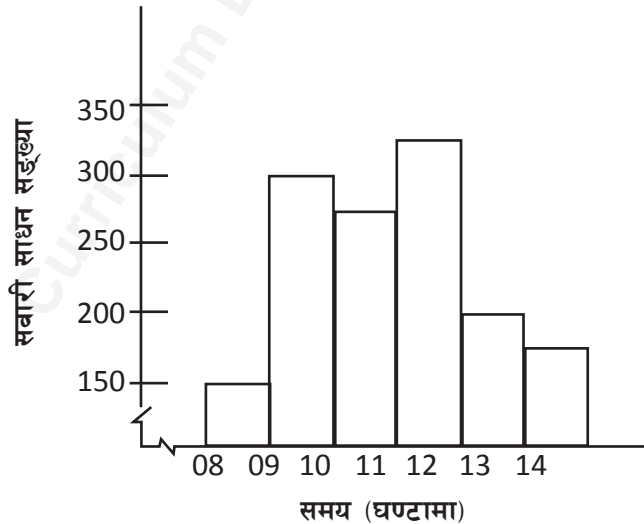
7. तपाईंको टोलमा आफ्नो घरको नजिक रहेको 6 ओटा परिवारमा गई प्रत्येक घरका विद्यालय जाने केटाकेटीको सङ्ख्या टिप्नुहोस् र त्यसलाई तालिकाबद्ध गरी रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
8. आफू अध्ययन गर्ने विद्यालयमा गएको पाँच वर्षको एस.एल सी परीक्षाको नतिजा सङ्कलन गरी वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
9. तपाईंको घरमा मासिक खानामा, लत्ता कपडामा, शिक्षामा, स्वास्थ्यमा र विविध शीर्षकमा कति कति खर्च हुन्छ ? आफ्ना अभिभावकसँग आँकडा लिएर वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

18.2 हिस्टोग्राम र सञ्चित बारम्बारता बक्र (Histogram and Cumulative Frequency Curve)

18.2.1 हिस्टोग्राम (Histogram)

निम्न तालिका र त्यसबाट निर्मित हिस्टोग्राम अध्ययन गरी तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् । काठमाडौंको कलङ्कीबाट विभिन्न समय अन्तरमा उपत्यका बाहिर जाने सवारी साधनहरूको सङ्ख्या यस प्रकार रहेको छ :

समय (बजे)	08 - 09	09 - 10	10 - 11	11 - 12	12 - 13	13 - 14
सवारी साधन सङ्ख्या	150	300	275	325	200	175



(क) x - अक्षमा रहेका सङ्ख्याले के कुरा देखाउँछ ?

(ख) y - अक्षमा रहेका सङ्ख्याले के कुरा देखाउँछ ?

- (ग) सबभन्दा कम बाहिर जाने सवारी सङ्ख्या कति रहेछन् ? कुन समयमा बाहिर जाँदा रहेछन् ?
 (घ) 9 बजेदेखि 10 बजेको अन्तरालमा कति सवारी साधन बाहिर जाँदा रहेछन् ?
 (ङ) सबभन्दा बढी सङ्ख्यामा बाहिरिने सवारी साधनहरू कति रहेछन् र ती कुन समयमा बाहिरिँदा रहेछन् ?

माथिको हिस्टोग्राम (histogram) अवलोकनपश्चात निम्न निष्कर्षमा पुग्न सकिन्छ :

पहिलो स्तम्भले 8 देखि 9 बजेभित्र बाहिर जाने सवारी सङ्ख्या 150 छ भनी जनाउँछ । त्यसै गरी दोस्रो स्तम्भले 9 देखि 10 बजेसम्म बाहिर जानेको सङ्ख्या 300 छ भनी जनाउँछ । सबभन्दा अग्लो स्तम्भ चित्रले सबभन्दा बढी सवारी साधनको र सबभन्दा होचो स्तम्भले सबैभन्दा कम सवारी साधनको सङ्ख्या जनाउँछ ।

यसरी दिइएको वा सङ्कलित आँकडालाई विभिन्न श्रेणी अन्तर (class interval) भएको निरन्तर बारम्बारता तालिका (continuous frequency distribution table) मा प्रस्तुत गरी x- अक्षमा प्रत्येक श्रेणी अन्तर बराबरको स्तम्भको चौडाइ र y- अक्षमा बारम्बारता बराबरको उचाइका स्तम्भहरू बनाइन्छ । यस्तो चित्रलाई नै हिस्टोग्राम भनिन्छ । यो निरन्तर (अविच्छिन्न) आँकडा (continuous data) का लागि प्रयोग गरिन्छ ।

हिस्टोग्राम (Histogram) खिच्ने तरिका

कुनै कम्पनीका कामदारको मासिक ज्याला निम्नानुसार दिइएको छ । त्यसलाई निरन्तर बारम्बारता तालिका (continuous frequency distribution table) मा तालिकाबद्ध गरी हिस्टोग्राममा प्रस्तुत गर्नहोस् ।

ज्याला (रु. सयमा) 26, 24, 25, 35, 26, 24, 23, 22, 20, 23, 24, 36, 42, 45, 54, 55, 33, 37, 32, 23, 24, 40, 42, 52, 50, 53, 57, 58, 50, 39, 23, 24

चरण : 1

यहाँ सबैभन्दा सानो सङ्ख्या 20 र सबभन्दा ठुलो सङ्ख्या 58 छ । यिनीहरूलाई समावेश गर्ने गरी पुरै आँकडालाई 10/10 को श्रेणी अन्तरमा राख्दा 4 ओटा श्रेणी बन्दछन् । अब दिइएको आँकडालाई वर्गीकृत गरी बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरौं ।

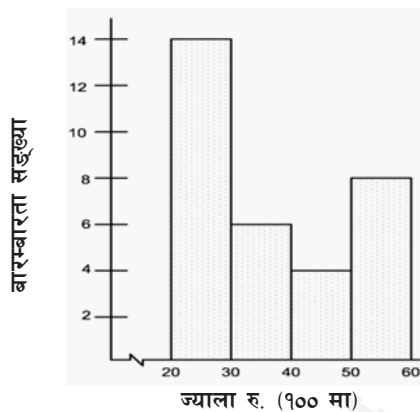
ज्याला (रु. सयमा)	मिलान चिह्न	बारम्बारता
20 - 30		14
30 - 40		6
40 - 50		4
50 - 60		8

चरण 2

यहाँ प्रत्येक श्रेणी अन्तरमा माथिल्लो सीमालाई गणना गरिएको छैन । अब x- अक्षमा उद्गम बिन्दु 0 मानी (स्थिर गरी) त्यहाँबाट 1 से.मी. बराबर 5 एकाइ हुने गरी नापौं र श्रेणी अन्तरहरू 20 - 30, 30 - 40, 40 - 50, 50 - 60 सम्म बिन्दुहरू चिह्न लगाऔं ।

चरण 3

सबभन्दा बढी बारम्बारता 14 छ, तसर्थ 2 से.मी. एकाइ मानेर उद्गम बिन्दुबाट माथि Y- अक्षमा क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10, 12 र 14 मा चिह्न लगाऔं ।



चरण 4

X- अक्षमा स्तम्भको चौडाइ (20 - 30) मा 2 से.मी. चौडाइ र उचाइ 14 एकाइ भएको स्तम्भ खिचौं । त्यसै गरी क्रमशः (30 - 40) मा उचाइ 6 एकाइ भएको स्तम्भ, (40 - 50) मा उचाइ 4 एकाइ भएको र (50 - 60) मा उचाइ 8 एकाइ भएको स्तम्भ खिचौं ।

यसरी आवश्यक हिस्टोग्राम (histogram) तयार भयो ।

18.2.2 सञ्चित बारम्बारता तालिका (Cumulative Frequency Distribution Table)

श्री कृष्ण उ.मा. विद्यालयका कक्षा 9 का 28 जना विद्यार्थीहरूले दोस्रो त्रैमासिक परीक्षामा गणित विषयमा प्राप्त अङ्कहरू निम्नानुसार छ :

35, 40, 45, 40, 35, 55, 60, 55, 40, 35, 60, 65, 45, 55, 45, 65, 45, 35, 55, 45, 55, 65, 60, 45, 60, 65, 35, 65

यस आँकडालाई बारम्बारता तालिका (frequency distribution table) मिलान चिह्नसमेत प्रयोग गरी हेर्दा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता (विद्यार्थी सङ्ख्या) f
35		5
40		3
45		6
55		5
60		4
65		5

यसै तालिकालाई श्रेणी अन्तर (class interval) 4 ओटा श्रेणीमा पनि वर्गीकरण गरेर निम्नानुसार तालिकामा देखाउन सकिन्छ :

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता
30 – 40		5
40 – 50		9
50 – 60		5
60 – 70		9

माथिको तालिकामा श्रेणी अन्तरमा रहेको माथिल्लो सीमालाई (upper limit) छोडेर गणना गरिएको छ । 30 - 40 मा 40 लाई गणना गरिएको छैन । त्यसै गरी प्रत्येक श्रेणीको अन्तिम सङ्ख्या अर्थात् उच्च बिन्दुलाई गणना गरिएको छैन । तालिकामा मिलान चिह्नले जनाउने सङ्ख्या बारम्बार दोहोरिने सङ्ख्या हुनाले बारम्बारता भनेको हो । त्यसले विद्यार्थीहरूको सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

अब माथिको तालिकाबाट निम्नानुसार सञ्चित बारम्बारता (cumulative frequency) निकाल्न सकिन्छ ।

- सर्वप्रथम दिइएको आँकडा (data) लाई बढ्दो क्रम वा घट्दो क्रममा लेखौं ।
- त्यसपछि प्रत्येक वर्ग वा श्रेणी (class) को बारम्बारता एकपछि अर्को जोड्दै लैजाऔं ।

प्राप्ताङ्क	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
40 भन्दा कम (< 40)	5	5
50 भन्दा कम (< 50)	9	5 + 9 = 14
60 भन्दा कम (< 60)	5	14 + 5 = 19
70 भन्दा कम (< 70)	9	19 + 9 = 28
जम्मा	28	

