गणित

कक्षा ८

Curriculum Development Centre

नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

गणित

कक्षा ८

लेखक
नरहरि आचार्य

प्रकाशक
नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

Curriculum Development Centre

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

ISBN: 978-9937-601-23-8

© **प्रकाशकमा**

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०७२

पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट अभिलेखबद्ध गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

Curriculum Development Centre

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्य पुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीमा राष्ट्र, राष्ट्रिय एकता र लोकतान्त्रिक संस्कारको भावना पैदा गराई नैतिकता, अनुशासन र स्वावलम्बन, सिर्जनशीलता जस्ता सामाजिक एवम् चारित्रिक गुण तथा आधारभूत भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, पेसा व्यवसाय, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण र स्वास्थ्य सम्बन्धी आधारभूत ज्ञान र जीवनोपयोगी सिपको विकास गराउनु जरुरी छ । उनीहरूमा कला र सौन्दर्य, मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श र वैशिष्ट्यहरूको संरक्षण तथा संवर्धनप्रतिको भाव जगाउन आवश्यक छ । समावेशी समाजको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, अपाङ्गता, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रप्रति समभाव जगाउनु र मानव अधिकार तथा सामाजिक मूल्य मान्यताप्रति सचेत भई जिम्मेवारीपूर्ण आचरणको विकास गराउनु पनि आजको आवश्यकता बनेको छ । आधारभूत शिक्षा पाठ्यक्रम (कक्षा ६-८), २०६९ लाई मूल आधार मानी शिक्षा सम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तर्क्रियाका निष्कर्ष र विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषण समेतलाई समेटी यो पाठ्य पुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्य पुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक श्री दिवाकर ढुङ्गेल, प्रा.डा. मीनबहादुर श्रेष्ठ, डा. बालकृष्ण रञ्जित, प्राडा. लेखनाथ शर्मा, सुरेन्द्र आचार्य, वैकुण्ठ खनाल, वरुण वैद्य, विजय बानिया, गोमा श्रेष्ठ, डण्डपाणि शर्मा, हेमराज पोखरेल, जीवराज आचार्य, रमेश अवस्थी, राजेन्द्र देवकोटा, मैना अधिकारी, राजकुमार माथेमा, सरस्वती आचार्यलगायतका महानुभावको विशेष योगदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन हरिप्रसाद निरौला तथा टाइप सेटिङ र लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । यस पाठ्य पुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्य पुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मद्दत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । यस पाठ्य पुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । पाठ्य पुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.सं. २०७२

Curriculum Development Centre

विषय सूची

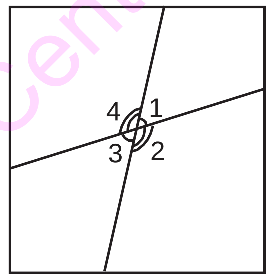
Curriculum Development Centre

पाठ 1

रेखा र कोण (Line and Angle)

1.0 पुनरवलोकन (Review)

क्रियाकलाप 1



एउटा सादा कागजको पाना लेऊ । त्यसलाई एक पटक ठाडोतिर र अर्को पटक तेर्सोतिरबाट छड्के गरी पट्याऊ । त्यसपछि पट्याएको भाग खोल । त्यहाँ चित्रमा देखाए जस्तै दुई ओटा रेखाहरू आपसमा प्रतिच्छेदित देख्ने छौ । अब ती रेखालाई सिसाकलमले तान । त्यहाँ कोणहरू बनेको देख्ने छौ । तिनीहरूलाई क्रमश: 1, 2, 3 र 4 नामकरण गर ।

(क) 1 र 2, 2 र 3, 3 र 4, 4 र 1 कस्ता प्रकारका जोडी कोणहरू हुन् ?

(ख) 1 र 3, 2 र 4 कस्ता प्रकारका जोडी कोणहरू हुन् ? साथीहरूसँग छलफल गर ।

माथि (क) का जोडा कोणहरूमा एउटै शीर्षबिन्दु र एउटा साझा भुजा छ । यस्ता जोडा कोणहरू आसन्न कोणहरू हुन् ।

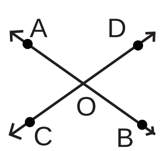
त्यस्तै (ख) मा भएका जोडा कोणहरूमध्ये एउटा कोण अर्को कोणको विपरीत दिशातिर छ । यी कोणहरू शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् ।

दुई सरल रेखाखण्ड आपसमा काट्दा बन्ने जोडी कोणहरूमा उद्गम बिन्दु एउटै र एउटा भुजा साझा छ भने त्यस्ता कोणहरूलाई आसन्न कोणहरू (adjacent angles) भनिन्छ । त्यस्तै यदि एउटा कोण अर्को कोणको विपरीत दिशामा छ भने त्यस्ता जोडी कोणहरूलाई शीर्षाभिमुख कोणहरू (vertically opposite angles) भनिन्छ ।

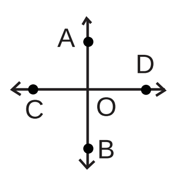
1.1. दुई सरल रेखाहरू आपसमा काट्दा बन्ने जोडी कोणहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण (Experimental Verification of Pair of Angles Formed by Intersecting Two Lines)

परीक्षण 1: आसन्न कोणहरूको योगफल (Sum of adjacent angles)

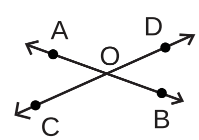
दिइएका चित्रहरूमा सरल रेखा AB र CD बिन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

Curriculum Development Centre

अब, प्रोटेक्टर प्रयोग गरी कोणहरू नाप र तलको तालिकामा भर ।

चित्र नं.	$\angle AOC$	$\angle AOD$	$\angle AOC + \angle AOD$	परिणाम
(क)				
(ख)				
(ग)				

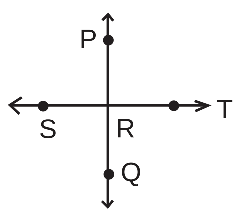
माथिको प्रयोगबाट के निष्कर्ष पायौ ?

यदि दुई ओटा सरल रेखाहरू आपसमा प्रतिच्छेदन भएका छन् भने एक जोडा आसन्न कोणहरूको योगफल 180° वा दुई समकोण हुन्छ ।

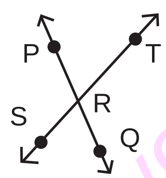
परीक्षण 2: शीर्षाभिमुख कोणहरूको सम्बन्ध (Relation betweens opposite angles)

तल चित्रमा सरल रेखा PQ र ST बिन्दु R मा प्रतिच्छेदन भएका छन् ।

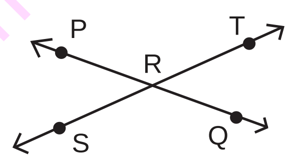
अब, प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी दिइएका कोणहरूको नाप लेऊ र तलको तालिकामा भर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

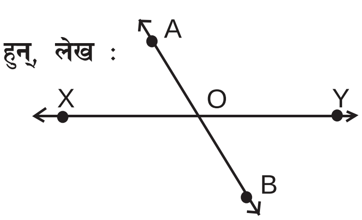
चित्र नं.	$\angle PRS$	$\angle QRT$	$\angle SRQ$	$\angle PRT$	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ, आआफ्नो कापीमा लेख ।

दुई ओटा सरल रेखाहरू आपसमा प्रतिच्छेदित हुँदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू (vertically opposite angles) बराबर हुन्छन् ।

उदाहरण 1

तल दिइएको चित्रमा निम्न लिखित जोडी कोणहरू कस्ता कोणहरू हुन्, लेख :



(क) $\angle XOB$ र $\angle BOY$ (ख) $\angle AOY$ र $\angle XOB$

(ग) $\angle BOX$ र $\angle AOX$ (घ) $\angle AOX$ र $\angle BOY$

Curriculum Development Centre

समाधान

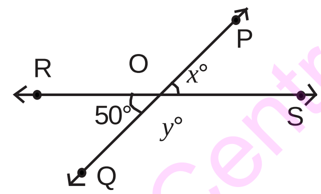
यहाँ सरल रेखाहरू AB र XY बिन्दु O मा काटिएका छन् ।

(क) ∠XOB र ∠BOY आसन्न कोणहरू हुन् । (ख) ∠AOY र ∠XOB शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् ।

(ग) ∠BOX र ∠AOX आसन्न कोणहरू हुन् । (घ) ∠AOX र ∠BOY शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन् ।

उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा x र y को मान पत्ता लगाऊ ।



समाधान

यहाँ ∠ROQ = 50°

∠ROQ = ∠POS (शीर्षाभिमुख कोणहरू)

∴ x = 50°

फेरि x + y = 180° (आसन्न कोणहरूको योगफल = 180° हुन्छ ।)

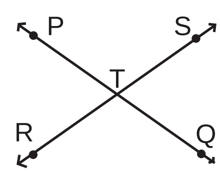
अथवा, 50° + y = 180°

अथवा, y = 180° - 50° = 130°

∴ y = 130°

अभ्यास 1.1

1. तल दिइएका कोणहरूमध्ये कुन कुन कोणहरू आसन्न कोणहरू हुन् र कुन कुन शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन्, लेख :

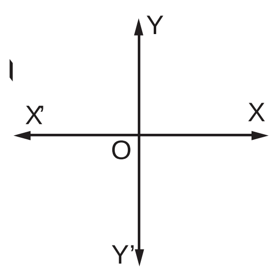


(क) ∠PTS र ∠STQ (ख) ∠PTR र ∠STQ

(ग) ∠PTS र ∠RTQ (घ) ∠PTS र ∠PTR

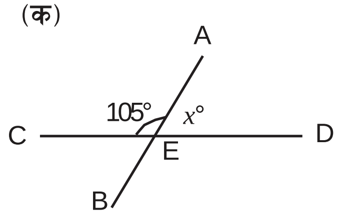
(ङ) ∠RTQ र ∠QTS

2. सँगैको चित्रमा रेखाहरू XX' र YY' बिन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन् । अब चित्रबाट 4 जोडा आसन्न कोण र दुई जोडा शीर्षाभिमुख कोणहरूको सूची बनाऊ ।

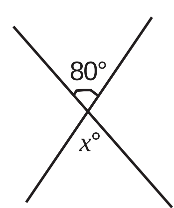


3. तल दिइएका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ :

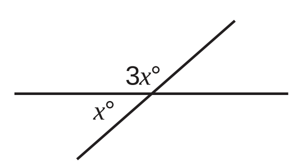
(क)



(ख)



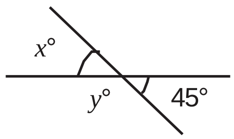
(ग)



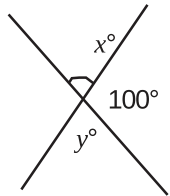
Curriculum Development Centre

4. **तल दिइएका चित्रहरूमा x र y को मान पत्ता लगाऊ :**

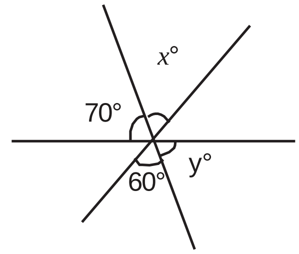
(क)



(ख)

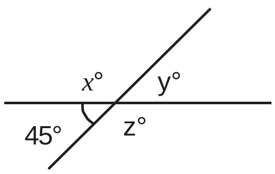


(ग)

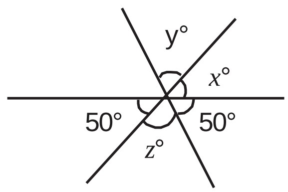


5. **दिइएका चित्रहरूमा x, y र z कोणहरूको मान पत्ता लगाऊ :**

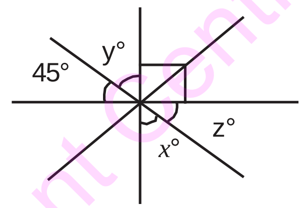
(क)



(ख)

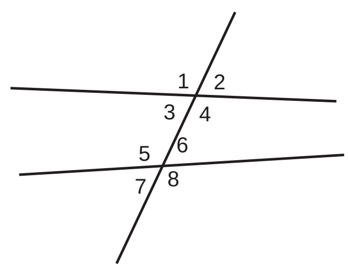


(ग)



1.2. दुई ओटा सरल रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने कोणहरू (Angles formed by a Transversal with two Straight Lines)

सँगैको चित्रमा दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटेको छ । तलका प्रश्नहरूबारे साथीहरूसँग छलफल गर :



- कति ओटा कोणहरू बनेका छन् ?
- कुन कुन कोणहरू बाहिरी कोण हुन् ?
- कुन कुन कोणहरू भित्री कोणहरू हुन् ?

यहाँ $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ र $\angle 8$ बाहिरी कोणहरू हुन् भने $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ र $\angle 6$ भित्री कोणहरू हुन् ।

(क) एकान्तर कोणहरू (Alternate Angles)

माथिको चित्रमा $\angle 3$ र $\angle 6$ लाई हेर ।

$\angle 3$ र $\angle 6$ छेदकको दुवैतिर परेका छन् र दुवै भित्री अनासन्न कोणहरू हुन् । तसर्थ यी कोणहरूलाई एकान्तर कोणहरू भनिन्छ ।

यस्तै अर्को जोडी कोणहरू कुन कुन होलान् ?

दुई सरल रेखालाई छेदकले काट्दा छेदकको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरूलाई एकान्तर कोणहरू (alternate angles) भनिन्छ ।

माथि चित्रमा दिइएका $\angle 3$ र $\angle 6$; $\angle 4$ र $\angle 5$ एकान्तर कोणहरू हुन् ।

Curriculum Development Centre

(ख) **सङ्गत कोणहरू (Corresponding Angles)**

माथिको चित्रमा $\angle 1$ र $\angle 5$ लाई हेरौँ ।

दुवै कोणहरू छेदकको एकैतिर परेका छन् । $\angle 1$ बाहिरी कोण हो भने $\angle 5$ भित्री कोण हो । तसर्थ $\angle 1$ र $\angle 5$ लाई सङ्गत कोणहरू भनिन्छ । माथि चित्रमा कति जोडी सङ्गत कोण होलान् ? लेख ।

दुई सरल रेखालाई छेदकले काट्दा छेदकको एकैतिर परेका एउटा भित्री र अर्को बाहिरी अनासन्न कोणहरूलाई सङ्गत कोणहरू (corresponding angles) भनिन्छ ।

माथि चित्रमा दिइएका $\angle 1$ र $\angle 5$; $\angle 2$ र $\angle 6$; $\angle 3$ र $\angle 7$; $\angle 4$ र $\angle 8$ सङ्गत कोणहरू हुन् ।

(ग) **क्रमागत भित्री कोणहरू (Co-interior Angles)**

माथिको चित्र हेरौँ । $\angle 3$ र $\angle 5$ कस्ता जोडी कोणहरू हुन् ?