यसरी प्रत्येक श्रेणीको बारम्बारता क्रमशः जोड्दै जाँदा आउने योगफललाई सञ्चित बारम्बारता (cumulative frequency) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा c.f. ले जनाइन्छ । माथिको तालिकालाई सञ्चित बारम्बारता तालिका भनिन्छ ।

18. 2. 3 सञ्चित बारम्बारता वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive)

तलको तालिकामा 20 - 45 वर्षभित्रका महिलाहरूको रक्तचापको मान दिइएको छ :

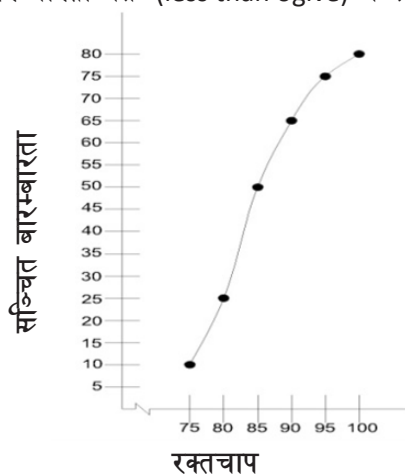
Diastolic B.P. (mmHg)	70 - 75	75 - 80	80 - 85	85 - 90	90 - 95	95 - 100
महिलाको सङ्ख्या	10	18	23	15	8	5

दिइएको तालिकालाई भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिकामा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

रक्तचापको तल्लो सीमा	बारम्बारता
70 - 75	10
75 - 80	18
85 - 90	15
90 - 95	8
95 - 100	5

रक्तचापको तल्लो सीमा	सञ्चित बारम्बारता
75 भन्दा कम	10
80 भन्दा कम	$10 + 18 = 28$
85 भन्दा कम	$28 + 23 = 51$
90 भन्दा कम	$51 + 15 = 66$
95 भन्दा कम	$66 + 8 = 74$
100 भन्दा कम	$74 + 5 = 79$

अब माथिको सञ्चित बारम्बारता तालिकामा देखाएअनुसार प्रत्येक श्रेणीको आँकडालाई बढ्दो क्रममा लेखेर बारम्बारतालाई क्रमशः जोड्दै लेखिएको छ । यसलाई रेखाचित्र (line graph) मा प्रस्तुत गर्दा निम्नानुसार भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र (less than ogive) बन्दछ ।



यहाँ x- अक्षमा श्रेणीका मानहरू 75 देखि 100 सम्म लेखिएको छ । y- अक्षमा बारम्बारता छ । भन्दा कम सञ्चित बारम्बारतालाई रेखाचित्रमा बिन्दुहरू खिचिएको छ । प्रत्येक बिन्दुलाई क्रमशः स्वतन्त्र रूपले जोडिएको छ । यसरी तयार भएको रेखाचित्रलाई भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र (less than ogive) भनिन्छ । तसर्थ भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र सधैं तलदेखि माथि बढ्दै गएको हुन्छ ।

भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र जस्तै भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र (more than ogive) पनि बनाउन सकिन्छ । यसका लागि तलको तालिका अवलोकन गरौं ।

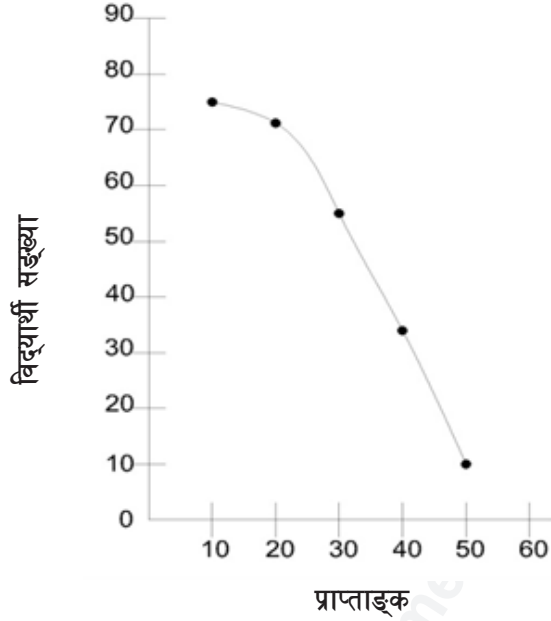
प्राप्ताङ्क	10 -20	20 -30	30 - 40	40 -50	50 - 60
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	14	25	23	10

यसलाई भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा

प्राप्ताङ्क	बारम्बारता
10 - 20	5
20 - 30	14
30 - 40	25
40 - 50	23
50 - 60	10
जम्मा	77

प्राप्ताङ्क	सञ्चित बारम्बारता
10 भन्दा बढी	77
20 भन्दा बढी	$77 - 5 = 72$
30 भन्दा बढी	$72 - 14 = 58$
40 भन्दा बढी	$58 - 25 = 33$
50 भन्दा बढी	$33 - 23 = 10$

यसरी भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा सबभन्दा सानो सङ्ख्या 10 भन्दा बढी सम्पूर्ण सङ्ख्याहरू छन् । त्यसैले सबै बारम्बारता जोडेर लेख्नुपर्छ । त्यसपछि तालिकामा जस्तै जम्माबाट क्रमशः प्रत्येक श्रेणीको बारम्बारता घटाउँदै जाने अन्त्यमा 50 भन्दा बढी (50 - 60) को सञ्चित बारम्बारता 10 हुन आउँछ । यसलाई सञ्चित बारम्बारता वक्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नानुसार भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र (more than ogive) बन्दछ । तसर्थ भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र सधैं माथिदेखि तल घट्दै गएको हुन्छ ।



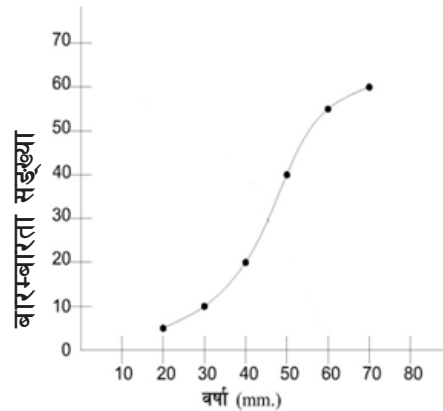
नोट : एउटै ग्राफमा दिइएको वर्गीकृत (श्रेणी अन्तर) आँकडाबाट बढ्दो क्रम र घट्दो क्रमको बारम्बारता वक्र प्रस्तुत गर्न पनि सकिन्छ ।

अभ्यास 18.2

1. तलको सञ्चित बारम्बारता वक्रको अध्ययन गरी तल दिइएको बारम्बारता तालिकालाई पूर्ण गर्नुहोस् (c.f. भर्नुहोस्) :

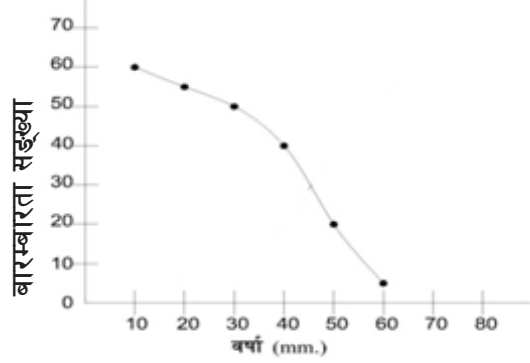
(क)

भन्दा कम (less than ogive)	
वर्षा (mm)	भन्दा कम c.f.
20 भन्दा कम	
30 भन्दा कम	
40 भन्दा कम	
50 भन्दा कम	
60 भन्दा कम	
70 भन्दा कम	



(ख)

भन्दा बढी (more than ogive)	
वर्षा (mm)	भन्दा बढी c.f.
10 भन्दा बढी	
20 भन्दा बढी	
30 भन्दा बढी	
40 भन्दा बढी	
50 भन्दा बढी	
60 भन्दा बढी	



2. 30 जना केटाहरूको तौल (कि.ग्रा.) निम्नानुसार छ :

20, 14, 18, 35, 47, 33, 18, 16, 25, 14, 30, 14, 30, 27, 11, 29, 20, 22, 15, 29, 25, 20, 29, 14, 39, 19, 18, 10, 25, 26

(क) माथिका 30 जना केटाहरूको तौल (kg) बाट श्रेणी अन्तर 10 लिनुहोस् र बारम्बारता तालिका तयार गर्नुहोस् ।

(ख) माथि (क) मा बनाइएको तालिकाका आधारमा हिस्टोग्राम तयार गरी सबभन्दा कम तौल भएका केटाहरूको समूह कुन हो र सबभन्दा बढी तौल भएका केटाहरूको समूह कुन हो छुट्याउनुहोस् ।

(ग) माथि (क) को तालिकाका आधारमा भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउनुहोस् र यसलाई सञ्चित बारम्बारता वक्र (ogive) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. तल दिएको भन्दा कम आँकडाका आधारमा श्रेणी अन्तरको बारम्बारता तालिका तयार गर्नुहोस् र हिस्टोग्राममा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

दैनिक ज्याला (रु.)	50	100	150	200	250	300	350
	भन्दा कम	भन्दा कम	भन्दा कम	भन्दा कम	भन्दा कम	भन्दा कम	भन्दा कम
कामदारको सङ्ख्या (c.f.)	10	24	30	50	70	90	100

4. तल दिइएको आँकडा कुनै टोलको स्वास्थ्य शिविरमा 300 जनाको स्वास्थ्य परीक्षण गर्दा 60 जनामा देखिएको मधुमेह (diabetes) का बिरामीहरूको हो । अब उक्त तथ्याङ्कका आधारमा सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाइ बारम्बारता वक्र (ogive) खिचनुहोस् ।

उमेर (वर्ष)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
बिरामीको सङ्ख्या (f)	2	5	15	25	13

18.3 केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन

(Measures of Central Tendency)

18.3.1 अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean)

तपाईंले कक्षा 8 को सबै विषयका परीक्षामा ल्याएको अङ्कहरू लेख्नुहोस् । ती सबै अङ्कहरूको जोड निकाल्नुहोस् र कति ओटा विषय छन् त्यसले भाग गर्नुहोस् । आउने अङ्कनै मध्यक वा अङ्क गणितीय मध्यक हो । मध्यकलाई \bar{x} ले जनाइन्छ ।

उदाहरणका लागि 7 जना केटीहरूको तौल (kg) तल दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कका मध्यक निकाल्नुहोस् ।

50, 45, 31, 38, 40, 58, 53

यहाँ जम्मा सङ्ख्या $N = 7$

अब सबैको तौल जोड्दा $50 + 45 + 31 + 38 + 40 + 58 + 53 = 315$ kg हुन्छ ।

अब त्यसलाई 7 ले भाग गर्दा $\frac{315}{7} = 45$ kg हुन्छ ।

त्यसैले, मध्यक = 45 kg हुन्छ ।

(i) व्यक्तिगत श्रेणीको मध्यक :

यदि $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ले दिइएका पदहरूलाई जनाउँछ भने,

$$\text{मध्यक } (\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} \text{ हुन्छ ।}$$

तसर्थ, $\therefore \bar{x} = \frac{\sum x}{N}$ लेखिन्छ ।

जहाँ $\sum x =$ सबै पदहरूको योगफल हुन्छ र $N =$ जम्मा पदहरूको सङ्ख्या हुन्छ ।

उदाहरण 1

कक्षा 9 मा पढ्ने 10 जना विद्यार्थीको औसत उमेर 12 वर्ष भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् । 8, 9, 10, 11, 12, 13, y , 14, 15, 16

समाधान:

यहाँ, जम्मा विद्यार्थीको सङ्ख्या $N=10$ छ । मध्यक $\bar{x} = 12$

दिइएको उमेरको आँकडा, 8, 9, 10, 11, 12, 13, y , 14, 15, 16 छ ।

अब, $\sum x = 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + y + 14 + 15 + 16 = 108 + y$

र $N = 10$

अब, सूत्रानुसार, $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

अथवा, $12 = \frac{108 + y}{10}$

अथवा, $120 = 108 + y$

अथवा, $y = 120 - 108 = 12$

त्यसैले, $y = 12$ हुन्छ ।

यसरी बारम्बारता नदिई लेखिएका तथ्याङ्कलाई व्यक्तिगत श्रेणी (individual series) भनिन्छ । यदि कुनै तथ्याङ्क बारम्बारतासहित दिइएको छ भने त्यसलाई खण्डित श्रेणी (discrete series) भनिन्छ । जुन कुरा हामीले तथ्याङ्कको परिभाषा गर्ने क्रममा उल्लेख गरिसकेका छौं ।

(ii) खण्डित श्रेणीको मध्यक :

यदि दिइएको तालिकामा x_1, x_2, \dots, x_n आँकडाहरूको बारम्बारता क्रमशः f_1, f_2, \dots, f_n भएमा

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_n
f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_n

अङ्क गणितीय मध्यक $(\bar{x}) = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$ हुन्छ ।

अर्थात् $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$ लेखिन्छ ।

जहाँ $\sum fx$ = प्रत्येक आँकडा र त्यसको सम्बन्धित बारम्बारताको गुणनको योगफल र

$N = \sum f$ = बारम्बारताहरूको योगफल हो ।

उदाहरण : 2

तल दिइएको तथ्याङ्कबाट एउटा सहकारी संस्थाका सेयर सदस्यले पाउने लाभांशको औसत निकाल्नुहोस् :

लाभांश (X)	45	50	60	65	70	80	90	100
सदस्य सङ्ख्या (f)	2	3	6	8	7	5	3	1

समाधान :

माथिको तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

(X) लाभांश	सदस्य सङ्ख्या (f)	fx
45	2	90
50	3	150
60	6	360
65	8	520

70	7	490
80	5	400
90	3	270
100	1	100
	$\Sigma f = 35$	$\Sigma fx = 2380$

यहाँ $N = \Sigma f = 35$

$$\Sigma fx = 2380$$

अब, सूत्रानुसार, मध्यक $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{2380}{35} = 68$

त्यसैले, $\bar{X} = 68$

उदाहरण : 3

तलको तथ्याङ्कमा मध्यक \bar{X} को मान 7.3 भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

x	5	6	7	8	9
f	4	6	12	x	8

समाधान :

यहाँ $\bar{X} = 7.3$

अब बारम्बारता तालिका बनाऔं ।

x	f	fx
5	4	20
6	6	36
7	12	84
8	x	$8x$
9	8	72
	$\Sigma f = 30 + x$	$\Sigma fx = 212 + 8x$

अब, सूत्रानुसार, मध्यक $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$

$$\text{अथवा, } 7.3 = \frac{212 + 8x}{30 + x}$$

$$\text{अथवा } 219.0 + 7.3x = 212 + 8x \quad \text{अथवा } 0.7x = 7$$

$$x = \frac{7}{0.7} = 10 \quad \text{त्यसैले, } x \text{ को मान } 10 \text{ हुन्छ ।}$$

18.3.2 मध्यिका (Median)

कुनै आँकडाको क्रमिक रूपमा आउने स्थानका आधारमा बिचको वा मध्य भागको मान नै मध्यिका हो । मध्यिका निकाल्नुभन्दा पहिला दिएको आँकडालाई बढ्दो (ascending order) वा घट्दो क्रम (desending order) मा लेखिएको हुनुपर्दछ ।

(i) व्यक्तिगत श्रेणीको मध्यिका पत्ता लगाउने तरिका

उदाहरण 1

यदि व्यक्तिगत श्रेणी, 2, 1, 3, 7, 4 भए यसको मध्यिका पत्ता लगाउन बढ्दो क्रममा आँकडालाई लेखौं, जुन 1, 2, 3, 4, 7 हुन्छ ।

यहाँ जम्मा 5 ओटा सङ्ख्याहरू छन् ।

यसलाई $N = 5$ लेखौं,

अब, $\frac{(N+1)}{2}$ औं स्थानको मान नै मध्यिका हुन्छ ।

त्यसैले यहाँ मध्यिका = $\frac{(5+1)}{2}$ औं स्थानको मान

मध्यिका = तेस्रो स्थानको मान

त्यसैले मध्यिका = 3

यसरी सबभन्दा पहिला मध्यिका पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुपर्दछ । त्यसपछि त्यस स्थानमा जुन अङ्क छ, त्यो नै मध्यिका मान हुन्छ । यदि आँकडामा जोर सङ्ख्या दिएमा मध्यिका पर्ने स्थान कुनै दुई अङ्कको बिचमा पर्दछ । ती दुई ओटा अङ्कहरूको औसत मान नै मध्यिका हुन्छ । जस्तै तल एउटा उदाहरण हेरौं :

उदाहरण 2

तलका तथ्याङ्कको मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

11, 12, 13, 14, 16, 17

समाधान :

यहाँ जम्मा सङ्ख्या $N = 6$

आँकडा बढ्दो क्रममा छ,

मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{(N+1)}{2}$ औं पद = $\frac{(6+1)}{2}$ औं पद = 3.5 औं पद

मध्यिका = तेस्रो र चौथो पदको औसत = $\frac{(13 + 14)}{2} = 13.5$

अतः मध्यिका (M_d) = 13.5 हुन्छ ।

उदाहरण 3

दिइएको आँकडाको मध्यिका 32 भए, x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

22, 26, 30, $x + 3$, $x + 5$, 34, 37, 40

समाधान: सूत्रअनुसार

$$\text{मध्यिका पर्ने स्थान} = \frac{(N+1)}{2} = 4.5 \text{ औं स्थान}$$

अर्थात् मध्यिका चौथो र पाँचौं स्थानको बिचमा पर्दछ ।

$$\text{त्यसैले मध्यिका} = \frac{(x+3)+(x+5)}{2} = \frac{(2x+8)}{2} = (x+4)$$

$$\text{अथवा, } M_d = x + 4$$

$$\text{अथवा, } 32 = x + 4$$

$$\text{अथवा, } x = 32 - 4 = 28$$

(ii) खण्डित श्रेणीको मध्यिका पत्ता लगाउने तरिका

उदाहरण 4

दिइएको आँकडालाई सर्वप्रथम बढ्दो क्रममा लेखौं । त्यसपछि तलको उदाहरणमा जस्तो सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाऔं ।

x	12	15	18	21	24	27	30
f	4	8	13	10	8	7	5

समाधान : सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा

x	f	c.f
12	4	4
15	8	4 + 8 = 12
18	13	12 + 13 = 25
21	10	25 + 10 = 35
24	8	35 + 8 = 43
27	7	43 + 7 = 50
30	5	50 + 5 = 55
	N = 55	

$$\text{अब मध्यिका पर्ने स्थान} = \frac{(N+1)}{2} \text{ औं पद}$$

$$= \frac{55+1}{2} \text{ औं पद} = \frac{56}{2} \text{ औं पद} = 28 \text{ औं पद}$$

यदि सञ्चित बारम्बारता 28 छ भने यसले दिने सङ्गत (corresponding) मान नै मध्यिका हुन्छ । यदि सञ्चित बारम्बारता 28 नभए त्यसभन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारताको सङ्गत मान मध्यिका हुन्छ । यहाँ 28 भन्दा ठिक ठुलो मान 35 हो । 35 को सङ्गत मान 21 हो । त्यसैले मध्यिका = 21 हुन्छ ।

उदाहरण : 5

कुनै स्थानको स्वास्थ्य चौकीमा परीक्षण गर्न आउने बिरामीको उमेर र सङ्ख्या तल तालिकामा दिइएको छ । त्यसबाट मध्यिका उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उमेर (वर्ष)	30	32	35	40	48	50	52
बिरामीको सङ्ख्या	1	4	2	5	3	4	6

समाधान :