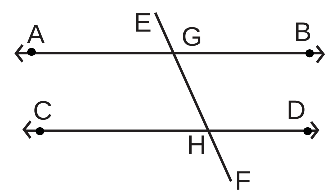
दुवै भित्री अनासन्न कोणहरू हुन् र दुवै छेदकको एकैतिर परेका छन् । यिनीहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू भनिन्छ ।

दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने छेदकको एकैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू (co-interior angles) भनिन्छ ।

माथिको चित्रमा $\angle 3$ र $\angle 5$; $\angle 4$ र $\angle 6$ क्रमागत भित्री कोणहरू हुन् ।

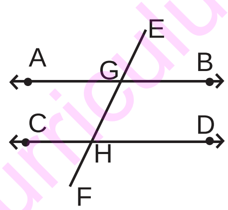
1.2.1 दुई ओटा समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने कोणहरूको सम्वन्ध

यदि चित्रमा AB र CD समानान्तर रेखाहरू भए माथि प्रस्तुत गरिएका जोडी कोणहरूको सम्बन्ध कस्तो होला तलका परीक्षणहरूबाट हेरौँ ।

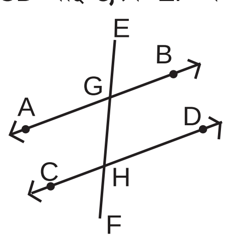


परीक्षण 1 : एकान्तर कोणहरूको सम्बन्ध

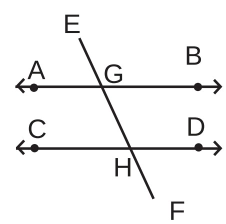
चित्रमा दुई ओटा समानान्तर रेखाहरू AB र CD लाई छेदक EF ले क्रमशः बिन्दु G र H मा काटेको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब तल तालिकामा दिइएका कोणहरू प्रोटेक्टरको प्रयोग गरेर नाप र तालिकामा भर :

चित्र नं.	$\angle$AGH	$\angle$GHD	परिणाम	$\angle$BGH	$\angle$GHC	परिणाम
(क)						
(ख)						
(ग)						

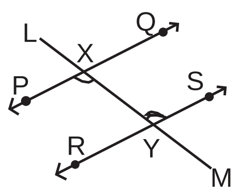
Curriculum Development Centre

- माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ ?
- दिइएका जोडी कोणहरू कस्ता प्रकारका कोणहरू हुन्, साथीहरूसँग छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाऊ ।

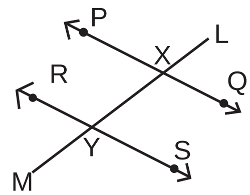
दुई ओटा समानान्तर रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बनेका एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 2 : क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल

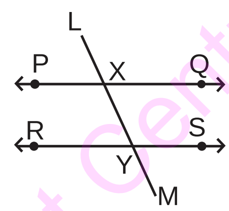
दिइएको चित्रमा दुई ओटा समानान्तर रेखाहरू PQ र RS लाई छेदक LM ले क्रमश: विन्दु X र Y मा काटेको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब, प्रोटेक्टरको सहायताले तल दिइएका कोणहरूको नाप र तालिकामा भर :

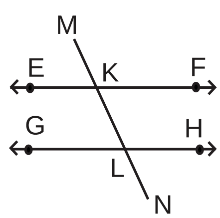
चित्र नं.	∠PXY	∠XYR	∠PXY + ∠XYR	∠QXY	∠XYS	∠QXY + ∠XYS	परिणाम
(क)							
(ख)							
(ग)							

- माथिको तालिकामा भएका जोडा कोणहरू कस्ता प्रकारका कोणहरू हुन् ?
- जोडी कोणहरूको योगफल कति भयो ?
- यो परीक्षणको निष्कर्ष के होला, सँगैको साथीसँग छलफल गर ।

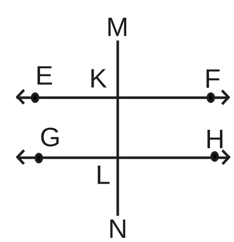
दुई समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल 180° वा दुई समकोण हुन्छ ।

परीक्षण 3 : सङ्गत कोणहरूको सम्बन्ध

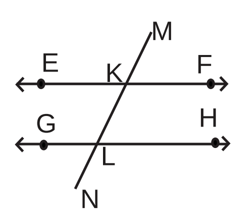
तलका चित्रहरूमा दुई समामान्तर रेखाहरू EF र GH लाई छेदक MN ले क्रमश: बिन्दु K र L मा काटेको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

Curriculum Development Centre

प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी तल तालिकामा दिइएका कोणहरू नाप र तालिकामा भर :

चित्र नं.	∠MKE	∠KLG	∠MKF	∠KLH	∠EKL	∠GLN	∠FKL	∠HLN	परिणाम
(क)	55°	55°							
(ख)	90°	90°							
(ग)	140°	140°							

माथिको तालिकामा कस्ता प्रकारका जोडी कोणहरू छन् ?

माथिको परीक्षणबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ, निष्कर्ष लेखी साथीहरूबिच छलफल गर ।

दुई समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

माथिका परीक्षणहरूबाट हामीले निम्न लिखित कुराहरू पनि थाहा पाउन सक्छौँ :

दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने,

- एकान्तर कोणहरू बराबर भएमा
- क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल 180° भएमा वा
- सङ्गत कोणहरू बराबर भएमा

ती दुई सरल रेखाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

उदाहरण 1

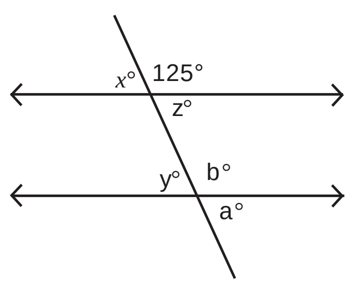
सँगैको चित्रमा दुई ओटा समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काटेको छ । जसमा a, b x, y, z को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ $x + 125° = 180°$ (आसन्न कोणहरू)

अथवा, $x = 180° – 125°$

अथवा, $x = 55°$



फेरी, $x = y$ (सङ्गत कोणहरू)

अथवा, $y = x = 55°$

चित्रअनुसार, $y = z = 55°$ (एकान्तर कोणहरू)

$\therefore z = 55°$

$z + b = 180$ (क्रमागत भित्री कोणहरू)

$55° + b = 180°$

$\therefore b = 180° - 55° = 125°$

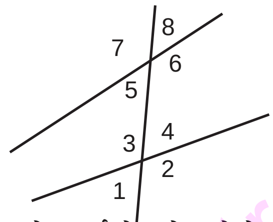
अन्त्यमा $z = a$ (सङ्गत कोणहरू)

$\therefore a = 55°$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 1.2

1. सँगैको चित्रमा दुई ओटा सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटेको छ । उक्त चित्रबाट निम्न लिखित जोडा कोणहरूको सूची तयार पार :



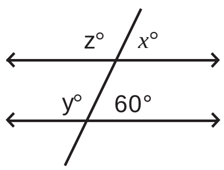
(क) बाहिरी कोणहरू (ख) भित्री कोणहरू

(ग) एकान्तर कोणहरू (घ) क्रमागत भित्री कोणहरू

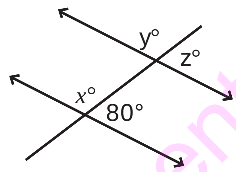
(ङ) सङ्गत कोणहरू

2. **तल दिइएका चित्रहरू x, y र z को मान पत्ता लगाऊ (दुई ओटा समानान्तर रेखालाई छेदकले काटेको छ) :**

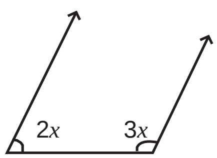
(क)



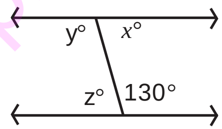
(ख)



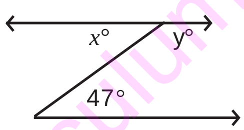
(ग)



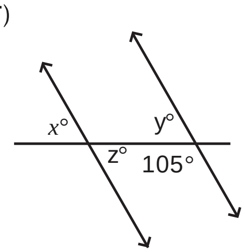
(घ)



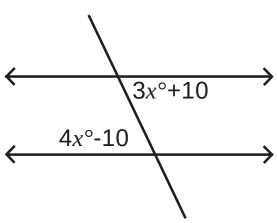
(ङ)



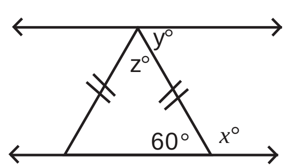
(च)



(छ)



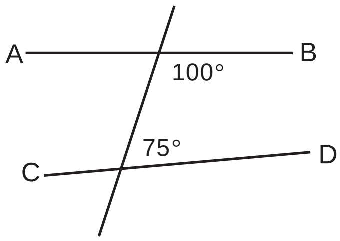
(ज)



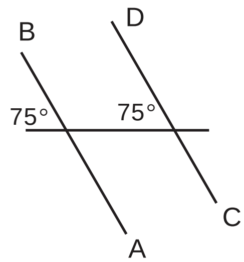
Curriculum Development Centre

3. **कोणहरूको नापका आधारमा तलका दुई रेखाहरू AB र CD आपसमा समानान्तर छन् वा छैनन्, कारणसहित लेख :**

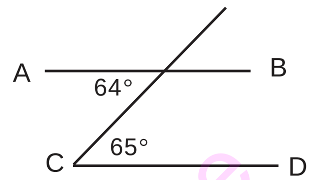
(क)



(ख)

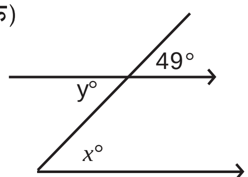


(ग)

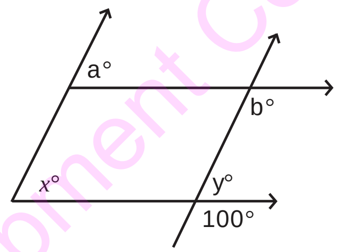


4. **तल दिइएका चित्रहरूमा a, b, c, x, y, z को मान पत्ता लगाऊ :**

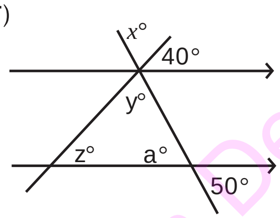
(क)



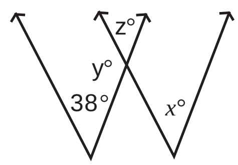
(ख)



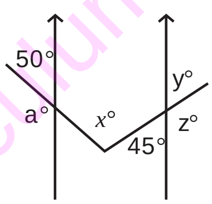
(ग)



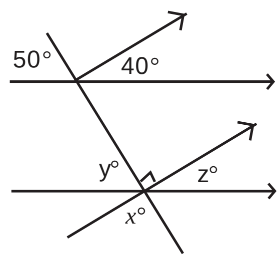
(घ)



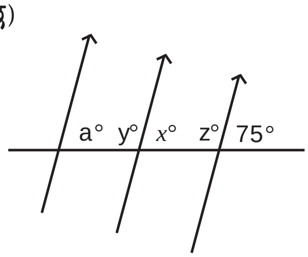
(ङ)



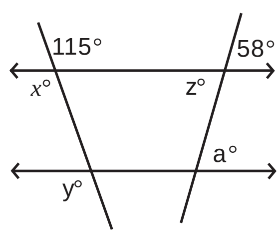
(च)



(छ)



(ज)

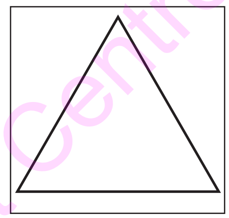


Curriculum Development Centre

पाठ 2 त्रिभुज, चतुर्भुज र बहुभुजहरू

(Triangle, Quadrilateral and Polygons)

2.0. पुनरवलोकन (Review)

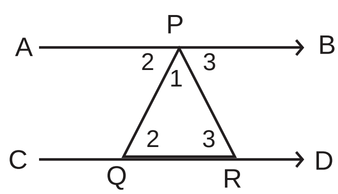


कम्तीमा कति ओटा सिधा सिन्काहरू प्रयोग गरेर बन्द आकृति बनाउन सकिएला ? दुई ओटाबाट सम्भव छ वा तिन ओटा नै चाहिन्छ, तिन ओटा सिधा रेखाखण्डहरूले बनेको बन्द आकृतिलाई त्रिभुज भनिन्छ । तिन ओटा भुजाहरूमध्ये सबै बराबर छन् भने उक्त त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) भनिन्छ । यदि कुनै दुई ओटा भुजाहरू बराबर भए उक्त त्रिभुजलाई कस्तो त्रिभुज भनिन्छ ? भुजाहरू फरक फरक नापका भए त्रिभुजलाई कस्तो त्रिभुज भनिन्छ ? त्रिभुजलाई भुजाका आधारमा वर्गीकरण गरे जस्तै कोणका आधारमा कति प्रकारमा विभाजन गर्न सकिएला ?

अब हामी त्रिभुजका विभिन्न गुणहरूको परीक्षणका बारेमा अध्ययन गर्दछौँ ।

2.1 त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण (Verification of Properties of Triangles)

परीक्षण 1 : त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल



चित्रमा दुई ओटा समानान्तर रेखाहरूलाई छेदक PQ र छेदक PR ले काटी ΔPQR बनेको छ । त्रिभुजका तिन कोणलाई क्रमशः 1, 2 र 3 मानौँ । अब, AB//CD भएकाले

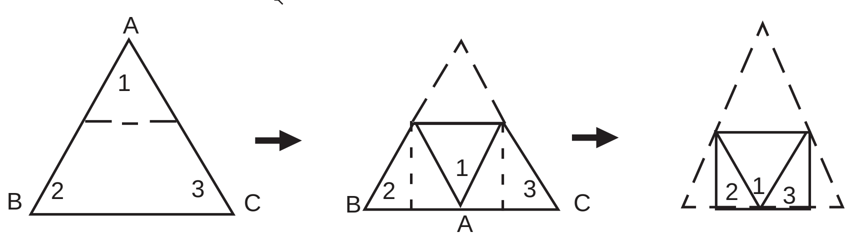
$\angle APQ = \angle PQR$ हुन्छ र $\angle BPR = \angle PRQ$ हुन्छ । (एकान्तर कोणहरू भएकाले)

तसर्थ, $\angle APQ = \angle 2$ र $\angle BPR = \angle 3$ हुन्छ ।

अब, बिन्दु P मा $\angle 1$, $\angle 2$ र $\angle 3$ मिलेर सिधा कोण $\angle APB$ बनाउँछ ।

सिधाकोण $\angle APB$ को मान कति हुन्छ ? यसको मान 180° हुन्छ । $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

अर्को तरिका : एउटा बाक्लो कागजमा त्रिभुज खिच र कोणहरूलाई क्रमशः 1, 2 र 3 नाम देऊ । उक्त त्रिभुजलाई कैँचीले काट । त्यसपछि शीर्षकोण A लाई BC मा पर्ने गरी पट्याऊ । फेरि शीर्षबिन्दु B र C लाई पनि A मा नखप्टने गरी पट्याऊ ।

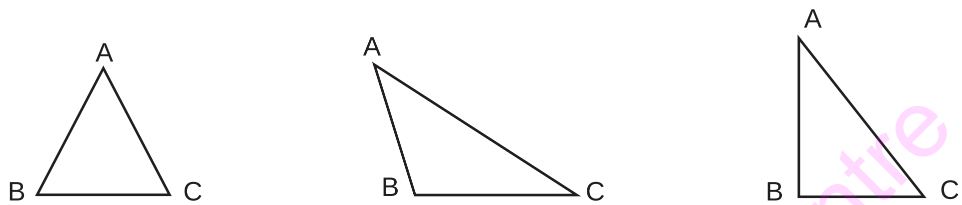


Curriculum Development Centre

अब, त्रिभुज ABC का तिन शीर्षबिन्दुले एउटा सिधा कोण बनाए । चित्रमा देखाए जस्तै उक्त सिधाकोणको मान 180° हुन्छ ।

प्रयोगात्मक परीक्षण

फरक फरक नापका भुजाहरू भएका तिन ओटा त्रिभुजहरू खिच ।



चित्र (क) *चित्र (ख)* *चित्र (ग)*

प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी माथिका प्रत्येक त्रिभुजमा सबै कोणहरू नाप र तलको तालिका भर :

चित्र नं.	∠BAC	∠ABC	∠ACB	∠BAC + ∠ABC + ∠ACB	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ ?

त्रिभुजका भित्री तिन ओटा कोणको नापको योगफल कति पायौ ?

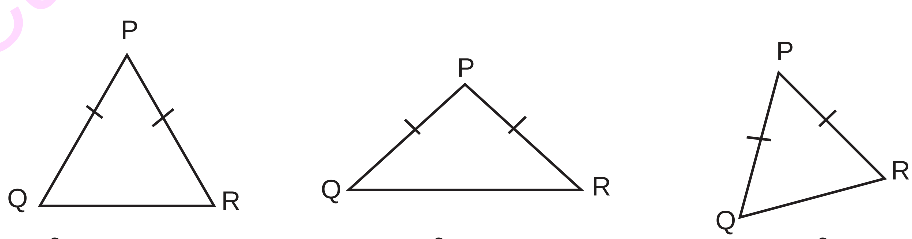
सँगैको साथीसँग निष्कर्षबारे छलफल गर ।

> त्रिभुजका भित्री कोणहरूको नापको योगफल 180° वा दुई समकोण हुन्छ ।

परीक्षण 2 : समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको सम्बन्ध

फरक फरक आधार भएका तिन ओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू PQR खिच । जसमा आधार QR र PQ = PR छ ।

प्रोटेक्टर प्रयोग गरेर प्रत्येक त्रिभुजका कोणहरू नाप र तलको तालिका भर :



चित्र (क) *चित्र (ख)* *चित्र (ग)*

Curriculum Development Centre

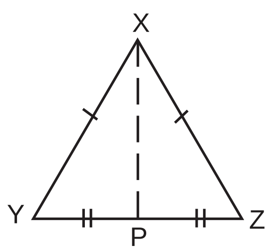
चित्र नं.	∠PQR	∠PRQ	∠QPR	परिणाम
(क)				
(ख)				
(ग)				

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ, साथीहरूसँग छलफल गर ।

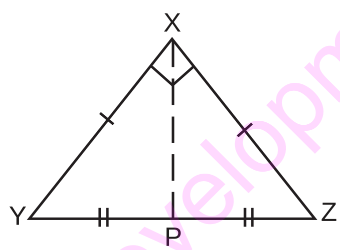
> समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 3 : समद्विबाहु त्रिभुजका शीर्षबिन्दुबाट आधारको मध्य बिन्दुमा खिचिएको रेखा र आधारको सम्बन्ध

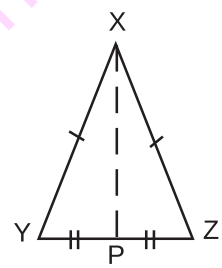
1. फरक फरक आधार भएका तिन ओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू △XYZ खिच ।
2. आधार YZ को मध्यबिन्दु P पत्ता लगाई शीर्षबिन्दु X सँग जोड ।
3. प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी ∠XPY र ∠XPZ नाप र तलको तालिका भर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

चित्र नं.	∠XPY	∠XPZ	परिणाम
(क)			
(ख)			
(ग)			

माथिको तालिकाबाट के थाहा पायौ ?

आसन्न कोणहरू बराबर भए वा मान 90° भए के हुन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर ।

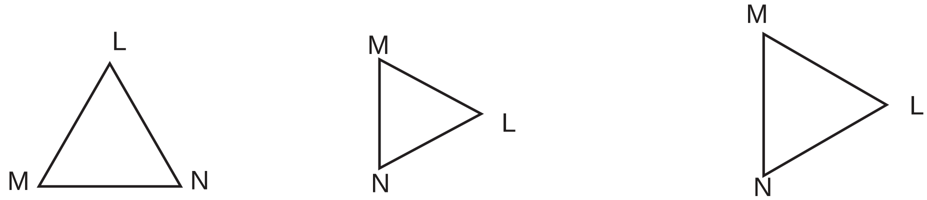
> समद्विबाहु त्रिभुजमा शीर्षबिन्दुबाट आधारको मध्यबिन्दु जोड्ने रेखा आधारसँग लम्ब हुन्छ ।

परीक्षण 4 : समबाहु त्रिभुजका कोणहरूको सम्बन्ध

सर्वप्रथम फरक नापका तिन ओटा समबाहु त्रिभुजहरू खिच ।

Curriculum Development Centre

प्रोटेक्टरको सहायताले सबै कोणहरू नाप र तलको तालिका भर :



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

चित्र नं.	∠MLN	∠MNL	∠LMN	परिणाम
(क)				
(ख)				
(ग)				

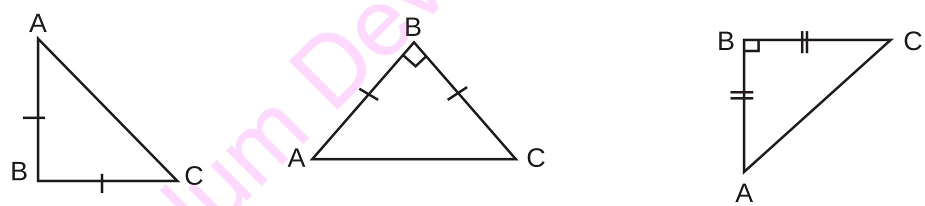
माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ, आफ्नो कापीमा लेख र साथीहरूसँग छलफल गर ।

समबाहु त्रिभुजका सबै भित्री कोणहरू बराबर हुन्छन् र प्रत्येकको मान 60° हुन्छ ।

परीक्षण 5 : समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको सम्बन्ध

एउटा कोण समकोण (90°) भएका फरक नापका तिन ओटा समद्विबाहु त्रिभुज ABC खिच ।

चित्रमा ABC समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज हो । जसमा AB = BC छ र ∠B = 90° छ ।



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

अब, प्रोटेक्टर प्रयोग गरी सबै त्रिभुजका आधार कोणहरू नाप र तलको तालिकामा भर :

चित्र नं.	∠BAC	∠ACB	परिणाम
(क)			
(ख)			
(ग)			

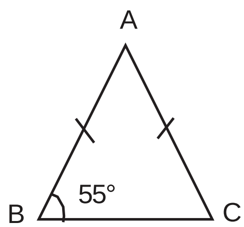
माथिको तालिकाको आधारमा निष्कर्ष आफ्नो उत्तर पुस्तिकामा लेख ।

समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू 45° का हुन्छन् ।

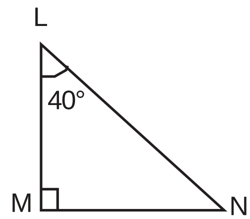
Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

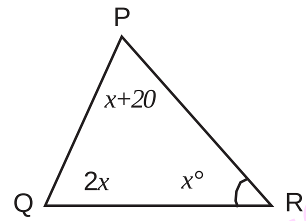
तलका त्रिभुजहरूमा बाँकी कोणहरू पत्ता लगाऊ :



(क)



(ख)



(ग)

समाधान

(क) **यहाँ,** $\triangle ABC$ **समद्विबाहु त्रिभुज हो । जसमा** $AB = AC$ **र** $\angle ABC = 55°$ **छ ।** $\triangle ABC$ **समद्विबाहु भएकाले** $\angle ABC = \angle ACB = 55°$ **हुन्छ ।**

$\therefore \angle ACB = 55°$

फेरि, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ (**त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल** $= 180°$ **हुन्छ ।**)

अथवा, $55° + 55° + \angle CAB = 180°$

अथवा, $\angle CAB = 180° - 110° = 70°$

$\therefore \angle CAB = 70°$

(ख) $\triangle LMN$ **समकोणी त्रिभुज हो । जसमा** $\angle L = 40°; \angle M = 90°$ **छ ।**

$\angle L + \angle M + \angle N = 180°$

अथवा, $40° + 90° + \angle N = 180°$

अथवा, $\angle N = 180° - 130°$

$\therefore \angle N = 50°$

(ग) $\triangle PQR$ **विषमभुज (बिषमबाहु) त्रिभुज हो ।**

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$ (**त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल** $= 180°$ **हुन्छ ।**)

अथवा, $x + 20° + 2x + x = 180°$

अथवा, $4x + 20° = 180°$

अथवा, $4x = 180° - 20° = 160°$

अथवा, $4x = 160°$

$\therefore x = 40°$

अब, $\angle P = x + 20° = 40° + 20° = 60°$

$\angle Q = 2x = 2 \times 40° = 80°$

$\angle R = x = 40°$

Curriculum Development Centre

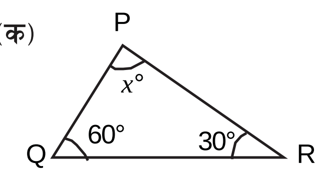
अभ्यास 2.1

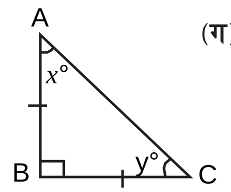
1. तिन ओटा त्रिभुज खिची प्रयोगद्वारा प्रमाणित गर ।

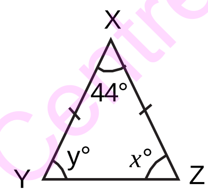
(क) त्रिभुजको कुनै दुई भुजाको लम्बाइको जोड तेस्रो भुजाभन्दा लामो हुन्छ ।

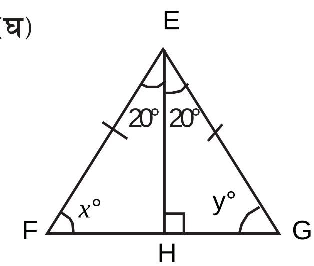
(ख) त्रिभुजको एउटा भुजा लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण भित्री अनासन्न कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

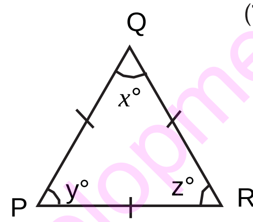
2. तलका चित्रहरूमा x, y, z को मान पत्ता लगाई बाँकी कोणहरूको मान पत्ता लगाऊ :

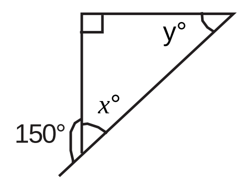
(क)


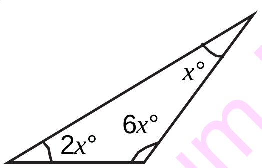
(ख)


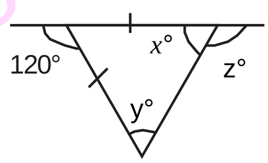
(ग)


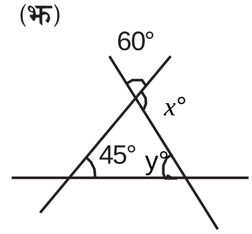
(घ)


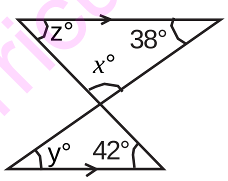
(ङ)


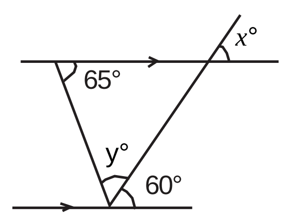
(च)


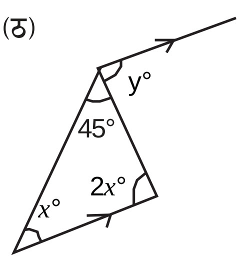
(छ)


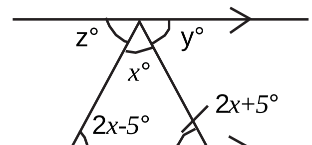
(ज)


(झ)


(ञ)


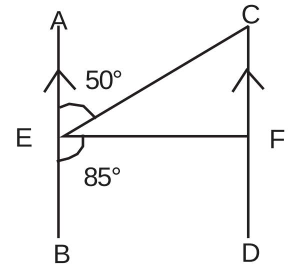
(ट)


(ठ)


(ड)


Curriculum Development Centre

3. **सँगैको चित्रमा AB||CD, ∠FEB = 85° र ∠AEC = 50° भए ∠ECF, ∠DFE र ∠CFE को मान पत्ता लगाऊ ।**



4. **फरक नापमा तिन ओटा त्रिभुज ABC खिच जसमा AC > AB छ । अब तलको जस्तै तालिका बनाई दिइएका भुजा र कोणको नाप भर र निष्कर्ष लेख :**

चित्र	AC	AB	∠ACB	∠ABC	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

नियमित बहुभुजको रचना (Construction of Regular Polygons)

तलका प्रश्नहरूबारे छलफल गरौँ :

बहुभुज भनेको के हो, नियमित बहुभुज भन्नाले के बुझिन्छ, नियमित बहुभुजको भित्री कोणहरू कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

$\frac{5-2}{5}\times180^0$

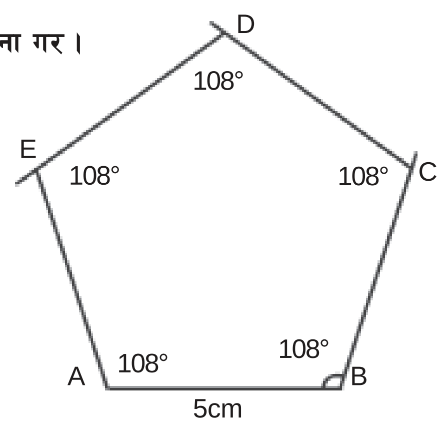
नियमित बहुभुज, बहुभुजको भित्री र बाहिरी कोणहरूका बारेमा हामीले कक्षा ७ मा अध्ययन गरी सकेका छौँ । यहाँ हामी नियमित बहुभुजको रचनाका बारेमा अध्ययन गर्दछौँ ।

यदि नियमित बहुभुजको भुजाको सङ्ख्या n भएमा उक्त बहुभुजको भित्री कोणको नाप $\frac{n-2}{n}\times180^0$ हुन्छ ।

(I) नियमित पञ्चभुजको रचना (construction of regular pentagon)

5cm भुजा लम्बाइ भएको एउटा नियमित पञ्चभुजको रचना गर ।

पहिलो तरिका



1. नियमित पञ्चभुजको भित्री कोणको मान पत्ता लगाउने तरिका

यहाँ, n = 5

भित्री कोण = =

Curriculum Development Centre

2. AB = 5cm भएको सिधा रेखाखण्ड खिच र प्रोटेक्टरले बिन्दु B मा 108° को कोण खिच ।

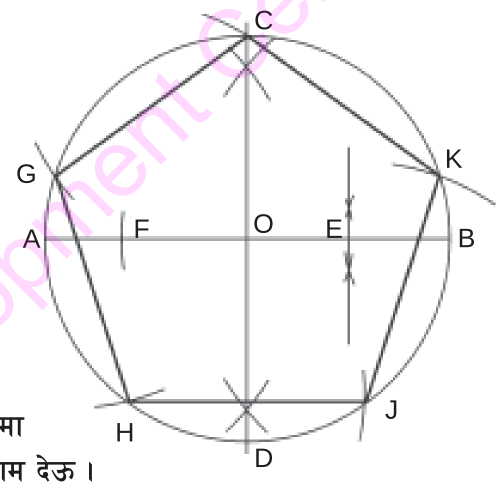
3. उक्त रेखामा 5cm को चापले काट र C नाम देऊ । C मा 108° को कोण खिच । अब 5cm मा चिह्न लगाइ D नाम देऊ ।

4. यस्तै गरी बिन्दु D मा 108° को कोण खिच र 5cm मा चिह्न लगाई E नाम देऊ । अनि बिन्दु E र A जोड ।

   अब आवश्यक पञ्चभुज ABCDE तयार भयो ।

दोस्रो तरिका

5cm **व्यास भएको वृत्तभित्र पञ्चभुजको रचना गर ।**

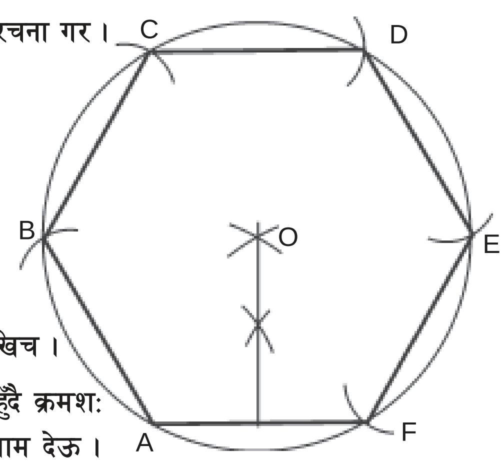


1. कम्पासको सहायताले सर्वप्रथम व्यास AB = 5cm र केन्द्र O भएको एउटा वृत्त खिच ।
2. AB को लम्बार्धक खिच र वृत्तको परिधिसम्म लम्ब्याइ क्रमशः C र D नाम देऊ ।
3. फेरि अर्धव्यास OB को लम्बार्धक खिच र काटिएको बिन्दुलाई E नाम देऊ ।
4. बिन्दु E बाट EC बराबरको चापले OA मा काट र F नाम देऊ ।
5. F बाट C बराबरको चाप लेऊ र वृत्तको परिधिमा C बाट चापहरू खिच र क्रमशः G, H, J र K नाम देऊ ।
6. रुलरले C, G, H, J र K बिन्दुहरू जोड ।
7. अब आवश्यक नियमित पञ्चभुज CGHJK तयार भयो ।

(II) नियमित षट्भुजको रचना (construction of regular hexagon) (नापेर हेर)

एउटा भुजाको नाप 4cm भएको नियमित षट्भुजको रचना गर ।

तरिका :



1. AF = 4cm को एउटा सरल रेखा खिच ।
2. बिन्दु A बाट र बिन्दु F बाट AF बराबर नापको चाप लिएर काट र चाप खिच र काटिएको बिन्दुलाई O नाम देऊ ।
3. O लाई आधार मानेर OA अर्धव्यास भएको वृत्त खिच ।
4. OA बराबरको चापले वृत्तको परिधिमा A बाट B हुँदै क्रमशः काट र काटिएको बिन्दुलाई क्रमशः B, C, D, E नाम देऊ ।

Curriculum Development Centre

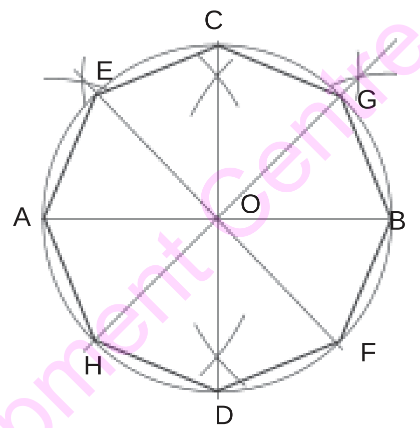
5. अब A, B, C, D, E र F लाई रुलरले जोड ।

6. आवश्यक षट्भुज ABCDEF तयार भयो ।

(III) नियमित अष्टभुजको रचना (construction of regular octagon)

5cm व्यास भएको वृत्तभित्र नियमित अष्टभुजको रचना गर ।

तरिका



1. कम्पासको प्रयोग गरेर केन्द्र O र व्यास AB = 5cm भएको एउटा वृत्त खिच ।
2. व्यास AB को लम्बार्धक खिच ।
3. अब, ∠COA र ∠BOC को अर्धक खिच । त्यसलाई परिधिसम्म लम्ब्याऊ । अब काटिएका बिन्दुहरूलाई क्रमशः E र F तथा G र H नाम देऊ ।
4. रुलर प्रयोग गरी बिन्दुहरू क्रमशः A, E, C, G, B, F, D, H र A जोड ।
5. अब आवश्यक नियमित अष्टभुज तयार भयो ।

नोट : नियमित षट्भुज र नियमित अष्ठभुजको रचना पनि पञ्चभुजको जस्तै भित्री कोणहरू पत्ता लगाएर पनि गर्न सकिन्छ ।

अभ्यास 2.2

1. भित्री कोण पत्ता लगाई तलका नापको नियमित पञ्चभुजको रचना गर :

   (क) एउटा भुजाको लम्बाइ 4cm भएको (ख) एउटा भुजाको लम्बाइ 6cm भएको

2. भित्री कोण पत्ता लगाई तलका नापको नियमित षट्भुजको रचना गर :

   (क) AB = 5cm (ख) भुजा = 6cm

3. कम्पासको प्रयोग गरी एउटा भुजा 7cm भएको नियमित षट्भुजको रचना गर ।

4. भित्री कोण पत्ता लगाई प्रोटेक्टरको प्रयोगबाट निम्नानुसार भुजा भएको नियमित अष्टभुजको रचना गर :

   (क) 4cm (ख) 5cm (ग) 6cm

5. कम्पास र रुलरको प्रयोग गरी तल दिइएअनुसारका नियमित बहुभुजहरूको रचना गर :

   (क) अर्धव्यास 4cm भएको वृत्त भित्र नियमित पञ्चभुज

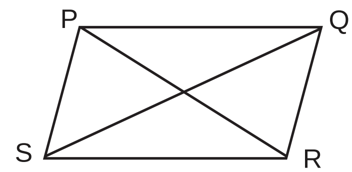
   (ख) भुजको लम्बाइ 5.5cm भएको षट्भुज

   (ग) व्यास 5cm भएको वृत्त भित्र नियमित अष्टभुज

Curriculum Development Centre

2.3 समानान्तर चतुर्भुज, वर्ग र आयतका गुणहरूको परीक्षण

(i) समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको खोजी



तलका प्रश्नहरूका आधारमा छलफल गरौँ :

समानान्तर चतुर्भुज भनेको के हो ?