दिइएको बारम्बारता तालिकाबाट सञ्चित बारम्बारता तालिका तयार गर्दा

उमेर (x)	बिरामीको सङ्ख्या (f)	$c.f$
30	1	1
32	4	5
35	2	7
40	5	12
48	3	15
50	4	19
52	6	25
	$N = 25$	

$$\begin{aligned} \text{मध्यिका पर्ने स्थान} &= \frac{N+1}{2} \text{ औं पद} = \frac{25+1}{2} \text{ औं पद} \\ &= \frac{26}{2} \text{ औं पद} = 13 \text{ औं पद} \end{aligned}$$

यहाँ 13 औं पदभन्दा ठिक माथिल्लो सञ्चित बारम्बारता अङ्क 15 हो । त्यसैले 15 को सङ्गत मान 48 वर्ष नै मध्यिका उमेर हो ।

18.3.3 चतुर्थांश (Quartiles)

कुनै आँकडालाई बराबर चार भागमा बाँड्ने मानहरूलाई चतुर्थांश भनिन्छ । चतुर्थांशका मानहरू पत्ता लगाउन सर्वप्रथम तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राखिन्छ ।

प्रथम चतुर्थांश (Q_1) ले बढ्दो क्रममा मिलाइएको तथ्याङ्कमा तलबाट 25% तथ्याङ्कको अधिकतम मान र तृतीय चतुर्थांश (Q_3) ले तलबाट 75% तथ्याङ्कको अधिकतम मानलाई जनाउँछ ।

यसलाई सरल रेखामा देखाउँदा ।

25%	25%	25%	25%
-----	-----	-----	-----

व्यक्तिगत श्रेणीको चतुर्थांश निकाल्ने तरिका

$$Q_1 \text{ पर्ने स्थान} = \frac{N+1}{4} \text{ औं पद,}$$

$$Q_2 \text{ पर्ने स्थान} = \frac{2(N+1)}{4} = \frac{N+1}{2} \text{ औं पद} = \text{मध्यिका}$$

$$Q_3 \text{ पर्ने स्थान} = \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं पद हुन्छ ।}$$

चतुर्थांशलाई निम्न उदाहरणबाट प्रस्ट पार्न सकिन्छ ।

उदाहरण 5

दिइएको आँकडाबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7, 18, 55, 33, 67, 41, 29

समाधान :

दिइएको आँकडालाई बढ्दो क्रममा लेख्दा, 7, 18, 29, 33, 41, 55, 67

यहाँ, जम्मा सङ्ख्या $N = 7$,

$$\text{पहिलो चतुर्थांश} = \frac{N+1}{4} \text{ औं पद} = \frac{7+1}{4} \text{ औं पद} = \frac{8}{4} \text{ औं पद} = 2 \text{ औं पद} = \text{दोस्रो पद}$$

अतः $Q_1 = 18$ हुन्छ ।

$$\text{त्यसै गरी, } Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं पद} = \frac{3(7+1)}{4} \text{ औं पद} = 6 \text{ औं पद}$$

अतः $Q_3 = 55$ हुन्छ ।

(ii) खण्डित श्रेणीको चतुर्थांश निकाल्ने तरिका

बढ्दो क्रममा लेखिएको आँकडालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा लेखिन्छ । त्यसपछि पहिलो, दोस्रो र तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान पत्ता लगाएर चतुर्थांशहरू निकालिन्छ । यसलाई निम्न उदाहरणबाट प्रस्ट गर्न सकिन्छ ।

ज्याला र. (x)	20	22	23	25	27	28	30
कामदार सङ्ख्या (f)	8	10	11	16	20	25	15

समाधान:

दिइएको आँकडालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा लेख्दा,

ज्याला (x)	कामदार सङ्ख्या (f)	$c.f.$
20	8	8
22	10	18
23	11	29
25	16	45
27	20	65
28	25	90
30	15	105
	N=105	

अब सूत्रअनुसार

$$\begin{aligned}\text{पहिलो चतुर्थांश} &= \frac{N+1}{4} \text{ औं पद} \\ &= \frac{105+1}{4} \text{ औं पद} = 26.5 \text{ औं पद}\end{aligned}$$

अब, 26.5 भन्दा ठिक माथिको सञ्चित बारम्बारता 29 हो। यहाँ 29 को सङ्गत मान 23 छ।

त्यसैले $Q_1 =$ रु. 23 हुन्छ।

$$\text{त्यस्तै, } Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं पद} = 3 \times 26.5 = 79.5 \text{ औं पद}$$

79.5 भन्दा ठिक माथिको सञ्चित बारम्बारता 90 हो त्यसैले $Q_3 =$ रु. 28 हुन्छ।

18.3.4 रीत (Mode)

दिइएको तथ्याङ्कमा सबभन्दा बढी पटक दोहोरिएको सङ्ख्यालाई रीत (mode) भनिन्छ। खण्डित श्रेणीमा जसको सबैभन्दा बढी बारम्बारता छ, त्यो सङ्ख्या नै रीत हुन्छ। त्यस्तै वर्गीकृत (continuous) श्रेणीमा पनि सबभन्दा बढी बारम्बारता भएका श्रेणीलाई रीत श्रेणी (modal class) भनिन्छ।

(i) व्यक्तिगत श्रेणीको रीत

दिइएको आँकडा 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6 छ।

यी आँकडाहरूमा

1, 3 पटक दोहोरिएको छ।

2, 2 पटक दोहोरिएको छ।

3, 3 पटक दोहोरिएको छ।

4, 1 पटक दोहोरिएको छ ।

5, 2 पटक दोहोरिएको छ ।

6, 4 पटक दोहोरिएको छ ।

सबभन्दा बढी पटक दोहोरिन आएको सङ्ख्या 6 हो । त्यसैले रीत 6 हुन्छ ।

(ii) खण्डित श्रेणीको रीत

यहाँ दिइएको खण्डित श्रेणीलाई हेरौं ।

वस्तुको साइज	10	11	12	13	14	15	16	17
बारम्बारता	2	5	7	9	10	6	4	3

यहाँ सबैभन्दा बढी 10 बारम्बारता 14 को छ । त्यसको अर्थ 14 साइजको सामान पटक पटक अर्थात् सबैभन्दा बढी 10 पटक आएको हुनाले यसको रीत 14 हुन्छ ।

अभ्यास 18.3

1. दिइएको आँकडाबाट मध्यक, मध्यिका र रीत निकाल्नुहोस् :

(क) 23, 22, 20, 25, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 22, 18, 22, 25

(ख) 8, 16, 28, 60, 30, 60, 8, 12, 8

(ग) 110, 105, 100, 150, 250, 175, 225, 275, 110, 150, 100, 110

2. कुनै अस्पतालमा नियमित स्वास्थ्य परीक्षण गर्न आउने 10 जना बच्चाहरूको तौल (kg मा) निम्नानुसार छ : 10, 15, 20, 22, 12, 25, 30, 32, 35, 19

अब माथिका 10 जना बच्चाहरूको औसत तौल (मध्यक, मध्यिका र रीत) निकाल्नुहोस् :

3. 6, 79, x , 12, 14 को औसत मान (मध्यक) 11 भए x को मान कति होला ?

4. यदि $\bar{x} = 20$ छ र $\sum x = 120$ भए कुनै तथ्याङ्कमा कति ओटा आँकडा होलान्, निकाल्नुहोस् ।

5. तलका खण्डित श्रेणी (discrete series) को मध्यक, मध्यिका, रीत, Q_1 र Q_3 निकाल्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	5	6	7	10	9	8
बारम्बारता	2	3	1	2	3	5

तापक्रम ($^{\circ}\text{C}$)	18	17	25	35	37
दिनको सङ्ख्या	12	15	28	25	20

मासिक तलब (रु. सयमा)	100	150	170	180	200
कर्मचारी सङ्ख्या	6	4	10	9	6

6. तलको तथ्याङ्कमा y को मान कति होला जसको मध्यक $\bar{x} = 20.6$ छ ।

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	y	8	5	4

7. तपाईंको विद्यालयमा प्रत्येक कक्षाको क्रमशः आन्तरिक परीक्षा शुल्क र विद्यार्थी सङ्ख्या टिप्नुहोस् । विद्यालयको जम्मा परीक्षा शुल्क, जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या र प्रतिव्यक्ति औसत परीक्षा शुल्क, मध्यमान र रीत निकाल्नुहोस् ।
8. कक्षाका विद्यार्थीहरूलाई दुई समूहमा विभाजन गरौं । प्रत्येकले कक्षा 8 को अन्तिम परीक्षामा गणित विषयमा प्राप्त गरेको अङ्क टिप्नुहोस् । त्यसपछि उचित श्रेणी अन्तरमा आँकडालाई वर्गीकृत गरी बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी हिस्टोग्राम खिच्नुहोस् ।
9. आफ्नो वरिपरि रहेका 6 ओटा घरमा गई 60 वर्ष उमेरभित्रका व्यक्तिहरूको उमेर टिप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

उमेर समूह	व्यक्तिको सङ्ख्या
0-10	
10 - 20	
20 - 30	
30 -40	
40 - 50	
50 - 60	

अब उक्त तालिकाबाट भन्दा कम (बढ्दो क्रम) र भन्दा बढी (घट्दो क्रमका) लागि सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाई एउटै रेखाचित्रमा सञ्चित बारम्बारता वक्र खिचेर देखाउनुहोस् ।

19.0 पुनरावलोकन

एउटा सिक्कामा कति ओटा मोहडा हुन्छन् ?

एउटा डाइस (dice) लाई उफार्दा कुन कुन मोहडाहरू देख्न सकिन्छ ?

खेलने तास (playing cards) हरूमा कुन कुन रङका तासहरू हुन्छन् ?

तासको खेलमा पानको एक्का वा बादशाह आउन सक्ने सम्भावना कति छ ?