यसका गुणहरू के के हुन् ?

यसका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । यहाँ, हामी समानान्तर चतुर्भुजमा निम्न लिखित गुणहरूको परीक्षण गर्दछौँ :

(क) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

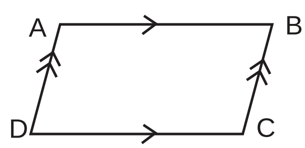
(ख) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छ ।

(ग) समानान्तर चतुर्भुजका क्रमागत कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

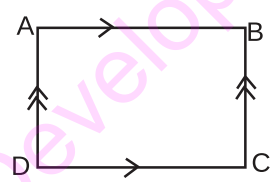
(घ) समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।

(क) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

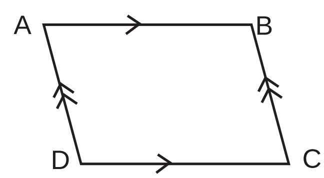
फरक फरक नाप र किसिमका तिन ओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू खिच ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुजका कोणहरू नाप र तलको जस्तै तालिका बनाई प्रस्तुत गर :

चित्र नं	$\angle DAB$	$\angle BCD$	$\angle ABC$	$\angle CDA$	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

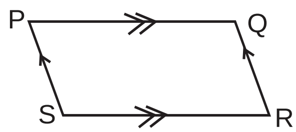
अब आफ्नो निष्कर्षलाई आफ्नो समूहमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर ।

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

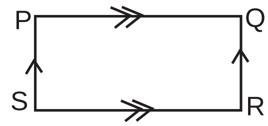
(ख) समानान्तर चतुर्भुजमा सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छ ।

माथि नं. (क) मा जस्तै फरक फरक नाप र किसिमका तिन तिन ओटा समानान्तर चतुर्भुज PQRS खिच । आफूले खिचेका समानान्तर चतुर्भुजका भुजाहरू रुलरको सहयोगमा नाप र तलको जस्तै तालिका बनाई भर :

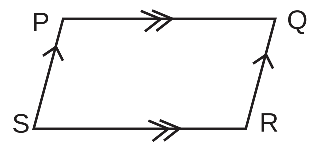
Curriculum Development Centre



चित्र (क)



चित्र (ख)



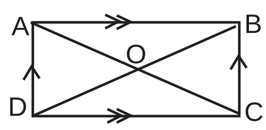
चित्र (ग)

चित्र नं.	PQ	RS	QR	PS	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

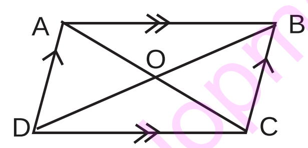
अब, आफ्नो निष्कर्षबारे आफ्नो समूहमा छलफल गर र निष्कर्ष निकाल ।

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छ ।

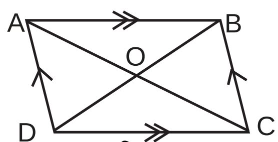
(ग) **समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।**



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

तिन तिन जनाको समूह निर्माण गरी प्रत्येकले फरक फरक नापका तिन तिन ओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू ABCD खिची विकर्णहरू AC र BD जोड र विकर्णहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दुलाई O मान ।

अब, प्रत्येकले समानान्तर चतुर्भुजको विकर्णहरूको नाप लिने र तलको जस्तै तालिका बनाई प्रस्तुत गर :

चित्र नं.	OA	OC	परिणाम	OB	OD	परिणाम
(क)						
(ख)						
(ग)						

अब, आफ्नो निष्कर्षलाई समूहमा प्रस्तुत गर्ने र समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउने ।

समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

(ii) आयतका गुणहरूको परीक्षण

आयत भनेको के हो र यसका गुणहरू के के हुन्, यसका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी यसका निम्न लिखित गुणहरूको परीक्षण गर्ने छौँ :

Curriculum Development Centre

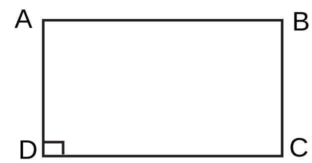
आयत भनेको एउटा कोण 90° भएको समानान्तर चतुर्भुज हो । तसर्थ, समानान्तर चतुर्भुजका सबै गुणहरू आयतका पनि गुणहरू हुन् । यसका साथै,

(क) आयतका विपरीत भुजाहरू बराबर र समानान्तर हुन्छन् ।

(ख) आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।

(ग) आयतका विकर्णहरू समद्विभाजित हुन्छन् ।

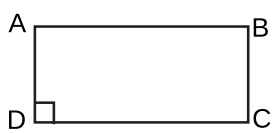
(घ) आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।



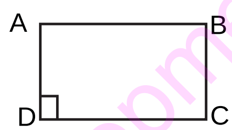
माथिका गुणहरूमध्ये (क) र (ग) हामीले समानान्तर चतुर्भुजमा नै परीक्षण गरिसकेका छौँ, यसलाई समानान्तर चतुर्भुजको सट्टामा आयत राखी परीक्षण गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

(ख) आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।

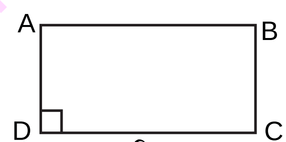
फरक फरक नापका तिन ओटा आयत खिच । आफूले खिचेको आयतका सबै कोणहरूलाई प्रोटेक्टरले नापेर तलको जस्तै तालिकामा प्रस्तुत गर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

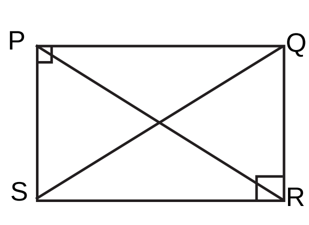
चित्र	$\angle DAB$	$\angle ABC$	$\angle BCD$	$\angle CDA$	निष्कर्ष
(क)					
(ख)					
(ग)					

आफ्नो निष्कर्षबारे साथीहरूसँग छलफल गर ।

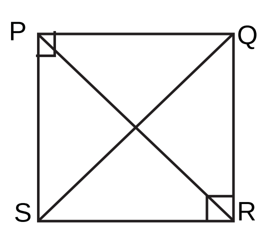
आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।

(घ) आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

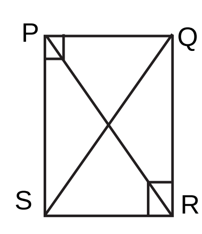
फरक फरक नापका तिन ओटा आयतहरू खिच र विकर्णहरू PR र QS जोड ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

Curriculum Development Centre

अब रुलर प्रयोग गरी सबै विकर्णहरू नापी तलको जस्तै तालिकामा प्रस्तुत गर र निष्कर्ष पनि पत्ता लगाऊ ।

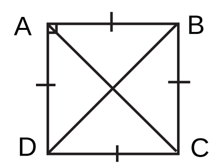
चित्र नं.	PR	QS	परिणाम
(क)			
(ख)			
(ग)			

आफ्नो निष्कर्षबारे साथीहरूबिचमा छलफल गर ।

आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

(iii) वर्गका गुणहरूको परीक्षण :

वर्ग भनेको के हो, यसका गुणहरू के के हुन्, यसका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा नै अध्ययन गरिसकेका छौँ । सबै भुजाहरू बराबर भएको आयतलाई वर्ग भनिन्छ । त्यस कारण आयतमा सबै गुणहरू वर्गका पनि गुणहरू हुन् ।



वर्गका गुणहरू निम्नानुसार छन् :

(क) **वर्गका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।**

(ख) **वर्गका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।**

(ग) **वर्गका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।**

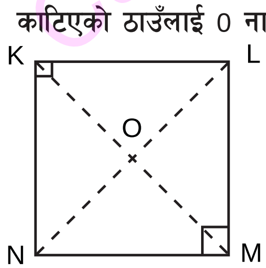
(घ) **वर्गका विकर्णहरू आपसमा समकोणी हुने गरी समद्विभाजित हुन्छन् ।**

(ङ) **वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्ष कोणलाई आधा गर्दछन् ।**

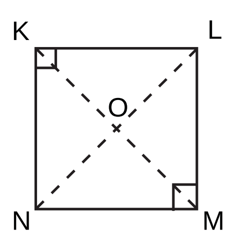
माथिका (क), (ख) र (ग) का गुणहरू आयत र समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूसँग मिल्दाजुल्दा छन् । तसर्थ यी गुणहरू अगाडि गरे जस्तै परीक्षण गरी शिक्षकलाई देखाऊ ।

(घ) **वर्गका विकर्णहरू आपससमा समकोण हुनेगरी समद्विभाजित हुन्छन् ।**

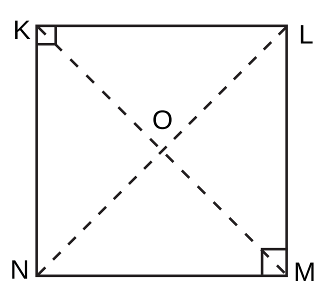
फरक फरक नापका तिन ओटा वर्गहरू खिची चित्रमा देखाए झैँ विकर्णहरू खिच । अनि विकर्णहरू काटिएको ठाउँलाई 0 नाम देऊ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

Curriculum Development Centre

अब रुलर र प्रोटेक्टर प्रयोग गरेर तल दिइएका कोणहरू र भुजाहरू नाप र तलको तालिकामा जस्तै बनाई प्रस्तुत गर :

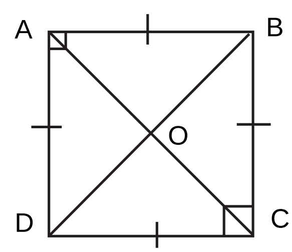
चित्र	कोणहरूको नाप				विकर्ण KM का खण्डहरू		विकर्ण LN का खण्डहरू		परिणाम
	∠KOL	∠LOM	∠MON	∠NOK	OK	OM	OL	ON	
(क)									
(ख)									
(ग)									

अब माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ लेख र साथीहरूसँग छलफल गरी समूहमा निष्कर्ष निकाल ।

वर्गका विकर्णहरू आपसमा समकोण हुनेगरी समद्विभाजन हुन्छन् ।

(ङ) **वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणहरूलाई आधा गर्छन् ।**

तिन तिन जनाको समूह बनाऊ र सबैले एक एक ओटा वर्ग ABCD मा विकर्णहरू AC र BD खिच ।



अब प्रत्येकले तलको जस्तै तालिका बनाई दिइएका कोणहरू नाप र तालिकामा भर :

शीर्षकोणको नाप	सहायक कोणको नाप	निष्कर्ष
∠ABC =	∠ABO =...... र ∠CBO =	
∠BCD =	∠BCO = ... र ∠OCD =	
∠CDA =	∠CDO = ... र ∠ODA =	
∠DAB =	∠DAO = ... र ∠OAB =	

आफ्नो तालिकाका आधारमा आफ्नो निष्कर्षलाई समूहमा प्रस्तुत गर र छलफल गरी सामूहिक निष्कर्ष निकाल ।

वर्ग ABCD मा विकर्ण AC ले शीर्षकोण ∠DAB र ∠BCD लाई आधा गरेको छ । त्यस्तै, विकर्ण BD ले शीर्षकोणहरू ∠ABC र ∠CDA लाई आधा पारेको छ ।

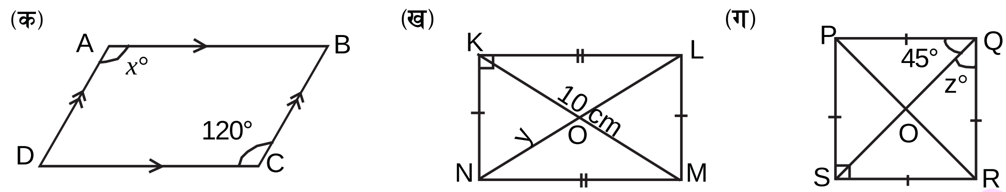
वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणहरूलाई आधा गर्दछन् ।

Curriculum Development Centre

$\angle$

उदाहरण 1

दिइएका चित्रहरूमा x, y र z को मान पत्ता लगाऊ :



समाधान

(क) ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

यहाँ, $\angle BCD = 120°$ छ ।

$\angle BAD = x = ?$

हामीलाई थाहा छ, समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

$\angle BAD = \angle BCD$

अथवा, $x = 120°$

(ख) KLMN एउटा आयत हो जसमा

विकर्ण KM = 10cm छ भने विकर्ण LN = ycm छ ।

हामीलाई थाहा छ, आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् । तसर्थ KM = LN हुन्छ ।

$\therefore$ y = KM = 10cm हुन्छ ।

(ग) PQRS एउटा वर्ग हो जसमा PR र QS दुई ओटा विकर्णहरू छन् ।

$\angle OQP = 45°$ छ र $\angle OQR = Z$ छ ।

हामीलाई थाहा छ, वर्गका विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ । तसर्थ

$\angle OQR = \angle OQP$ हुन्छ (किनकि QS विकर्ण हो)

$\therefore \angle OQR = Z = 45°$ हुन्छ ।

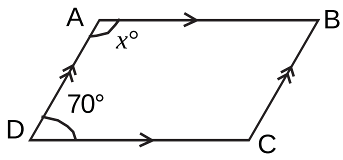
अभ्यास 2.3.

1. समानान्तर चतुर्भुज, वर्ग र आयतका गुणहरूको सूची तयार पार ।
2. आयत र वर्गका फरक गुणहरू के के छन्, पत्ता लगाऊ ।

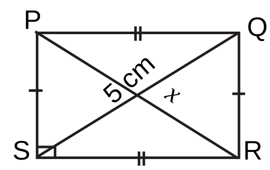
Curriculum Development Centre

3. तलका चित्रहरूमा x,y र z को मान पत्ता लगाऊ :

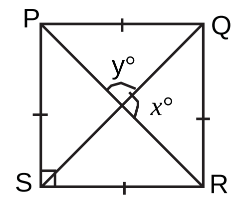
(क)



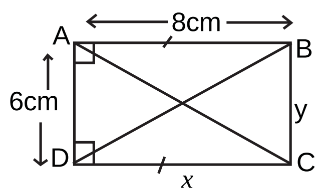
(ख)



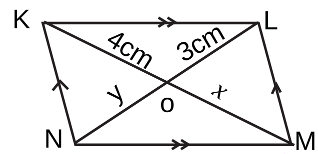
(ग)



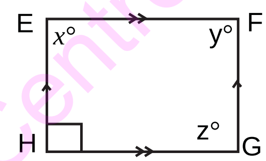
(घ)



(ङ)



(च)



4. लम्बाइ (l)= 18cm र चौडाइ (b) = 9cm भएको एउटा आयत बनाई त्यसका गुणहरूको परीक्षण गर ।

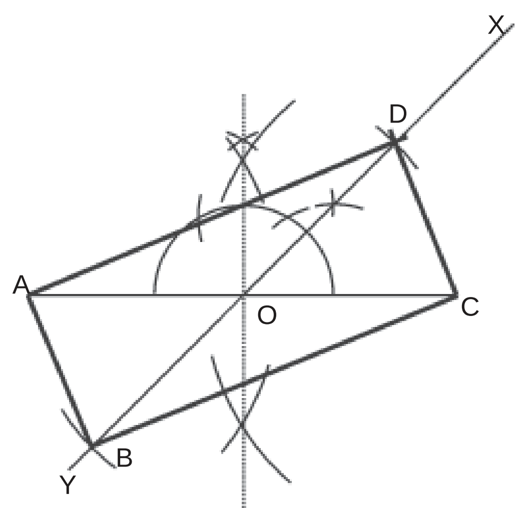
2.4. आयतको रचना (Construction of Rectangle)

(क) दुई विकर्णहरू र तिनीहरूबिचको कोण दिइएमा,

विकर्णहरू AC = BD = 7cm र ∠COD = 45° भएको आयतको रचना गर ।

चरणहरू

1. AC = 7cm को एउटा सिधा रेखा खिच ।
2. AC को मध्यबिन्दु O पत्ता लगाऊ ।
3. कम्पासको प्रयोगले बिन्दु O मा 45° को कोण खिच र XY सम्म लम्ब्याऊ ।
4. OA बराबरको चापले X तिर र Y तिर काट र क्रमश: D र B नाम देऊ ।
5. रुलरको प्रयोग गरी बिन्दुहरू A, B, C र D क्रमश: जोड ।
6. आवश्यक आयत ABCD तयार भयो ।

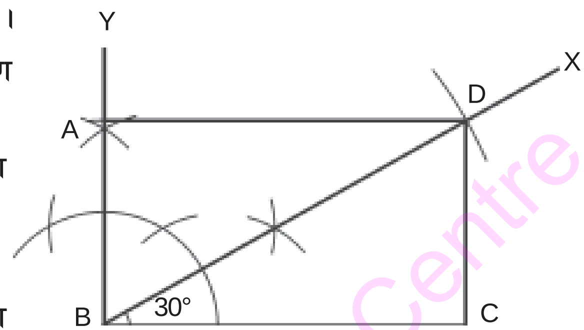


Curriculum Development Centre

(ख) एउटा भुजा, एउटा विकर्ण र त्यसले त्यही भुजासँग बनाएको कोण दिइएमा

आधार रेखा BC = 8 cm, ∠DBC = 30° र विकर्ण BD = 9 cm भएको आयतको रचना गर ।

चरणहरू



1. BC = 8 cm को एउटा आधार रेखा खिच ।
2. कम्पासको प्रयोग गरी B मा 30° को कोण खिच र X सम्म लम्ब्याऊ ।
3. कम्पासमा 9 cm लामो चाप लिएर BX मा काट र D नाम देऊ ।
4. C र D लाई सरल रेखाले जोड ।
5. B मा कम्पासको सहायताले 90° को कोण खिच र BY रेखा तान ।
6. BY मा CD बराबरको चापले काट र A नाम देऊ ।
7. विन्दु A र D जोड ।
8. आवश्यक आयत ABCD तयार भयो ।

अभ्यास 2.4

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा आयतको रचना गर :

   (क) विकर्ण (AC) = BD = 8cm, ∠BOC = 30°   (ख) विकर्ण (PR) = 7cm, ∠QOR = 45°

   (ग) विकर्ण (BD) = 10cm, ∠AOD = 60°
2. दुई विकर्णको बिचको कोण 75° भएको र विकर्णको लम्बाइ 7.4cm भएको एउटा आयतको रचना गर ।
3. तलका प्रत्येक अवस्थामा आयतको रचना गर :

   (क) विकर्ण PR = 6 cm   PQ = 3 cm,   ∠QPR = 60° भएको आयत PQRS.

   (ख) BC = 7.1 cm,   BD = 10 cm,   ∠DBC = 45° भएको आयत ABCD.

   (ग) एउटा भुजा 4.8 cm र विकर्ण 6.2 cm

   (घ) AC = 5 cm,   AB = 4 cm र ∠BAC = 60° भएको आयत ABCD.
4. तलका प्रत्येक अवस्थामा आयतको रचना गर :

   (क) विकर्ण AC = 8cm र AC र BD बिचको कोण 45° भएको

   (ख) एउटा विकर्णको लम्बाइ 7cm र दुईविकर्ण बिचको कोणको नाप 30° भएको

   (ग) एउटा भुजा 5cm, विकर्ण 10cm र ती दुईबिचको कोण 60° भएको

   (घ) PR = 9.9cm, PQ = 7cm र QPR = 45° भएको ।

Curriculum Development Centre

पाठ 3

त्रिभुजको अनुरूपता र समरूपता

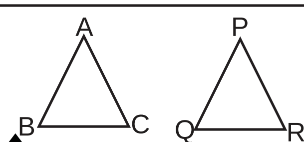
(Congruence and Similarity of Triangles)

3.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका तिन जोडा आकृतिहरूमा के के समानता र के के फरक देखिन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर :

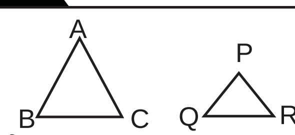
पहिलो जोडा त्रिभुजहरूमा दुवै उस्तै आकार र एउटै नापका छन् । तसर्थ यी दुई त्रिभुजहरू अनुरूप छन् । दोस्रो जोडा समानान्तर चतुर्भुजहरूमा दुवै उस्तै आकार तर फरक नापका छन् । तसर्थ यी दुई चतुर्भुजहरू समरूप छन् । त्यस्तै, तेस्रो जोडा चित्रहरू दुवै फरक फरक आकार र फरक नापका छन् । तसर्थ ती दुई आकृतिहरू अनुरूप पनि छैनन् र समरूप पनि छैनन् ।

कुनै दुई ज्यामितीय आकृतिहरू उस्तै आकार र एउटै नापका छन् भने त्यस्ता ज्यामितीय आकृतिहरूलाई अनुरूप (congruent) भनिन्छ ।



चित्रमा ∆ABC र ∆PQR अनुरूप छन् । सङ्केतमा ∆ABC ≅ ∆PQR लेखिन्छ ।

कुनै दुई ज्यामितीय आकृतिहरू उस्तै आकारका छन् भने त्यस्ता ज्यामितिय आकृतिहरूलाई समरूप (similar) भनिन्छ ।



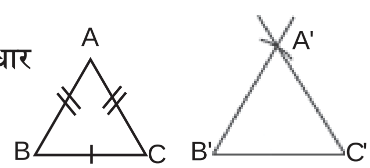
चित्रमा ∆ABC र ∆PQR समरूप छन् । सङ्केतमा ∆ABC ~ ∆PQR लेखिन्छ ।

3.1. त्रिभुज अनुरूप हुने अवस्थाहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 1. कुनै ∆ABC दिइएको छ । उक्त त्रिभुजसँग अनुरूप हुने गरी कति तरिकाले रचना गर्न सकिन्छ, हेरौँ :

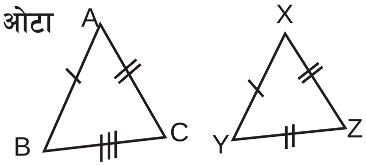
तरिका 1

यहाँ ∆ABC दिइएको छ । सर्वप्रथम BC बराबरको नाप भएको आधार रेखा B'C' खिच । बिन्दु B बाट AB बराबरको कम्पासको चापले माथि चाप खिच । फेरि C बाट CA बराबरको चापले काट र काटिएको बिन्दुलाई A' ले जनाऊ ।



A', B' र A',C' जोड । चित्रअनुसार ∆ABC का तिन ओटा भुजा र ∆A'B'C' का तिन ओटा भुजासँग क्रमश: बराबर छन् । ∆ABC र ∆A'B'C' अनुरूप छन् । (नापेर हेर)

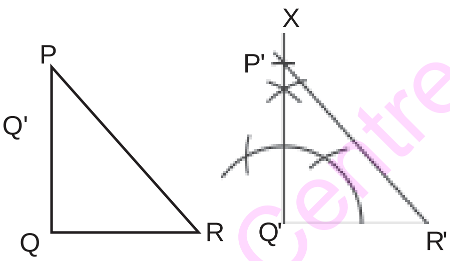
यसरी एउटा त्रिभुजमा तिन ओटा भुजाहरू अर्को त्रिभुजका तिन ओटा भुजाहरूसँग अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
यसलाई भुजा भुजा भुजा (side, side, side) वा छोटकरीमा भु. भु. भु. (SSS) तथ्य भनिन्छ । चित्रमा $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ छ ।



तरिका 2

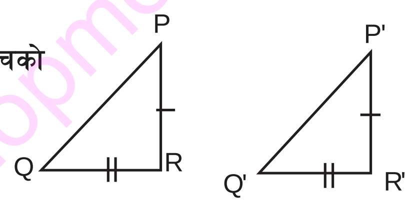
QR को लम्बाइ बराबरको आधार रेखा Q'R' खिच । कम्पासको प्रयोग गरी $\angle Q$ नाप र त्यही बराबरको कोण Q' मा खिच र रेखा Q'X तान ।

अब QP बराबरको चापले Q' बाट Q'X मा काट र P' नाम देऊ ।



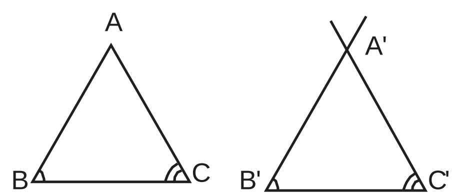
बिन्दु P' र R' जोड । यसरी बनेको $\Delta P'Q'R'$ र ΔPQR अनुरूप हुन्छन् । तसर्थ $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ हुन्छ ।

यदि एउटा त्रिभुजमा दुई ओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोणसँग अर्को त्रिभुजका दुई ओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोण अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
यसलाई भुजा कोण भुजा (side, angle, side) छोटकरीमा भु.को.भु. (SAS) तथ्य भनिन्छ । यहाँ $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ छ ।



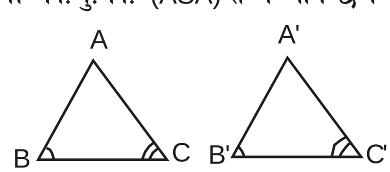
तरिका 3

BC बराबरको लम्बाइ भएको आधार B'C' खिच । प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी $\angle B$ नाप र B' मा त्यही नापको कोण खिच । फेरि C को मान प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी नाप र सोही बराबरको कोण C' मा खिच । दुई रेखा काटिने बिन्दुलाई A' नाम देऊ । अब ΔABC र $\Delta A'B'C'$ अनुरूप हुन्छन् । (नापेर हेर)



एउटा त्रिभुजको दुई ओटा कोण र ती कोणहरूबिचको भुजा, अर्को त्रिभुजको दुई ओटा कोण र ती कोणहरूबिचको भुजासँग आपसमा अलग अलग बराबर भए ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । यसलाई कोण, भुजा, कोण (Angle, side, angle) छोटकरीमा को.भु.को. (ASA) तथ्य भनिन्छ ।

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ हुन्छ ।

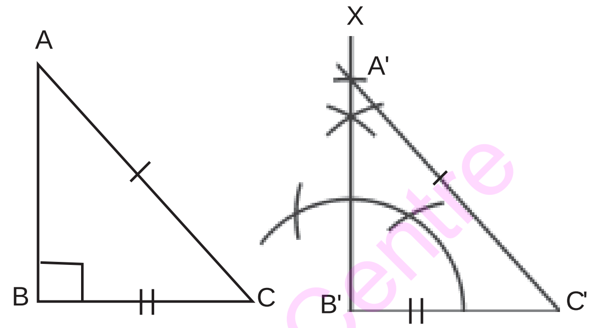


Curriculum Development Centre

तरिका 4

यदि, ΔABC समकोणी त्रिभुज भएमा उक्त त्रिभुजसँग अनुरूप हुने त्रिभुज कसरी रचना गर्न सकिन्छ, हेरौँ :

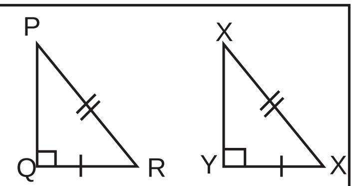
1. यहाँ ΔABC एउटा समकोणी त्रिभुज छ । जसमा $\angle$B समकोण (90°) छ ।
2. BC बराबर हुनेगरी B'C' आधार रेखा खिच ।
3. कम्पास/प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी B' मा 90° को कोण खिच ।
4. ΔABC को कर्ण AC बराबरको चाप C' बाट लिएर चित्रमा B'X मा काट र काटिएको विन्दुलाई A' नाम देऊ ।



5. A' र C' जोड । अब ΔABC र ΔA'B'C' अनुरूप छन्, नापेर हेर ।

एउटा त्रिभुजका समकोण, कर्ण र एउटा भुजाका आधारमा पनि ΔABC सँग अनुरूप त्रिभुज रचना गर्न सकियो ।

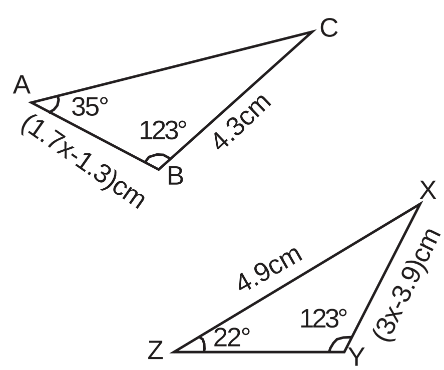
एउटा त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजा अर्को त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजा आपसमा अलग अलग बराबर छन् भने त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । यसलाई समकोण, कर्ण र भुजा (right angle, hypotenues र side) छोटकरीमा स.क.भु. (R.H.S) तथ्य भनिन्छ । चित्रमा $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$



उदाहरण 1

दिइएका जोडा त्रिभुजहरू अनुरूप छन् । x को मान निकाली बाँकी कोण र भुजाहरूको नाप पत्ता लगाऊ :

समाधान



यहाँ ABC र XYZ अनुरूप छन् ।

$\angle A = \angle X = 35°$, $B = \angle Y = 123°$ र $\angle C = \angle Z = 22°$

फेरि AB = XY

अथवा, $(1.7x - 1.3)\text{cm} = (3x-3.9)\text{cm}$

अथवा, $1.7x - 1.3 = 3x - 3.9$

अथवा, $3x - 1.7x = 3.9 - 1.3$

अथवा, $1.3x = 2.6$

अथवा, $x = \dfrac{2.6}{1.3} = 2$

Curriculum Development Centre

त्यस कारण, AB = $1.7x - 1.3 = 1.7 \times 2 - 1.3 = 2.1$cm

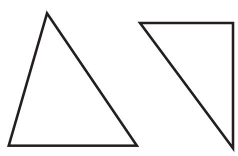
XY = $3x - 3.9 = 3 \times 2 - 3.9 = 2.1$cm

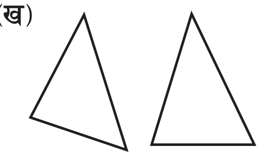
AC = XZ = 4.9cm

BC = YZ = 4.3cm

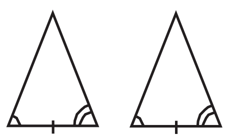
अभ्यास 3.1

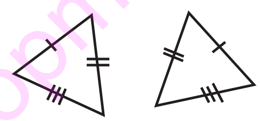
1. तलका जोडी त्रिभुजहरूका भुजाहरू तथा कोणहरू नाप र अनुरूप छन् वा छैनन्, लेख :

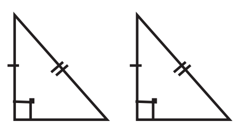
(क) 

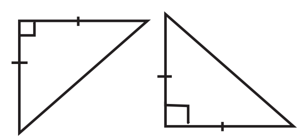
(ख) 

2. तलका जोडी त्रिभुजहरू कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप छन्, लेख :

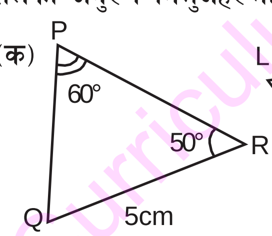
(क) 

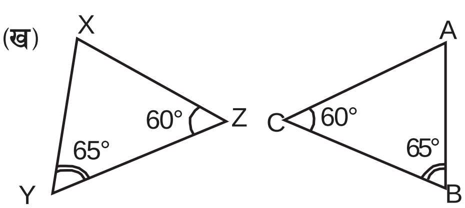
(ख) 

(ग) 

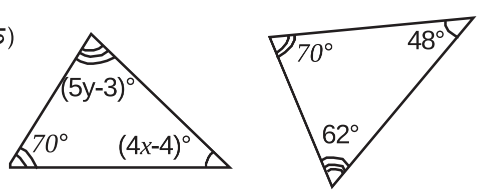
(घ) 

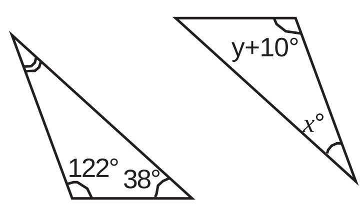
3. तलका अनुरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गत भुजा र सङ्गत कोणहरू छुट्याएर लेख :

(क) 

(ख) 

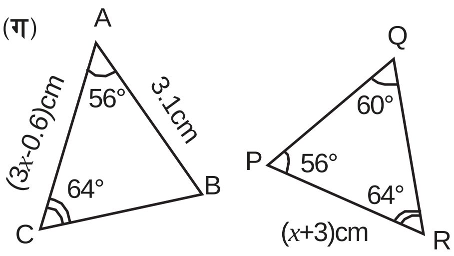
4. दिइएका अनुरूप त्रिभुजहरूमा x र y को मान पत्ता लगाई थाहा नभएका भुजा र कोणहरूको मान निकाल :

(क) 

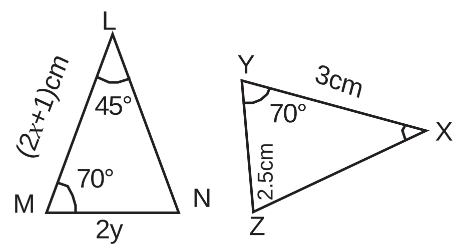
(ख) 

Curriculum Development Centre

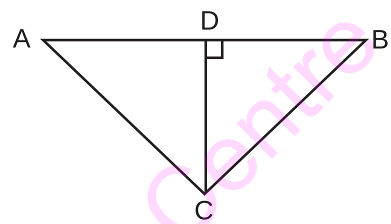
(ग)



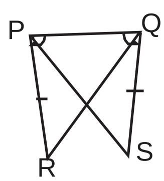
(घ)



5. **दिइएको चित्रमा बिन्दु D रेखा AB को मध्यबिन्दु हो र CD ⊥ AB छ भने कुन तथ्यका आधारमा ΔACD र ΔBCD अनुरूप छन्, देखाऊ :**



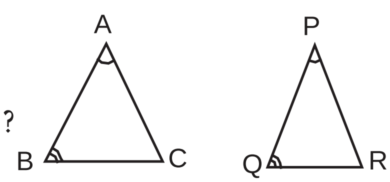
6.