मानिसहरूले परापूर्वकालदेखि नै आफ्नो दैनिक जीवनमा घट्ने सक्ने विविध घटनाहरूको अनुमान गर्ने गरेको पाइन्छ। अनुमान गरेका घटनाहरूको परिणाम (outcomes) साँचो वा सत्य भएका खण्डमा खुसी हुने र गलत (नराम्रो) हुँदा दुःखी हुने परम्परा अहिले पनि छ, जुन मानवीय स्वभाव हो। अनुमान गलत या नराम्रो हुँदा थुप्रै दुःखद घटनाहरू घटेका वा भएका कुराहरू हामीमध्ये धेरैले देखे सुनेकै होला। अतः सबैका सबै अनुमान राम्रा वा सत्य नहुन सक्छन्। अनुमानहरू स्वयम् अनिश्चित भविष्यवाणी तथा सम्भावनाहरू हुन्। यही अनिश्चित सम्भावना नै सम्भाव्यता (probability) हो। जस्तै: आज आकाशमा बादल देखिन्छ, पानी पर्ने सम्भावना छ, छाता बोक्नुपर्ला। यहाँ पानी पर्ने सम्भावनाको कुरा अनुमान मात्र हो। पानी पर्ने निश्चितता छैन। त्यसैले आकाशमा देखिने बादल पानी पर्ने सम्भाव्यताको सङ्केत हो। हाम्रो दैनिक जीवनमा सम्भाव्यता शब्द व्यापक रूपले प्रयोग भइरहेको छ। साधारणतया पछि हुन सक्ने अनिश्चित घटनाहरूको व्याख्या विश्लेषण गर्न प्रयोग गरिने तथ्याङ्क शास्त्रलाई नै सम्भाव्यता भनिन्छ।

19.1 सम्भाव्यतामा प्रयोग हुने केही परिभाषित शब्दहरू

1. परीक्षण (Experiment)

सामान्यतया कुनै पनि घटनाको सम्भाव्यताका लागि के के परिणामहरू आउन सक्छन् भनी हेर्न गरिने क्रियाकलापलाई नै परीक्षण भनिन्छ। परीक्षणका उदाहरणहरू के के हुन सक्छन्, कक्षामा छलफल गर्नुहोस्।

2. यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)

कुनै पनि परीक्षणको नतिजा पहिले नै यकिनका (निश्चितताका) साथ भन्न नसकिने अवस्थाको परीक्षणलाई यादृच्छिक परीक्षण भनिन्छ। जस्तै : कक्षामा सिक्का, डाइस आदिलाई प्रयोग गरी यादृच्छिक परीक्षणहरू गरी हेरौं।

3. परिणाम (Outcomes)

कुनै पनि परीक्षणमा प्राप्त हुने नतिजालाई नै परिणाम भनिन्छ। जस्तै : एउटा सिक्का उफार्दा अग्र भाग

वा पश्च भागमध्ये जुन देखिन्छ, त्यसलाई सिक्का उफार्दाको परीक्षणको परिणाम मानिन्छ । कक्षा कार्यमा सिक्का र डाइसबाहेक अन्य शैक्षिक सामग्रीहरू के के प्रयोग गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

4. नमुना क्षेत्र (Sample Space)

कुनै परीक्षणमा प्राप्त हुने सबै परिणामहरूको समूहलाई नै नमुना क्षेत्र भनिन्छ । जस्तै : कुनै विद्यार्थीले परीक्षा दिँदा प्राप्त हुन सक्ने परिणामहरू A^+, A, B, C, D , वा E हुन् र यसलाई $S = \{A^+, A, B, C, D, E\}$ ले जनाइन्छ ।

5. घटना (Event)

कुनै परीक्षणबाट प्राप्त हुने नमुना क्षेत्रको उपसमूहलाई घटना भनिन्छ । जस्तै : एउटा सिक्का उफार्दा प्राप्त नतिजा $S = \{H, T\}$ छुन् भने $\{H\}$, $\{T\}$, $\{H, T\}$ सबै घटनाहरू हुन् ।

6. नमुना बिन्दु (Sample Point)

कुनै परीक्षणबाट प्राप्त नतिजाका प्रत्येक परिणाम वा घटनाहरूलाई नमुना बिन्दु भनिन्छ । जस्तै : डाइसलाई पल्टाउँदा प्राप्त हुने नमुना क्षेत्र $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ मा 1, 2, 3, 4, 5 र 6 सबै नमुना बिन्दुका उदाहरणहरू हुन् ।

7. प्रारम्भिक घटना (Elementary Event)

कुनै परीक्षणमा प्राप्त हुने नतिजामा एउटा मात्र घटना छ भने त्यसलाई प्रारम्भिक घटना भनिन्छ । जस्तै : डाइसलाई गुडाउँदा नमुना क्षेत्र $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ मा $\{1\}$, $\{2\}$, आदि प्रारम्भिक घटनाका उदाहरणहरू हुन् ।

8. समान सम्भाव्यताका परिणाम (Equally likely outcomes)

कुनै परीक्षणमा हुन सक्ने घटनाहरूको सम्भाव्यता समान छ भने त्यस्तो परिणामलाई समान सम्भाव्यताका परिणाम भनिन्छ । जस्तै एउटा सिक्का उफार्दा अग्र भाग वा पश्च भाग आउने सम्भाव्यता समान हुन्छ ।

9. अनुकूल परिणाम सङ्ख्या (Number of favourable outcomes)

कुनै परीक्षणमा हुन सक्ने वा घट्न सक्ने आवश्यक सम्भाव्य घटनाहरूको सदस्य सङ्ख्यालाई अनुकूल परिणाम सङ्ख्या भनिन्छ ।

$$\therefore \text{घटनाको सम्भाव्यता } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{m}{n} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम सङ्ख्या}}{\text{सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या}}$$

जस्तै : कुनै एउटा सावर्जनिक विद्यालयका 40 जना विद्यार्थीहरू एस.एल.सी. परीक्षामा सामेल भएका थिए । जसमध्ये 25 जनाले A ग्रेड ल्याउन सफल भए भने 15 जनाले B ग्रेड ल्याउन सफल भए उक्त विद्यार्थीहरू मध्येबाट एक जना विद्यार्थी छानियो भने A ग्रेड ल्याउने विद्यार्थी पर्न सक्ने सम्भाव्यता,

$$P(A) = \frac{\text{A ग्रेड ल्याउने विद्यार्थी सङ्ख्या}}{\text{कुल विद्यार्थी सङ्ख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

त्यस्तै गरी B ग्रेड ल्याउने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

उदाहरण 1

एउटा सिक्कालाई उफार्दा अग्र भाग (head) आउने सम्भाव्यता कति होला ?

समाधान :

यहाँ, सम्भाव्यता क्षेत्र $S = \{H, T\}$

सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या, $n(S) = 2$

अनुकूल परिणाम $E = \{H\}$

अनुकूल परिणाम सङ्ख्या, $n(E) = 1$

अग्र भाग आउनेको सम्भाव्यता, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

अथवा, $P(H) = \frac{1}{2}$

उदाहरण 2

एउटा घनाकार डाइस (dice) उफार्दा घट्न सक्ने घटनाहरूका

आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(i) माथितिर पल्टिन सक्ने घटनाहरूको नमुना क्षेत्र (sample space) लेख्नुहोस् ।

(ii) 3 पल्टिने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान :

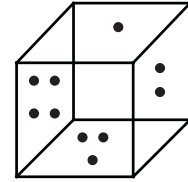
यहाँ, (i) एउटा घनाकार डाइस उफार्दा हुन सक्ने घटनाहरूको नमुना क्षेत्र $(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ हुन्छ ।

$\therefore n(S) = 6$

(ii) एउटा घनाकार डाइसमा 3 एउटा हुन्छ । अर्थात् घटना, $E = \{3\}$ र $n(E) = 1$

$\therefore n(E) = 1$, जुन अनुकूल परिणाम सङ्ख्या हो ।

\therefore 3 पल्टिनेको सम्भाव्यता, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$



उदाहरण 3

एक प्याकेट राम्ररी फिटोको 52 पत्ती तासको समूहबाट एउटा तासको पत्ती तान्दा बादशाह पर्ने सम्भाव्यता कति होला, निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 52$

अनुकूल परिणाम सङ्ख्या वा बादशाह $n(E) = 4$

$$\text{बादशाह पर्ने सम्भाव्यता } P(\text{king}) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$\therefore P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

उदाहरण 4

कुनै दिन आइतबारको दिन पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान :

यहाँ, एक हप्तामा पर्ने बारहरू, $S = \{\text{आइतबार, सोमबार, मङ्गलबार, बुधबार, बिहिबार, शुक्रबार, शनिबार}\}$

$$\therefore n(S) = 7$$

एक हप्तामा एउटा मात्र आइतबार हुन्छ ।

$$\text{घटना } (E) = \{\text{आइतबार}\}$$

$$n(E) = 1$$

$$\therefore \text{आइतबार पर्ने सम्भाव्यता, } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$\therefore P(E) = \frac{1}{7}$$

उदाहरण 5

कुनै बच्चाको जन्मदिन शनिबार पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान :

यहाँ, हप्तामा एउटा शनिबार हुन्छ, $n(E) = 1$, यो अनुकूल परिणाम सङ्ख्या हो ।

एक हप्तामा 7 दिन हुन्छ, $n(S) = 7$, यो सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या हो ।

$$\therefore \text{शनिबार जन्मदिन पर्ने सम्भाव्यता, } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{7}$$

उदाहरण 6

एउटा भोलामा सबै एउटै साइजका 2 ओटा राता, 3 ओटा काला र 4 ओटा हरिया रङ्का गुच्चाहरू छन्। अब, सो भोलाबाट नहेरीकन एउटा गुच्चा निकाल्दा :

- (i) राता गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
(ii) हरिया गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ।

समाधान :

यहाँ, जम्मा गुच्चाको सङ्ख्या, $n(S) = 2 + 3 + 4 = 9$

अर्थात्, सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या, $n(S) = 9$

राता गुच्चाको सङ्ख्या, $n(R) = 2$

∴ अनुकूल सम्भाव्य परिणाम सङ्ख्या, $n(R) = 2$

रातो गुच्चा आउने सम्भाव्यता, $P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{2}{9}$