सँगैका चित्रमा ΔPQR र ΔPQS लाई अनुरूप देखाऊ, जहाँ ∠RPQ = ∠PQS र QS = PR छ ।

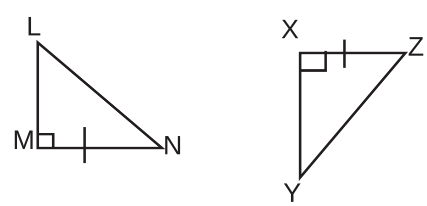
7. **ΔABC र ΔPQR मा ∠A = ∠P र ∠B = ∠Q छ ।**
तलका मध्ये कुन अवस्था थपेपछि ΔABC ≅ ΔPQR हुन्छ ?

(क) ∠C = ∠R (ख) AB = PQ (ग) BC = QR



8. **चित्रमा कुन अवस्था थपेपछि ΔLMN र ΔXYZ अनुरूप हुन्छन् ?**

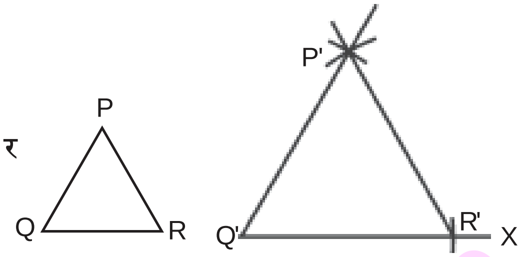
जहाँ ∠M = ∠X = 90° **छ र** MN = XZ **छ ।**
कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप हुन्छन् ?



Curriculum Development Centre

3.2 समरूपता (Similarity)

क्रियाकलाप 1



1. रुलर र सिसाकलमको प्रयोग गरी ΔPQR खिच ।
2. कापीको अर्को ठाउँमा एउटा सिधारेखा Q'X खिच र Q' बाट QR को दोब्बर चाप लाई Q'X मा काट र R' नाम देऊ ।
3. Q' बाट PQ को दोब्बर चाप लिई माथितिर काट र त्यसैगरी R' बाट PR को दोब्बर चापले काट । काटिएको बिन्दुलाई P' नाम देऊ ।
4. P', Q' र P', R' जोड ।

अब दुवै त्रिभुजका कोणहरू र भुजाहरू नाप र तलको जस्तै तालिका बनाई भर :

ΔPQR			$\Delta P'Q'R'$		
कोणको नाप $\angle P$ =	$\angle Q$ =	$\angle R$ =	$\angle P'$ =	$\angle Q'$ =	$\angle R'$ =
भुजाको नाप PQ =	QR =	PR =	P'Q' =	Q'R' =	P'R' =

माथिको तालिकाबाट निम्न लिखित अनुपातहरू पत्ता लगाऊ :

$\frac{PQ}{P'Q'} =$ $\qquad$ $\frac{QR}{Q'R'} =$ $\qquad$ $\frac{PR}{P'R'} =$

$\angle P = \angle P' = \ldots$ $\qquad$ $\angle Q = \angle Q' =$ $\qquad$ र $\angle R = \angle R' = \ldots\ldots..$

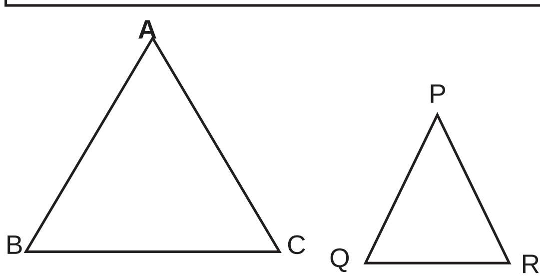
माथिको क्रियाकलापबाट के थाहा पायौ ?

सङ्गती भुजाको अनुपात कस्तो छ, सङ्गती कोणहरूबिच के सम्बन्ध छ ?

आफ्नो निष्कर्ष लेख र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर ।

यहाँ ΔPQR र $\Delta P'Q'R'$ का सङ्गती भुजा समानुपातिक छन् र कोणहरूको नाप बराबर छ । त्यसकारण ΔPQR र $\Delta P'Q'R'$ समरूप छन् । यसलाई $\Delta PQR \sim \Delta P'Q'R'$ लेखिन्छ ।

समरूप त्रिभुजमा सङ्गती भुजाहरू समानुपातिक (अनुपात बराबर) र सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।



यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ भए,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

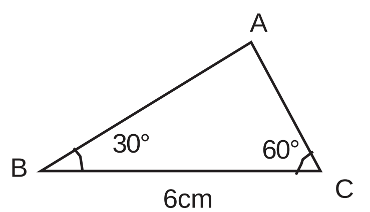
$\angle A = \angle P \quad \angle B = \angle Q \quad \angle C = \angle R$ हुन्छ ।

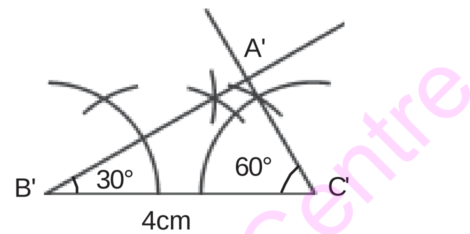
Curriculum Development Centre

3.2.1. त्रिभुजहरू समरूप हुने अवस्थाहरू (Conditions for triangles to be similar)

(क) दुई जोडा सङ्गती कोणहरू बराबर भएमा,

$\triangle ABC$ छ जसमा $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$ र $BC = 6cm$ छ । अर्को $A'B'C'$ रचना गर जसमा $\angle B = 30°$, $\angle C' = 60°$ र $B'C' = 4cm$ छ ।





अब $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का भुजाहरू नाप र तालिकामा भर :

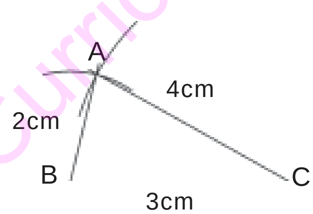
	AB/A'B'		BC/B'C'		AC/A'C'	निष्कर्ष
AB =		BC =		AC =		
A'B' =		B'C' =		A'C' =		

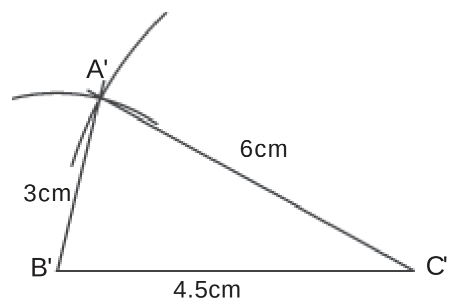
माथिको तालिकाका सबै भुजाहरूको अनुपात बराबर देखियो । सङ्गती भुजाहरू समानुपातिक छन् । त्यसकारण $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ हुन्छ ।

> यदि त्रिभुजहरूमा दुई जोडी सङ्गत कोणहरू बराबर छन् भने सङ्गत भुजाहरू पनि समानुपातिक हुन्छन् र त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । यसलाई को.को. (AA) को तथ्य भनिन्छ ।

(ख) तिन ओटै भुजाहरू समानुपातिक भएमा,

$\triangle ABC$ छ जसमा $AB = 2cm$, $BC = 3cm$ र $AC = 4cm$ छ । $\triangle A'B'C'$ खिच, जसमा $A'B' = 3cm$, $B'C' = 4.5cm$ र $A'C' = 6cm$ छ ।





माथिका $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का कोणहरू नाप र तलको तालिकामा भर :

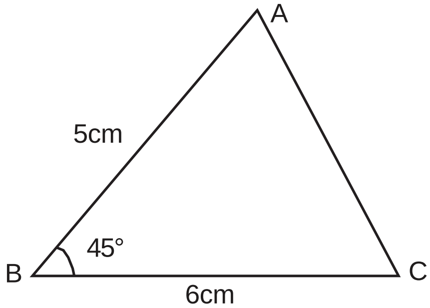
कोणहरू	निष्कर्ष		निष्कर्ष		निष्कर्ष
$\angle A$ =		$\angle B$ =		$\angle C$ =	
$\angle A'$ =		$\angle B'$ =		$\angle C'$ =	

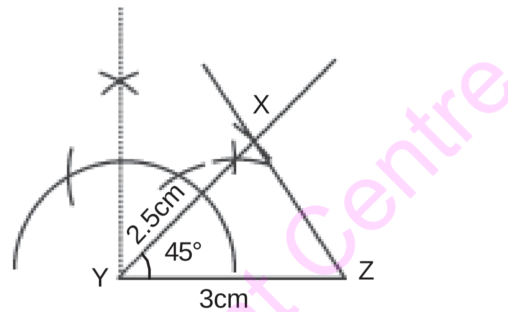
Curriculum Development Centre

तिन ओटै भुजाहरू समानुपातिक भएमा सङ्गती कोणहरू पनि बराबर हुन्छन् । तसर्थ दिइएका चित्रमा $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ भयो । यसलाई भु.भु.भु. समरूपता (SSS similarity) भनिन्छ ।

(ग) **दुई ओटा भुजाहरूको अनुपात र तिनीहरूबिचको कोण बराबर भएमा,**

ΔABC दिइएको छ जसमा $AB = 5cm$, $BC = 6cm$ र $\angle ABC = 45°$ छ । अर्को ΔXYZ रचना गर जसमा $XY = 2.5cm$, $YZ = 3cm$ र $\angle XYZ = 45°$ छ ।





माथिका त्रिभुजमा निम्नानुसारका कोण र भुजाहरू नाप र तालिकामा भर :

					परिणाम
$\angle A =$	$\angle B =$	$\angle C =$	$AC =$	$\frac{AC}{XZ} =$	
$\angle X =$	$\angle Y =$	$\angle Z =$	$XZ =$		

माथीको तालिकाबाट सबै सङ्गत कोणहरू बराबर भए र बाँकी भुजाको अनुपात पनि एउटै आयो । तसर्थ ΔABC र ΔXYZ समरूप भए । यसलाई भुजा, कोण, भुजा (SAS) तथ्य भनिन्छ ।

यदि जोडा त्रिभुजमा दुई भुजाहरूको अनुपात र तिनीहरूबिचको कोण बराबर भएमा ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

उदाहरण 1

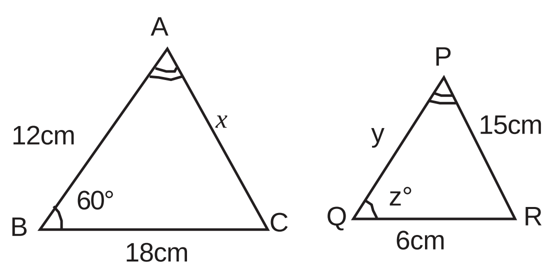
दिइएका त्रिभुजहरू समरूप छन् भने x, y र z को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ ABC ~ PQR छ । तसर्थ भुजाहरू समानुपातिक हुन्छन् ।

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ हुन्छ ।

चित्रानुसार : $\frac{12}{y} = \frac{18}{6} = \frac{x}{15}$.........(i)



पहिलो र दोस्रो अनुपात लिँदा

$\frac{12}{y} = \frac{18}{6}$

अथवा $18 \times y = 12 \times 6$

अथवा $y = \frac{12 \times 6}{18} = 4cm$

Curriculum Development Centre

फेरि दोस्रो र तेस्रो अनुपात लिँदा

$\frac{18}{6} = \frac{x}{15}$

अथवा, $6x = 15 \times 8$

$x = \frac{15 \times 8}{6} = 20cm$

र $\angle B = \angle Q$ हुन्छ ।

$\angle B = 60° = Q$

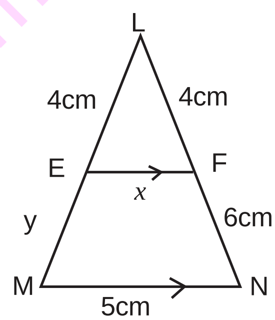
$\therefore \angle Z = 60°$

उदाहरण 2

सँगैको चित्रमा ΔLMN र ΔLEF समरूप छन् भने EF र EM को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, ΔLMN र ΔLEF समरूप छन् ।



तसर्थ, $\frac{LM}{LE} = \frac{MN}{EF} = \frac{LN}{LF}$ हुन्छ ।

$\frac{5}{x} = \frac{10}{4}$

अथवा, $\frac{y+4}{4} = \frac{5}{x} = \frac{6+4}{4}$ हुन्छ ।

पहिलो र तेस्रो अनुपात लिँदा,

$\frac{y+4}{4} = \frac{10}{4}$

अथवा, $y + 4 = 10$

अथवा, $y = 10 - 4 = 6cm$

फेरि दोस्रो र तेस्रो अनुपात लिँदा,

अथवा, $10x = 20$

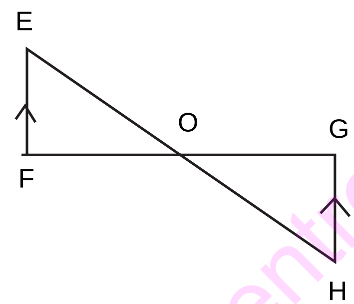
अथवा, $x = \frac{20}{10}$

$\therefore x = 2cm$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 3

चित्रमा EF || GH र $\angle EFO = \angle OGH$ छ भने प्रमाणित गर $\Delta EFO \sim \Delta OGH$



प्रमाण : यहाँ EF || GH छ तसर्थ EH छेदक हो ।

(1) $\angle FEO = \angle GHO$ हुन्छ । (एकान्तर कोण भएकाले)

(2) $\angle EFO = \angle OGH$
दिएको

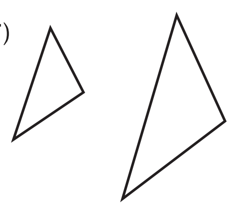
(3) $\angle EOF = \angle GOH$ (शीर्षाभिमुख कोणहरू)

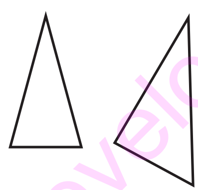
(4) ΔEFO र ΔGOH का सङ्गती कोणहरू बराबर भए,

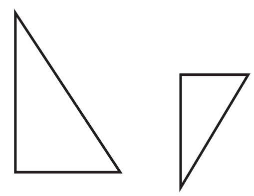
तसर्थ, $\Delta EFO \sim \Delta GHO$ हुन्छ ।

अभ्यास 3.2

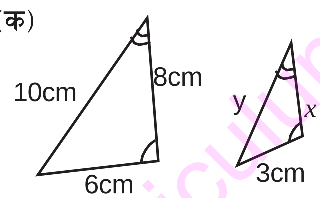
1. तल दिइएका जोडा त्रिभुजहरूको कोण र भुजाहरू नाप र समरूप छन् वा छैनन्, पत्ता लगाऊ :

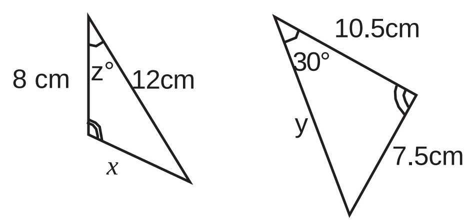
(क)


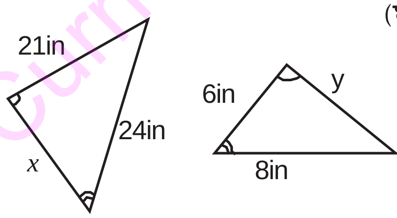
(ख)


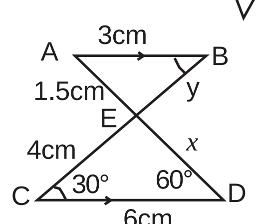
(ग)


2. दिइएका जोडा समरूप त्रिभुजहरूमा **x, y** र **z** को मान पत्ता लगाऊ :

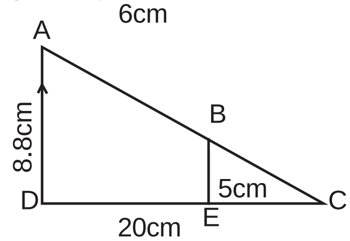
(क)


(ख)


(ग)


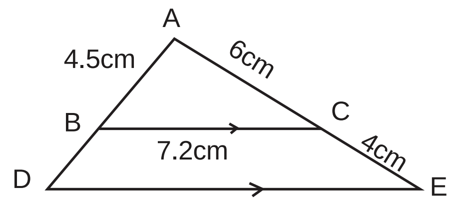
(घ)


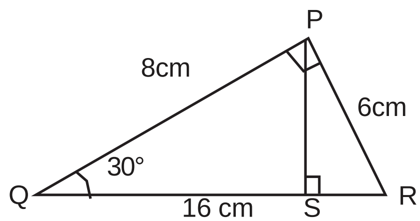
3. दिइएको चित्रमा **$\Delta BEC \sim \Delta ADC$** छ **CD = 20cm AD = 8.8cm** र **EC = 5cm** छ भने **BE** को मान पत्ता लगाऊ ।



Curriculum Development Centre

4. दिइएको चित्रमा यदि BC || DE र $\angle CED = 30°$ छ भने (क) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ देखाऊ । (ख) DE र $\angle ACB$ को नाप पत्ता लगाऊ ।



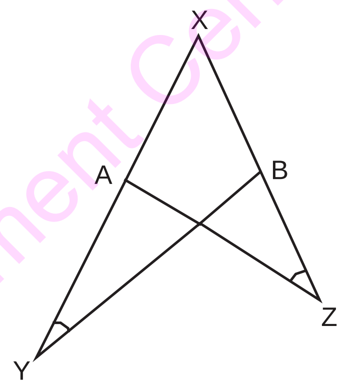


5. चित्रमा $PS \perp QR$ छ र $\Delta PQR \sim \Delta PSR$ छ भने PS को नाप पत्ता लगाऊ । यदि $\angle PQR = 30°$ भए, $\angle RPS$ कति होला ?