- (ii) हरिया गुच्चाको सङ्ख्या $n(G) = 4$

अर्थात् अनुकूल परिणाम सङ्ख्या $n(G) = 4$

∴ हरिया गुच्चा आउने सम्भाव्यता $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)}$

$$\therefore P(G) = \frac{4}{9}$$

उदाहरण 7

1 देखि 10 सम्म अङ्कित सबै एउटै साइजका दस ओटा सेता गुच्चाहरू छन्। यदि उक्त गुच्चाहरूका समूहबाट नहेरीकन एउटा निकाल्ने हो भने रूढ सङ्ख्या (prime number) अङ्कित गुच्चाहरू आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान :

यहाँ, सबै एउटै साइजका गुच्चाहरूको सङ्ख्या, $n(S) = 10$

रूढ सङ्ख्या अङ्कित गुच्चाहरू, $E = \{2, 3, 5, 7\}$

$$\therefore n(E) = 4$$

∴ रूढ सङ्ख्या अङ्कित गुच्चा आउने सम्भाव्यता, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

19.2 सम्भाव्यता स्केलको परिचय

क्रियाकलाप 2

एउटा भोला या बाकसमा सबै एउटै साइजका टेबल टेनिस बलहरू रातो, हरियो र सेतो एक एक ओटा राखौं । कक्षामा उपस्थित कुनै एक जना विद्यार्थीलाई नहेरीकन एउटा टेबल टेनिस बल निकाल्न लगाउँदा हुने घटनाहरूका बारेमा कक्षामा छलफल गरौं । सँगै कालो पाटी या सेतो पाटीमा लेख्न एउटा विद्यार्थीलाई जिम्मा दिऔं । ती तिनै रङका एक एक ओटा बलको सम्भाव्यता अलग अलग निकालेपछि सबैको सम्भाव्यता जोड्न लगाऔं । कुल सम्भाव्यता कति हुन्छ ? विद्यार्थीहरूबाटै त्यसको उत्तर खोजौं । छलफल तथा कक्षा क्रियाकलापपछि विद्यार्थीहरूसँग निम्न प्रश्नहरूको जवाफ खोजौं :

(i) प्रत्येक टेबल टेनिस बलको सम्भाव्यता कति कति हुन्छ ?

$$\text{अपेक्षित जवाफ } P(W) = \frac{1}{3}, P(R) = \frac{1}{3}, P(G) = \frac{1}{3}$$

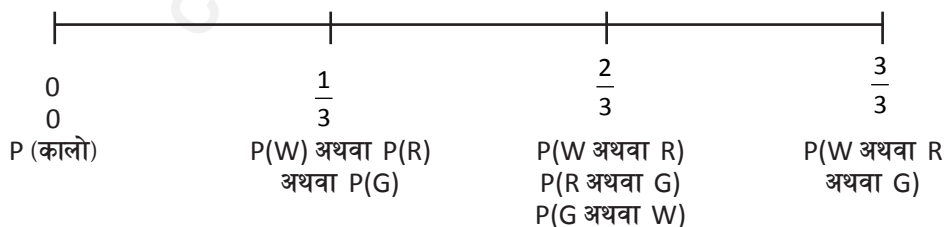
(ii) रातो अथवा सेतोको सम्भाव्यता कति हुन्छ ? अपेक्षित जवाफ $= P(R) + P(W) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

iii) रातो, सेतो वा हरियो टेबल टेनिस बलको सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

$$\begin{aligned} \text{अपेक्षित जवाफ} &= P(W \text{ अथवा } R \text{ अथवा } G) = P(W) + P(R) + P(G) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

(iv) बल निकाल्ने काम कसैबाट पनि भएन भने त्यसको सम्भाव्यता कति हुन्छ ? अथवा कालो बलको सम्भाव्यता कति हुन्छ ? (बाकसमा कालो बल नै नभएकाले त्यसको सम्भाव्यता 0 (शून्य) हुन्छ ।)

(v) माथिका चारै ओटा प्रश्नको जवाफलाई सङ्ख्या रेखामा (number line) मा देखाउन लगाऔं । अपेक्षित जवाफ :



माथिका क्रियाकलापबाट प्राप्त नतिजाको विश्लेषण गर्दा न्यूनतम सम्भाव्यता शून्य र अधिकतम सम्भाव्यता 1 हुन्छ । तसर्थ सम्भाव्यताको स्केल शून्यदेखि एकसम्म हुन्छ । अर्थात् $0 \leq P \leq 1$

अथवा, $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ (3 ओटा घटनाहरूको परीक्षणबाट)

अथवा, $0 < \frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < 1$ (4 ओटा घटनाहरूको परीक्षणबाट)

द्रष्टव्य : सम्भाव्यता शून्यभन्दा तल र एकभन्दा माथि हुन सक्दैन । यसरी सम्भाव्यता मापन गर्दा 0 देखि 1 सम्मको स्केल प्रयोग गरिन्छ जसलाई सम्भाव्यताको स्केल (probability scale) भनिन्छ । यदि कुनै परिणाम आउने सम्भाव्यता $P(E)$ हो भने सो परिणाम नआउने सम्भाव्यता $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ हुन्छ ।

उदाहरण : 8

हरियो, पहेँलो र कालो बराबर भागमा रङ्गयाइएका स्पिनरको बिचमा रहेको एउटा सुइरो घुमाउँदा हरियोमा अड्ने सम्भावना कति हुन्छ ? हरियोमा नअड्ने सम्भावना कति हुन्छ ?

समाधान :

यहाँ, स्पिनर (spinner) मा जम्मा 3 भाग छन् : हरियो, पहेँलो र कालो ।



∴ जम्मा सम्भाव्यता परिणाम सङ्ख्या, $n(S) = 3$

हरियो भाग एउटा मात्र छ, तसर्थ अनुकूल परिणाम सङ्ख्या, $n(E) = 1$

∴ हरियोमा अड्ने सम्भावना $(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

हरियोमा नअड्ने सम्भावना, $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

19.3 प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (Empirical Probability)

हामीलाई थाहा छ, एउटा सिक्का उफार्दा अग्र भाग आउने सम्भाव्यता $\frac{1}{2}$ हुन्छ । अर्थात् $P(H) = \frac{1}{2}$ र त्यसको पूरक (complement), $P(T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ हुन्छ । यस सिद्धान्तको आधारमा गणना गर्ने हो भने कुनै एउटा सिक्कालाई 10 पटक उफार्दा अग्र भाग आउने सम्भावना $10 \times \frac{1}{2} = 5$ हुनुपर्ने देखिन्छ । व्यावहारिक रूपमा परीक्षण गर्दा त्यसभन्दा भिन्नै प्रकारको परिणाम निस्कन सक्छ । यसरी व्यावहारिक रूपले गरेको परीक्षणबाट निकाल्ने सम्भाव्यतालाई प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (empirical probability) भनिन्छ । अर्थात् प्रयोगमा आधारित भएर सम्भाव्यता निकाल्ने पद्धति वा प्रक्रियालाई नै प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता भनिन्छ । प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता निकाल्दा निम्नानुसारको सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (Empirical Probability) = $\frac{\text{परीक्षणबाट प्राप्त अनुकूल परिणाम सङ्ख्या}}{\text{कुल परीक्षण सङ्ख्या}}$

उदाहरण : 9

एउटा सिक्कालाई 50 पटक उफार्दा आएका घटनाहरूको विवरण तलको तालिकामा दिइएको छ :

परीक्षणबाट प्राप्त परिणाम (E)	अग्र भाग (H)	पृष्ठ भाग (T)
परीक्षण सङ्ख्या (बारम्बारता = f)	23	27

अग्र भाग (H) र पश्च भाग (T) आउने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता कति कति हुन्छ ?

समाधान : यहाँ जम्मा परीक्षण सङ्ख्या $n(S) = 50$, अग्र भाग आएको पटक $n(H) = 23$, पश्च भाग आएको पटक $n(T) = 27$

अतः प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता, $P(H) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{23}{50}$ हुन्छ भने $P(T) = \frac{n(T)}{n(S)} = \frac{27}{50}$ हुन्छ ।

उदाहरण : 10

एउटा मिनी ट्रकबाट 2000 (दुई हजार) ओटा इँटा खसाल्दा इँटा फुट्ने सम्भाव्यता 0.1 छ भने नफुट्ने इँटाको सङ्ख्या कति हुन्छ होला ?

समाधान :

यहाँ, कुल इँटाको सङ्ख्या, $n(S) = 2000$

फुट्ने इँटाको सम्भाव्यता, $P(E) = 0.1$

नफुट्ने इँटाको सम्भाव्यता, $P(\bar{E}) = 1 - 0.1 = 0.9$

\therefore नफुट्ने इँटाको सङ्ख्या = $n(S) \times P(\bar{E})$
 $= 2000 \times 0.9 = 1800$

अभ्यास 19

- राम्ररी फिटेको 52 पत्ती तासको समूहबाट एउटा पत्ती तान्दा एक्का पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा डाइसलाई स्वतन्त्र रूपमा उफार्दा 2 अङ्कित अनुहार (face) आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? साथै 3 अङ्कित आउने सम्भाव्यता पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एक जना महिलाले आइतबार बच्चा जन्माउने सम्भावना कति हुन्छ ?
- एउटा भोलामा सबै एउटै साइजका 2 ओटा निला गुच्चा, 3 ओटा काला र 5 ओटा राता गुच्चाहरू हुन्छ ? । यदि नहेरीकन सो भोलाबाट एउटा गुच्चा निकाल्ने हो भने कालो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? साथै काला गुच्चा नपर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

5. अङ्क 2 देखि 25 सम्मका सङ्ख्यामा अङ्कित कागजको पत्ताबाट नहेरीकन एउटा पत्ता तान्दा 3 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्या भएको पत्ता आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? साथै जोर सङ्ख्या अङ्कित पत्ता आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
6. एउटा कक्षामा 50 जना विद्यार्थीहरू मध्ये 28 जना छात्रा छन् भने एक जना विद्यार्थीलाई निबन्ध प्रतियोगितामा भाग लिन छान्दा छात्रा पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
7. कक्षा 9 का 35 जना विद्यार्थीहरू मध्ये 25 जना विद्यार्थीहरूले अङ्ग्रेजी भाषा राम्ररी बोल्न र लेख्न सक्छन् । यदि एक जना विद्यार्थीलाई हाजिर जवाफ प्रतियोगिताका लागि छान्नुपर्‍यो भने राम्ररी अङ्ग्रेजी बोल्न र लेख्न जान्ने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
8. दुई ओटा सिक्का एकसाथ उफार्दा आउने नमुना क्षेत्रका आधारमा निम्न प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :
- (a) दुवै अग्र भाग आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (b) दुवै पश्च भाग आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (c) एउटा पश्च भाग र अर्को अग्र भाग आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
9. एउटा घनाकार डाइस उफार्दा आउन सक्ने परिणामहरूको नमुना क्षेत्र बनाइ तलका सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् :
- (a) 5 अङ्कित अनुहार पल्टने
- (b) जोर अङ्क अङ्कित अनुहार आउने
- (c) बिजोर अङ्क अङ्कित अनुहार आउने
10. एउटा घनाकार डाइसलाई 60 पटक उफार्दा प्राप्त परिणामहरू तलका तालिकामा दिइएको छ ।
- | परिणाम (Event) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------|---|---|----|----|----|---|
| बारम्बारता (f) | 8 | 9 | 13 | 15 | 11 | 4 |
- निम्न परिणाम आउने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (empirical probabiltiy) निकाल्नुहोस् :
- (a) 4 आउने
- (b) 5 भन्दा ठुलो आउने
- (c) 3 भन्दा सानो आउने
- (d) 7 भन्दा सानो आउने
11. एउटा अस्पतालमा 100 जना जन्मिएका शिशुहरू मध्ये 35 जना शिशुहरू छोरी जन्मिएका रहेछन् भने छोरा जन्मिने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

Curriculum Development Centre

उत्तर माला

अभ्यास 1.1

- 1.(i) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8} (ii) {2, 6, 8} (iii) {4, 9, 10} (iv) {1, 3, 4, 5, 7, 9, 10}
(v) {1, 3, 4, 5, 7, 9, 10} (vi) {1, 3} (vii) {1, 2, 3, 6, 8} (viii) {2, 5, 6, 7, 8}

भेन चित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) (i) {b, e, i, k} (ii) {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}
(iii) {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k} (iv) {b, e, i, k}

(ख) (i) र (iv) अनि (ii) र (iii) बराबर समूहहरू हुन् ।

- (ग) (i) {b, e, g, h, i, j, k} (ii) {a, b, c, d, e, f, j, k} (iii) {a, c, d, f} = A

भेन चित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) (i) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 17, 18, 19} (ii) {3, 6, 9, 18}
(iii) {4, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 20}
(iv) {4, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 20} (v) {2, 5, 7, 11, 13, 17, 19} (vi) \emptyset
(vii) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 17, 18, 19}

(ख) (i) र (vii) अनि (iii) र (iii) बराबर समूहहरू हुन् ।

अभ्यास 1.2

1. $n(V) = 4$, $n(W) = 3$, $n_0(V) = 2$, $n_0(W) = 1$, $n(V \cap W) = 5$, $n(V \cup W) = 2$
2. 37
3. 108
4. (i) 12 (ii) 6 (iii) 14 (iv) 1 (v) 6 (vi) 6 (vii) 0 (viii) 2

भेन चित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. 44
6. (i) 45 (ii) 135 (iii) 60 (iv) 195

भेन चित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

7. (i) भेन चित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ii) 15% (iii) 25% 8. 200 9. 220 10. (i) 100 (ii) 1600

अभ्यास 2.1

1. (क) रु= 125, 25% (ख) रु.30, 10% (ग) रु. 24, 20% (घ) रु. 57.5, रु.7.5 (ङ) रु.50, 20%
2. (क) नाफा . रु.20 (ख) रु.100
3. (क) रु.18, 20% (ख) रु. 8
4. (क) रु. 57 (ख) रु. 13.88

5. (क) र. 828 (ख) र. 15

6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.1

1. (क) र. 2,40,000 (ख) र.10,00,000 (ग) र. 2,40,000 (घ) र. 25,00,000

2. (क) र. 29,000 (ख) (i) र. 51,000 (ii) र. 52 लाख

3. (क) 1.5% (ख) 5%

4. (क) र.6,000 (ख) र.16,500 (ग) र.37,000 (घ) र.80,000

अभ्यास 3.2

1. (क) र. 65, र.1235 (ख) र.1.60, र.78.40 (ग) र. 22.5, र.127.50 (घ) र.14.40, र.165.60 (ङ) र.140, र.560

2. (क) र. 40, 10% (ख) र.24, 8% (ग) र.21, 2% (घ) र. 12, 1%

3. (क) र. 960 (ख) र.375

4. (क) र. 550 (ख) र.18,000

अभ्यास 3.3

1. (क) र. 1326 (ख) र.4680 (ग) र.7410 (घ) र. 1435.20

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.4

1. (क) र.1,84,00,000, र.73.6 (ख) र. 61,25,000, र.53.75 (ग) र.1,44,00,000, र.57.60

(घ) र.97,30,000, र.44.22 (ङ) र. 25,50,000, र.10.62

2. (क) र. 1500 (ख) र.1500

अभ्यास 4.1

1. (क) 75 (ख) भाद्र (ग) असोज (घ) 460

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4.2

1. (क) 1446 (ख) र.43.38 (ग) र.144.60

2. (क) र. 59616 (ख) र. 57827.52 (ग) र.89424

अभ्यास 4.3

1. (क) 337 (ख) र. 362 (ग) र.398.20 (घ) र.449.96

2. (क) 550 (ख) 755

3. ₹. 839.02
 4. (क) 215 (ख) 400 (घ) 750

अभ्यास 4.4

1. (क) ₹. 280.40 (ख) ₹. 345.20
 2. (क) 287.40 (ख) ₹. 427.20 (ग) ₹. 721.95 (घ) ₹. 276.30
 3. (क) 2 km (ख) 10 km

अभ्यास 5.1

1. (क) 21cm², 18.5 cm (ख) 13.5 sq inch, 18 inch (ग) 16.45 cm², 16.44 cm
 2. (क) 40.75 cm² (ख) 15 inch² (ग) 9.14 inch²
 3. 456 m² 4. 1100 sq ft 5. 1320 m² 6. 480 ft²
 7. (a) 425m² b)1700 8. 261m² 9. a) 624 m² b) 1560 ओटा
 c) 11,700 10. a) 480 cm² b) ₹. 2,46,000
 11. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.2

1. (क) 6,750 (ख) 5,175 (ग) ₹. 50,400 (घ) 1,73,760
 2. 8.33 m 3. (क) 4500m² (ख) 7563 m² (ग) 9,000 (घ) 18,000
 (ङ) ₹. 23,85,345 4. 3 m 5. (क) 1800 (ख) ₹. 405,000
 6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.1

1. (क) 288 cm² (ख) 702.16 cm² (ग) 1920m² (घ) 576 cm²
 (ङ) 1193.72 cm² (च) 2550 cm²
 2. (i) 88 cm² (ii) 30 cm² 3. 672 cm²
 4. (क) 36 cm², 216 cm², 324 cm³ (ख) 165.48 cm², 376.2 cm², 1092.168cm³
 (ग) 276m², 1176 m², 3312 m³ (घ) 96 cm², 384 cm², 768 cm³
 (ङ) 289.53 cm², 614.66 cm², 2113.569 cm³ (च) 300 cm², 1950 cm², 4500cm³
 5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् 6. 180 cm³ 7. 90,000 लिटर 8. 1000cm³ 9. 150m²
 10. 6 cm
 11., 12. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.2

- 3.2 m³ 3,60,000 ओटा
- 1,00,000 ओटा
- 45 दिन
- 10,00,000
- 4 ft 7. ₹ 8740 9. ₹ 4590 9. 0.009 m³
10. 5 m 11. 21 लाख 12. ₹ 3000 13. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 7.1

- $(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)$
- $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
- $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - xxy + 2y^2)$
- $(9x^2 + 12xy + 8y^2)(9x^2 - 12xy + 8y^2)$
- $(8x^2 + 4xy + y^2)(8x^2 - 4xy + y^2)$
- $(x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 1)$
- $(x^2 + 3x + 2y^2)(x^2 - 3x + 2y^2)$
- $(7x^2 + 14xy + 3y^2)(7x^2 - 14xy + 3y^2)$
- $(5a^2 + 2ax - 3x^2)(5a^2 - 2ax - 3x^2)$
- $(16a^2 + 15ax + 7x^2)(16a^2 - 15ax + 7x^2)$
- $(35x^2 + 23xy + 8y^2)(35x^2 - 23xy + 8y^2)$
- $(45x^2 + 65xy + 49y^2)(45x^2 - 65xy + 49y^2)$
- $(2a^2 + 3ab + 11b^2)(2a^2 - 3ab + 11b^2)$
- $(2x^2 + 2xy + 3y^2)(2x^2 - 2xy + 3y^2)$
- $(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9)$
- $(x^2 + 1 + 1/x^2)(x^2 - 1/x^2)$
- $(x^2/y^2 + x/y + 1)(x^2/y^2 - x/y + 1)$
- $(x^2/y^2 + 1 + y^2/x^2)(y^2/x^2 - 1 + y^2/x^2)$
- $(x^2 - y + 3)(x^2 - y - 11)$
- $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 7)$
- $(x^2 + y - 14)(x^2 - y + 2)$
- $(x^2 + 3y^2 - 6)(x^2 - 3y^2 + 2)$
- $(x - 2y + z)(x - 8y - z)$
- $(65x^2 - 9y^2 + 1)(65x^2 + 9y^2 - 3)$
- $(x - 40y + 55z)(x - 50y - 55z)$
- $(13x + 14y)(13x - 14y - 4)$
- $(65x + y + z)(65x - 3y - z)$
- $(17x + 19y + 6)(17x - 19y + 4)$
- $30.(x + 29y + z)(x + 21y - z)$