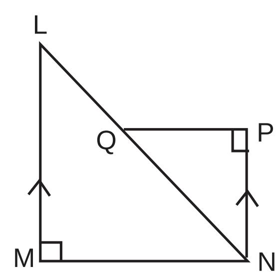
6. चित्रमा $\angle Y = \angle Z$, XY = 20cm, AY = 15.5cm र XZ = 15cm भए,

(i) $\Delta XAZ \sim \Delta XBY$ देखाऊ ।

(ii) XB को नाप पत्ता लगाऊ ।



7. सँगैको चित्रमा ML || NP छ $\angle LMN = \angle NPQ = 90°$ छ भने, $\Delta LMN \sim \Delta NPQ$ देखाऊ ।



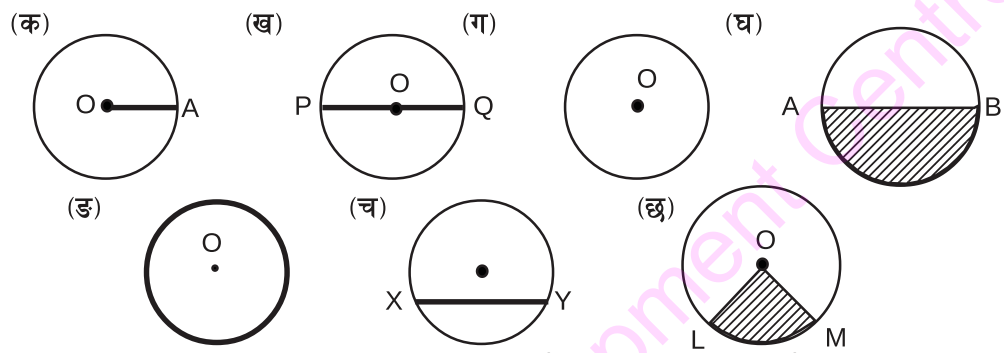
Curriculum Development Centre

पाठ 4

वृत्त (Circle)

4.0. पुनरवलोकन (Review)

तलका वृत्तहरूमा अङ्कित भाग र छाया पारिएको भागको नाम लेख र समूहमा छलफल गर :

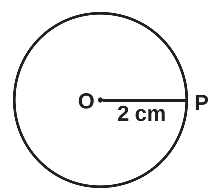


वृत्तका विभिन्न भागका बारेमा हामीले अघिल्लो कक्षामा नै अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी वृत्तको परिधि र क्षेत्रफलका बारेमा अध्ययन गर्दछौँ ।

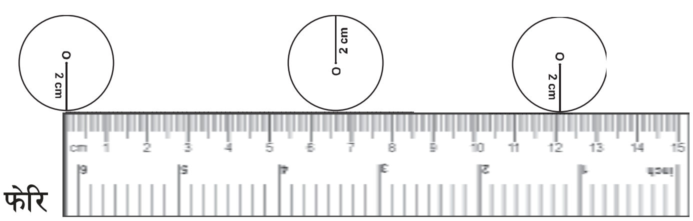
4.1. वृत्तको परिधि र व्यासको सम्बन्धको खोजी

वृत्तको परिधि (Circumference of Circle)

क्रियाकलाप 1



5/5 जनाको समूह निर्माण गरी प्रत्येकले क्रमश: बाक्लो कागजमा क्रमश: 2 cm, 2.5 cm, 3 cm, 3.6 cm, 4 cm अर्धव्यास भएका वृत्त खिच र कैँचीको सहायताले त्यसलाई काट । त्यसपछि चित्रमा देखाए झैँ एउटा अर्धव्यास खिच ।



चित्रमा देखाए झैँ बिन्दु P रुलरको प्रथम रेखामा पर्ने गरी राख र उक्त वृत्तलाई गुडाऊ । उक्त वृत्तलाई तबसम्म गुडाउ कि बिन्दु P ले फेरि स्केलको अर्को रेखालाई छोओस् । त्यसपछि चित्रमा देखाए झैँ सुरुको बिन्दु र अन्तिम बिन्दु टिपोट गर । ती दुई बिन्दुबिचको लम्बाइ नै वृत्तको परिधि हुन्छ ।

वृत्तको परिधि (c) र व्यास (d) नाप, [जहाँ व्यास (d) = 2r हुन्छ] । अब क्रमश: तालिकामा प्रस्तुत गर :

Curriculum Development Centre

समूह	वृत्तको व्यास (d)	वृत्तको परिधि (C)	$\frac{c}{d}=$
(क)	4 cm		
(ख)	5 cm	15.70	$\frac{15.70}{5}=3.14$
(ग)	6 cm		
(घ)	7 cm		
(ङ)	8 cm		

यसरी माथिको तालिकाबाट के प्रस्ट हुन्छ भने वृत्तको व्यास जतिसुकै भए तापनि उक्त वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपात सधैँ 3.14 को आसपासमा हुन्छ । तसर्थ परिधि र व्यासको अनुपातलाई 3.14 मानिन्छ । वा C /d = 3.14 (अचल राशि) हुन्छ । यसलाई ग्रिक अक्षर π (Pie वा पाई) ले जनाइन्छ । यसलाई $\frac{22}{7}$ पनि लेखिन्छ ।

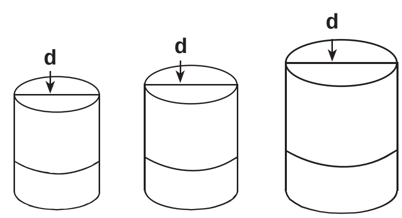
त्यसकारण, $\frac{c}{d}=\pi$ हुन्छ ।

$\therefore C = \pi d$ जहाँ $\pi=\frac{22}{7}$ हुन्छ ।

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको अर्धव्यास व्यासको आधा हुन्छ । तसर्थ, d = 2r, $\therefore$ C = $2\pi r$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

3/3 जनाको समूह बनाऊ । त्यसपछि प्रत्येक समूहले फरक आकारका बेलनाकार वस्तुहरू लेऊ । प्रत्येक समूहले उक्त बेलनाकार वस्तुको आधारको व्यास नाप । त्यसपछि चित्रमा देखाए जस्तै गरी उक्त बेलनाकार वस्तुको आधारको नजिक वरिपरि एउटा धागो बाँध । त्यो धागोको लम्बाइ उक्त आधार वृत्तको परिधि बराबर हुन्छ । प्रत्येक समूहले त्यसपछि आफ्नो समूहले लिएको परिधि (धागो) र व्यासको लम्बाइको अनुपात प्रस्तुत गर । उक्त अनुपात प्राय: सबैमा एउटै 3.14 को वरिपरि अर्थात् $\frac{22}{7}$ पाइन्छ । त्यसलाई नै π (पाई) भनिन्छ ।



तसर्थ $\pi = \frac{\text{C (परिधि)}}{\text{d (व्यास)}}$ लेखिन्छ ।

$\therefore C = \pi d = 2\pi r$ [d = 2r]

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

यदि एउटा वृत्तको व्यास 9 cm छ भने उक्त वृत्तको परिधि कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधान

यहाँ दिएको वृत्तको व्यास (d) = 9 cm

वृत्तको परिधि (C) = ?

हामीलाई थाहा छ कि C = πd र $\pi = \frac{22}{7}$

$C = \frac{22}{7} \times 9 = 28.30$ अतः वृत्तको परिधि (C) = 28.30cm हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा बेलनाकार ट्याङ्कीको आधारको परिधि 471cm छ भने उक्त ट्याङ्कीको आधारको अर्धव्यास कति होला ? (π = 3.14 प्रयोग गर्ने ।)

समाधान

यहाँ बेलनाकार ट्याङ्कीको आधारको परिधि (C) = 471 cm

„ „ „ अर्धव्यास (r) = ?

हामीलाई थाहा छ परिधि (c) = 2πr

अथवा, 471 cm = 2 × 3.14 × r

अथवा, 6.28 r = 471 cm

अथवा, $r = \frac{471}{6.28}$cm = 75 cm.

अतः उक्त ट्याङ्कीको अर्धव्यास (r) = 75 cm हुन्छ ।

अभ्यास 4.1

1. **π = 3.14 प्रयोग गरी दिइएका प्रत्येक वृत्तका परिधि पत्ता लगाऊ :**

   (क) अर्धव्यास = 3cm (ख) व्यास = 5cm (ग) अर्धव्यास = 4.5 cm

   (घ) व्यास = 10 inch (ङ) अर्धव्यास = 12m (च) व्यास = 18ft.

2. **π = 3.14 प्रयोग गरी दिइएको परिधिका आधारमा वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाऊ :**

   (क) C = 12.56 cm (ख) C = 18.84 inch (ग) C = 34.54 cm

   (घ) C = 65.94 ft. (ङ) C = 113.04 cm (च) C = 376.8 yd

Curriculum Development Centre

3. एउटा वृत्ताकार खेल मैदानको अर्धव्यास 84 मिटर भए उक्त मैदानको परिधि कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

4. अर्धव्यास 100 मिटर भएको वृत्ताकार धावन मार्गमा धावकले एक चक्कर लगाउँदा कति मिटर दुरी पार गर्छ होला ? [$\pi = 3.14$]

5. आधारको परिधि 157 ft. भएको वृत्ताकार भवनको व्यास कति होला ? [$\pi = 3.14$]

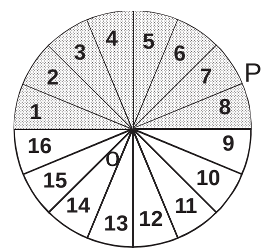
6. एउटा वृत्ताकार नर्सरीको व्यास 56 m. छ । त्यसलाई बाहिरबाट वरिपरि बार लगाउन कति मिटर तार चाहिएला, यदि 704 m. तार उपलब्ध छ भने कति पटक वरिपरि तार बार लगाउन सकिएला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

7. एउटा मोटरसाइकलको चक्का 150 चक्कर लगाउँदा 396 मि. दुरी पार गर्छ भने उक्त मोटरसाइकलको चक्काको व्यास कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

8. एउटा बेलनाकार काठको ठेकीको वरिपरि 3 फन्कोमा तारले बाँध्दा 132 inch लामो तार चाहिन्छ भने उक्त ठेकीको व्यास कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

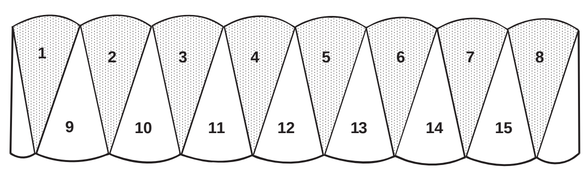
4.2. वृत्तको क्षेत्रफल (Area of circle)

क्रियाकलाप 3



चित्र नं. १

अर्धव्यास OP भएको वृत्तको व्यासलाई आधार मानेर वृत्तलाई बराबर 16 भागमा विभाजन गर र 1 देखि 16 नम्बर दिने चित्रमा देखाए जस्तै व्यासबाट माथिका भागहरूमा फरक रङ्गले रङ्गाऊ । त्यसपछि कैंचीको सहायताले 16 ओटा भागलाई काट । सबै काटिसकेपछि एउटा पछि अर्को गर्दै 15 टुक्राहरूलाई चित्रमा देखाए झैं मिलाऊ । त्यसपछि अन्तिम टुक्रालाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर र चित्र नं. 2 को जस्तै दुवै पट्टि मिलाएर राख । यसरी एउटा वृत्तलाई आयताकार रूपमा मिलाउन सकिन्छ ।



चित्र नं. २

जसमा, लम्बाइ (l) = परिधिको आधा

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$

चौडाइ (b) = वृत्तको अर्धव्यास = r छ ।

अब, हामीलाई थाहा छ,

आयतको क्षेत्रफल (A) = लम्बाइ (l) x चौडाइ (b)

$$= \pi r \times r$$

$$= \pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

त्यसैले वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2 वर्ग एकाइ

Curriculum Development Centre

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको अर्धव्यास व्यासको आधा हुन्छ । $r = \frac{d}{2}$

तसर्थ, $A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$A = \frac{\pi d^2}{4}$ वर्ग एकाइ

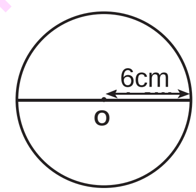
उदाहरण 3

यदि एउटा वृत्तको व्यास 12cm छ भने उक्त वृत्तको क्षेत्रफल कति होला ? ($\pi = 3.14$)

समाधान

यहाँ, वृत्तको व्यास (d) = 12 cm.

अर्धव्यास $r = \frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$



अब, हामीलाई थाहा छ । वृत्तको क्षेत्रफल (A)= πr^2 वर्ग एकाइ

$= 3.14 \times 6 \times 6\ cm^2$

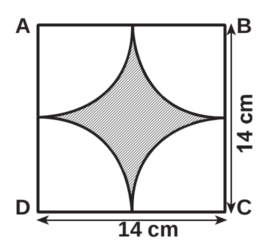
$= 113.04\ cm^2$

उदाहरण 4

दिइएको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ । ($\pi = 3.14$)

समाधान

यहाँ, ABCD एउटा वर्ग हो । जसमा AB = BC = 14 cm छ ।



अब, वर्ग ABCD को क्षेत्रफल (A_1) $= l^2 = (14)^2 cm^2$

$= 14 \times 14\ cm^2$

$= 196\ cm^2$

फेरि यहाँ चित्रमा 4 ओटा एक चौथाइ वृत्तहरू छन् ।

जसमा अर्धव्यास $(r) = \frac{14}{2} = 7cm$ छ ।

तसर्थ एक चौथाइ वृत्तको क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$ वर्ग एकाइ

$= \frac{1}{4}(3.14) \times 7 \times 7 cm^2$

$= \frac{1}{4}(153.86) cm^2$

Curriculum Development Centre

त्यस्तै, 4 ओटा चौथाइ वृत्तहरूको जम्मा क्षेत्रफल $(A_2) = 4 \times \frac{1}{4}$ (153.86) cm^2

$= 153.86\ cm^2$

अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल (A) $= A_1 - A_2$

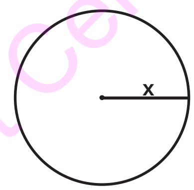
$= (196 - 153.86)\ cm^2$

$= 42.14\ cm^2$

उदाहरण 5

यदि एउटा वृत्ताकार पौडी पोखरीको परिधि 125.6 m छ भने उक्त पोखरीको पिँधको अर्धव्यास र क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ । $(\pi = 3.14)$

समाधान



यहाँ वृत्ताकार पोखरीको परिधि (C) = 125. 6 m

अर्धव्यास (r) = ?

अब, परिधि (C) = 125.6 m

अथवा, $2\pi r = 125.6$ m $[\therefore c = 2\pi r]$

अथवा, $2 \times 3.14 \times r = 125.6$

अथवा, $r = \frac{125.6}{2 \times 3.14} m = 20m$

तसर्थ, वृत्तको अर्धव्यास (r) = 20 m

अर्थात,

पोखरीको अर्धव्यास (r) = 20 m

फेरि वृत्ताकार पोखरीको पिँधको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2 वर्ग एकाइ

$= 3.14 \times 20 \times 20\ m^2$

$= 1256 m^2$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 4.2

1. **तलका वृत्तहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :** [π = 3.14]

(क) अर्धव्यास = 3 cm. (ख) व्यास = 5 cm. (ग) अर्धव्यास = 8 ft.