अभ्यास 8.1

- (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 343 (v) 3125 (vi) 1296
(vii) 1/8 (viii) 8 (ix) 1 (x) 8/27 (xi) 125/216 (xii) 3/4
- (i) $9xy^2$ (ii) $85y^2/x^2$ (iii) $6x^2y^3$ (iv) 1 (v) $1/xa+b+c$ (vi) $x(a+b+c)^2$
(vii) $xb(c-a)$ (viii) 1 (ix) 1 (x) 1
- (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) $x^2(a^3+b^3+c^3)$ (v) 1
(vi) 1 (vii) 1 (viii) $a^2(x^3+y^3+z^3)$ (ix) 1 (x) 1

अभ्यास 8.2

- x = 4 2. x = 1 3. x = 1.5 4. x = -3 5. x = 3 6. x = 1 7. 0
- x = 1 9. x = 1, 0 10. x = 1, -1

अभ्यास 9.1

1. 5:8 2. 27:31 3. 3:10 4. a:b=25:9 5. a:b=3:2 6. a:b=3:2
7. a = 45, b = 35 8. a =45, b =65 9. बाबुको उमेर 75 वर्ष र छोराको उमेर 45 वर्ष
10. छोरीको उमेर 15 वर्ष र आमाको उमेर 45 वर्ष 11. 48 वर्ष र 60 वर्ष
12. कन्ये च्याउको मूल्य रु. 100 र गोब्रे च्याउको मूल्य रु.300 13. 378 र 432 14. 108 र 84 15. 48 र 30

अभ्यास 10.1

- क) 1. $x=2, y=1$ 2. $x=3, y=3$ 3. $x=5, y=2$ 4. $x=5, y=6$ 5. $x=4, y=3$
6. $x=6, y=5$ 7. $x=2, y=1$ 8. $x=2, y=3$ 9. $x=2, y=11$ 10. $x=5, y=3$
ख) 1. $x=2, y=3$ 2. $x=3, y=2$ 3. $x=-1, y=-3$ 4. $x=1, y=1$ 5. $x=16, y=26$
6. $x=4, y=3$ 7. $x=12, y=8$ 8. $x=60, y=80$ 9. $x=4, y=4$ 10. $x=3, y=2$
ग) 1. $x=6, y=10$ 2. $x=4, y=3$ 3. $x=6, y=7$ 4. $x=3, y=2$ 5. $x=15, y=10$
6. $x=300, y=150$ 7. $x=250, y=100$ 8. $x=50, y=259$ 9. $x=25, y=20$ 10. $x=110, y=90$
3) $x=350, y=800$ ड) $l=12m, b=4m$

अभ्यास 11.1

1. (i) $x=1, y=-2$ (ii) $x=2,3$ (iii) $x=3,5$ (iv) $x=3,5$
2. (i) $x=0,1$ (ii) $x=0, -1$ (iii) $x=-3, 4$ (iv) $x=-4,5$
(v) $x=-5, -6$ (vi) $x=3,4$ (vii) $x=-5,7$ (viii) $x=6,7$ (ix) $x=7,9$
(x) $x=-35,35$
3. (i) $x=5,5$ (ii) $x=9,9$ (iii) $x=-3,7$ (iv) $x=-5,9$ (v) $x=-7,11$
(vi) $x=13,17$ (vii) $x=2/3, -3/4$ (viii) $x=1/2, 3/2$ (ix) $3/4, 5/4$ (x) $5/3, -7/3$
4. (i) $x=3,7$ (ii) $x=8,9$ (iii) $x=-11,13$ (iv) $13,17$ (v) $x=4,-7$
(vi) $x=-6,11$ (vii) $x=1/7, -3/7$ (viii) $x=17,19$ (ix) (x)

अभ्यास 12.1

1. (क) 30° (ख) $x^\circ = 70^\circ, y^\circ = 40^\circ$ (ग) $x^\circ = 70^\circ, y^\circ = 60^\circ, z = 50^\circ$ घ) $x^\circ = 20^\circ, y = 130^\circ$
ड) $x^\circ = 45^\circ, y^\circ = 135^\circ$ (च) $x^\circ = 105^\circ, y^\circ = 25^\circ$
2. (क) 360° (ख) 540° (ग) 720°

अभ्यास 12.2

1. (क) $x=70$ (ख) $x=110$ (ग) $x=112.5$
2. (क) $x^\circ = 35^\circ, y^\circ = 55^\circ, z^\circ = 55^\circ$ (ख) $x^\circ = y^\circ = z^\circ = 45^\circ, z = 75^\circ$

अभ्यास 12.3

1. (क) i. BC ii. AB iii. $\angle BAC$ iv. $\angle ACB$
(ख) i. BC ii. AB iii. $\angle BAC$ iv. $\angle ACB$

(ग) i. AB ii. AC iii. $\angle ACB$ iv. $\angle ABC$

2. (क) 41cm (ख) होइन (घ) 53 cm

3. (क) सकिन्छ । (ख) 20cm, 12cm (ग) अनगिन्ती

अभ्यास 13.1

1 क) 60° ख) $56^\circ, 62^\circ$ ग) 12, 140 घ) 1 ङ) 8 च) 6

2. क) 50° ख) $52^\circ, 54^\circ$ ग) $60^\circ, 65^\circ$ 3. $72^\circ, 108^\circ$

अभ्यास 13.2

1 क) 4cm, 2.4cm ख) 52°

अभ्यास 15

1. (क) 4.5cm (ख) 8m (ग) 56 फिट

2. (क) 16cm (ख) i. APSD, BQRC र APQB, CDSR ii. 7.5cm

3. (क) 6cm, 9cm (ख) 15cm (ग) 6cm

अभ्यास 16

1. (क) 6cm (ख) 10cm (ग) 31.24cm (घ) 6.7cm

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 17.1

1. (क) (i) $AC, \infty 10$ (ii) को लागि लम्ब BC र आधार AB हो । (iii) θ को लागि लम्ब AB र आधार BC हो ।

$$(ख) (i) \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3},$$

$$(ii) \sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$

2. (i) $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan \alpha = 2$ (ii) $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, $\tan \beta = \frac{4}{3}$

(iii) $\sin \gamma = \frac{3}{5}$, $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, $\tan \gamma = \frac{3}{4}$ (iv) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$

3. (i) $\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ (ii) $\sqrt{1-\cos^2 A}$ (iii) $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$$(iv) \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3} \quad (v) \cos \theta = \frac{4}{5}, (vi) \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (vii) 16$$

अभ्यास 17.2

1. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) 1 (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 1 (vii) $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$ (viii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ix) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ,$
3. (i) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ (ii) 1 (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $2+\sqrt{3}$
4. (i) $\theta=60^\circ$ (ii) $\theta=30^\circ$ (iii) $\theta=45^\circ$ 6.(i) , 4cm, cm 7. 8. 60°

अभ्यास 18.1

1. तालिका शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. तालिका शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
3. (क) रु. 4500 (ख) शैक्षिक सामग्रीमा रु.750, यातायातमा रु. 600 (ग) मासिक पढाइ शुल्कमा प्रश्न नं 4 देखि 8 सम्मको उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 18.2

भन्दा कम (ogive)	
वर्षा (mm)	भन्दा कम c.f.
20भन्दा कम	5
30 भन्दा कम	10
40 भन्दा कम	20
50 भन्दा कम	40
60 भन्दा कम	60
70 भन्दा कम	65

भन्दा कम (ogive)	
वर्षा (mm)	भन्दा बढी c.f.
10 भन्दा बढी	60
20 भन्दा बढी	55
30 भन्दा बढी	50
40 भन्दा बढी	40
50 भन्दा बढी	20
60 भन्दा बढी	5

2. (क)

तौल (kg)	मिलान चिह्न	बारम्बारता
10 – 20		12
20 – 30		12
30 – 40		5
40- 50		1

(ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 18.3

1. (क) मध्यक $(\bar{X}) = 21.14$, मध्यिका $(M_d) = 22$, रीत $(M_o) = 22$
(ख) मध्यक $(\bar{X}) = 25.56$, मध्यिका $(M_d) = 16$, रीत $(M_o) = 8$
(ग) मध्यक $(\bar{X}) = 155$, मध्यिका $(M_d) = 150$, रीत $(M_o) = 110$
2. (क) मध्यक $(\bar{X}) = 22$, मध्यिका $(M_d) = 21$,
3. $x = 18$,
4. $N = 60$
5. (क) मध्यक $(\bar{X}) = 7.63$, मध्यिका $(M_d) = 8$, रीत $(M_o) = 8$, $Q_1 = 6$, $Q_3 = 9$
(ख) मध्यक $(\bar{X}) = 27.86$, मध्यिका $(M_d) = 25$, रीत $(M_o) = 25$, $Q_1 = 18$, $Q_3 = 35$
(ग) मध्यक $(\bar{X}) = 163.43$, मध्यिका $(M_d) = 170$, रीत $(M_o) = 170$, $Q_1 = 150$, $Q_3 = 180$
6. $y = 3$

अभ्यास 19

1. $1/13$ 2. $1/1, 1/6$ 3. $1/7$ 4. $1/5, 4/5$ 5. $1/3, 1/2$
6. $14/25$ 7. $5/7$ 8. (a) $1/4$ (b) $1/4$ (c) $1/4$ 9. (a) $1/6$ (b) $1/2$ (c) $1/2$
10. (a) $p(4) = 1/4$ (b) $p(\text{greater than } 5) = 1/4$ (c) $p(\text{less than } 3) = 17/60$ (d) $p(7) = 1$
11. $p(s) = 13/20$

Curriculum Development Centre