(घ) व्यास = 12 inch (ङ) व्यास = 18m. (च) व्यास = 20km.

(छ) व्यास = 15 mm (ज) व्यास = 22 cm. (झ) अर्धव्यास = 16 yd

2. यदि एउटा वृत्ताकार कोठाको व्यास 14 मिटर छ भने उक्त कोठाको क्षेत्रफल कति होला ? [π = 3.14]

3. निम्न लिखित परिधि भएमा वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ : [π = 3.14]

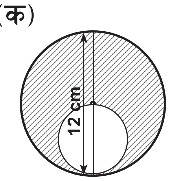
(क) 34.54 cm (ख) 65.94m (ग) 1884 inch

(घ) 113.04m (ङ) 376.80 ft.

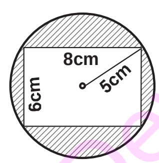
4. एउटा बेलनाकार कचौराको आधारको व्यास 9cm भए उक्त कचौराको आधारको सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? (π = 3.14)

5. तलका चित्रहरूमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल :

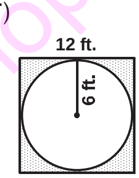
(क)



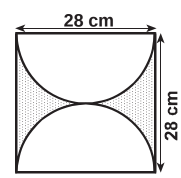
(ख)



(ग)



(घ)



6. एउटा बेलनाकार ट्याङ्कीको पिँधको क्षेत्रफल 154 वर्ग फिट छ भने उक्त ट्याङ्कीको परिधि र अर्धव्यास पत्ता लगाऊ । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

7. एउटा 153.86 m^2 क्षेत्रफल भएको वृत्ताकार खेल मैदानलाई ढलान गरियो भने उक्त मैदानको ढलान गरेको भागको व्यास कति होला र उक्त मैदानको ढलानको घेरा कति मिटर होला ?

8. शर्मिलाले 5cm अर्धव्यास भएको एउटा वृत्त खिचिन् । त्यसैगरी प्रकाशले पनि 7cm अर्धव्यास भएको अर्को वृत्त खिचे । अब कसले खिचेको वृत्तको क्षेत्रफल धेरै छ र कतिले धेरै छ ?

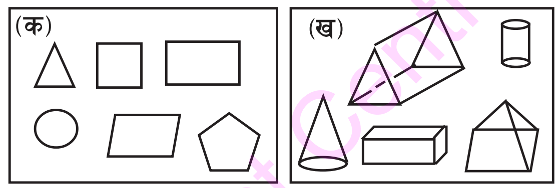
9. आफ्नो कापीमा एउटा 7.5 cm अर्धव्यास भएको वृत्त खिचेर रङ लगाऊ । त्यसपछि रङ्गाएको भागको क्षेत्रफल निकाल ।

Curriculum Development Centre

पाठ 5

ठोस आकृतिहरू (Solid Shapes)

5.0 पुनरवलोकन (Review)



सँगैको तालिकामा हेर र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर :

१. तालिका (क) मा कस्ता प्रकारका आकृतिहरू छन् ?

२. तालिका (ख) मा कस्ता प्रकारका आकृतिहरू छन् ?

३. तालिका (क) र (ख) मा भएका आकृतिहरूको नामको सूची बनाऊ ।

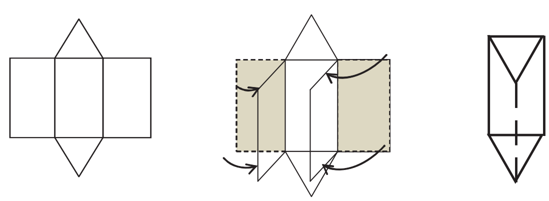
४. तालिका (क) र (ख) का आकृतिहरूबिच के फरक छ ?

माथिको तालिकामा (क) मा सबै समतलीय आकृति (Plane Shapes) छन् भने तालिका (ख) मा ठोस आकृतिहरू रहेका छन् । जसअन्तर्गत घन (Cube), षड्मुखा (cuboid), बेलना (Cylinder), गोला (Sphere), सोली (Cone) का बारे अघिल्लो कक्षामा नै अध्ययन गऱ्यौँ । अब हामी त्रिभुजकार प्रिज्म र पिरामिडहरूका बारेमा अध्ययन गरौँ ।

5.1 त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिड (Triangular Prism and Pyramid)

(क) त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism)

कार्ड बोर्डमा एउटा 12 cm लम्बाइ र 8 cm चौडाइ भएको आयत बनाऊ । चित्रमा देखाए जस्तै लम्बाइतर्फबाट बराबर तिन भागमा विभाजन गर । त्यसपछि चित्रमा देखाए जस्तै बिचको भागको तल र माथि समबाहु त्रिभुज बनाऊ । कैँचीले उक्त आकृतिलाई काट र रेखाहरूबाट पट्याऊ ।



कस्तो आकृति बन्यो, हेरी तलका प्रश्नको उत्तर लेख :

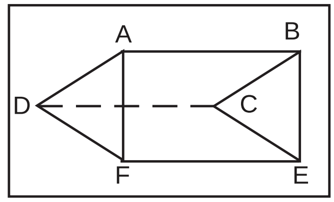
(क) यसमा कति ओटा त्रिभुजाकार सतह छन् ?

(ख) यसमा कति ओटा आयताकार सतह छन् ?

(ग) यसको नाम के होला ?

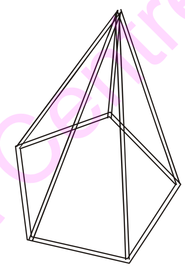
Curriculum Development Centre

यसरी दुई ओटा समानान्तर त्रिभुजाकार आकृतिहरू र तिन ओटा आयताकार आकृतिहरू मिलेर बनेका ठोस आकृतिलाई त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism) भनिन्छ । सँगैको चित्रमा ADF र BCE त्रिभुजाकार सतह हुन् भने ABCD, CDFE र ABEF आयताकार सतह हुन् । त्यस कारण यो त्रिभुजाकार प्रिज्म हो ।



(ख) **पिरामिड (Pyramid)**

जुस पाइपहरू वा सिन्काहरू प्रयोग गरेर एउटा नियमित पञ्चभुज तयार पार । त्यसपछि बराबर नापका पाँच ओटा पाइपका टुक्रा वा सिन्काहरू लेऊ र एक छेउ पञ्चभुजको शीर्षबिन्दुमा र अर्को छेउहरूलाई माथि चित्रमा देखाए झैँ एकै ठाउँमा पर्ने गरी जोड यसरी कस्तो आकृति तयार हुन्छ हेर र दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाऊ ।



(क) यसमा कति ओटा त्रिभुजाकार सतह छन् ?

(ख) यसको आधारमा आकृति कुन आकारको छ ?

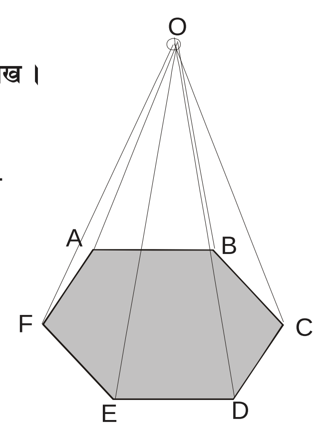
(ग) आकृतिको नाम के होला ?

कुनै एउटा बहुभुज आधार भएको र अन्य सतहहरू त्रिभुजाकार भएको ज्यामितीय ठोस आकृतिलाई पिरामिड (pyramid) भनिन्छ । आधारको बहुभजको भुजाको सङ्ख्याअनुसार यसको नाम पनि फरक हुन्छ ।

- यदि आधार आयतकार भए यसलाई आयताकार आधार पिरामिड (rectangular based pyramid) भनिन्छ ।
- यदी आधार वर्गाकार भए यसलाई वर्गाधार पिरामिड (square based pyramid) भनिन्छ ।
- आधार पञ्चभुज भए पञ्चभुजाधार पिरामिड (pentagonal based pyramid) भनिन्छ ।
- आधार षट्भुज भए षट्भुजाधार पिरामिड (hexagonal based pyramid) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको षट्भुजाधार पिरामिडका आधार र अन्य सतहहरूको नाम लेख ।



समाधान

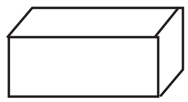
षट्भुजाधार पिरामिडको आधार षठ्भुजा ABCDEF हो र यसका अन्य सतहहरू त्रिभुजहरू हुन्छन् र तिनीहरू यस प्रकार छन् :

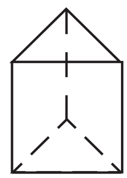
AOB, ΔBOC, ΔCOD, ΔDOE, ΔFOF र ΔFOA

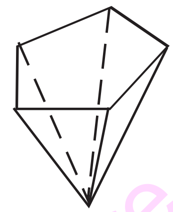
Curriculum Development Centre

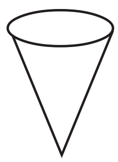
अभ्यास 5.1

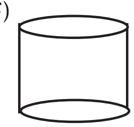
1. दिइएका ठोस आकृतिहरूको नाम लेख :

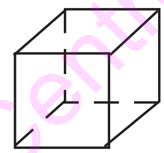
(क) 

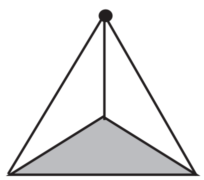
(ख) 

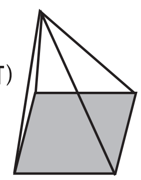
(ग) 

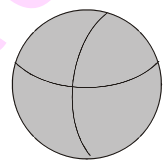
(घ) 

(ङ) 

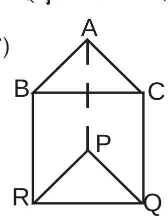
(च) 

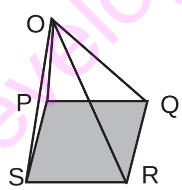
(छ) 

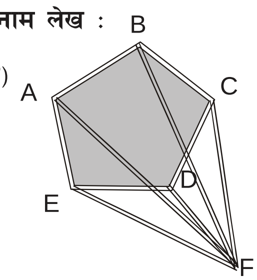
(ज) 

(झ) 

२. तल दिइएका प्रिज्म र पिरामिडको आधार र अन्य सतहहरूको नाम लेख :

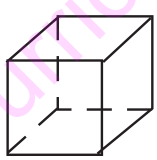
(क) 

(ख) 

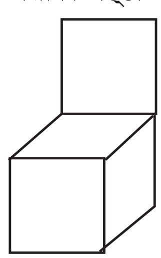
(ग) 

5.2. ठोस आकृतिका जालीहरू (Nets of solid figures)

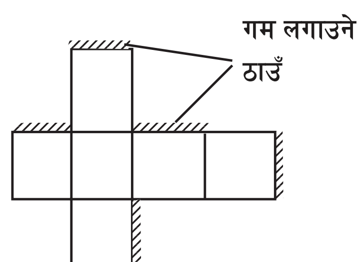
एउटा चकको बट्टा वा मसीको बट्टा लेऊ । चित्रमा देखाइए झैँ यसलाई खोल ।



(क)



(ख)



(ग)

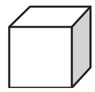
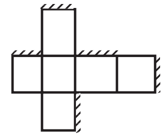
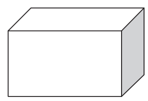
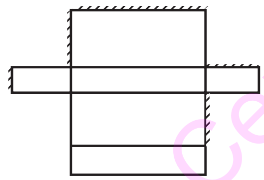
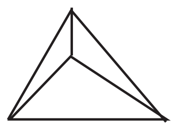
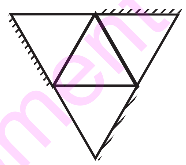
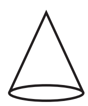
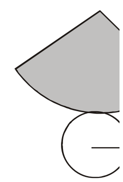
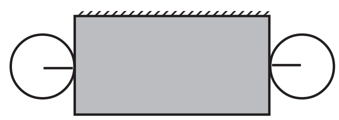
चित्र (क) र चित्र (ग) मा के फरक छ, लेख ।

यहाँ, चित्र (क) ठोस आकृति (घन) हो भने चित्र (ग) चित्र (क) को समतलीय आकृति हो ।

यसरी कुनै पनि ठोस आकृतिलाई समतलीय आकृतिमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ । उक्त समतलीय आकृतिलाई नै दिइएको ठोस आकृतिको जाली (Net) भनिन्छ ।

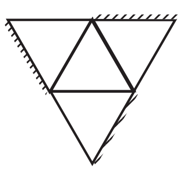
Curriculum Development Centre

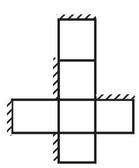
तलको तालिकामा केही ठोस आकृतिहरू र तिनीहरूका जालीहरू दिइएका छन् :

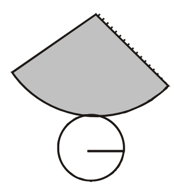
आकृतिको नाम	चित्र	जाली (nets)
घन (cube)		
षट्मुखा (Cuboid)		
टेट्राहेड्रन (tetrahedron)		
सोली (Cone)		
बेलना (Cylinder)		

अभ्यास 5.2

1. तल दिइएका जालीहरू कुन ठोस आकृतिका हुन्, लेख :

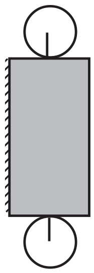
(क) 

(ख) 

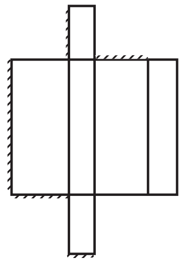
(ग) 

Curriculum Development Centre

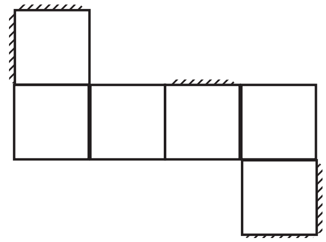
(घ)



(ङ)



(च)



2. तलका ठोस आकृतिहरूको जाली ट्रेस गर :

(क) **घन** (Cube) (ख) **बेलना** (Cylinder) (ग) **षड्मुखा** (Cuboid)

(घ) **सोली** (Cone) (ङ) **त्रिभुजाकार पिरामिड** (Triangular pyramid)

3. बाक्लो कागजको प्रयोग गरी घन, षड्मुखा, टेट्राहेडन, सोली र बेलनाका जालीहरू ट्रेस गर । कैँचीले काटी ठोस आकृति बनाऊ र उक्त आकृतिको चित्र कापीमा उतार ।

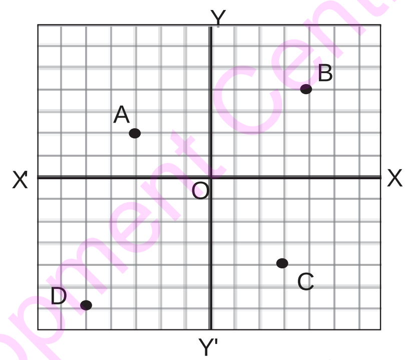
4. तिमीहरूले आआफ्नो घरमा वा समुदायमा भएका वा देखेका वा प्रयोग गर्दै आएका विभिन्न ठोस आकृति भएका वस्तुहरूको सूची तयार पार ।

Curriculum Development Centre

पाठ 6 निर्देशाङ्कहरू (Co-ordinates)

6.0. पुनरवलोकन (Review)

सँगैको चित्रको अध्ययन गरी दिएका प्रश्नको उत्तर देऊ :



(क) XOX' लाई के भनिन्छ ?

(ख) YOY' लाई के भनिन्छ ?

(ग) बिन्दु O बाट बिन्दु B मा पुग्न कति एकाइ दायाँ गएर कति एकाइ माथि जानुपर्छ ।

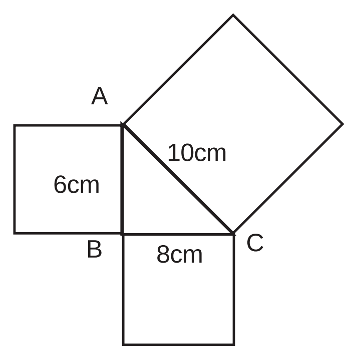
(घ) बिन्दु O, A, B, C र D का निर्देशाङ्कहरू के के हुन् ?

(ङ) बिन्दु (5,-5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर ।

यसरी X-अक्ष, Y-अक्ष बिन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउने र बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्ने तरिकाबारे अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी पाइथागोरस साध्य र दुई बिन्दुबिचको दुरीका बारेमा अध्ययन गर्छौं ।

6.1 पाइथागोरस साध्य र सोको प्रयोग (Pythagoras Theorem and its Application)

पाइथागोरस साध्य (Pythagoras Theorem)



समकोण त्रिभुज ABC खिचौँ । जसमा A समकोण छ । AB= 6cm, BC=8cm र AC= 10cm छ ।

चित्रमा देखाए जस्तै तिन ओटै भुजाहरूमा वर्गहरू खिचौँ र प्रत्येक भुजामा रहेका वर्गहरूको क्षेत्रफल निकालौँ ।

भुजा AB मा भएको वर्गको क्षेत्रफल $= (AB)^2$ वर्ग एकाइ

$=(6cm)^2 = 36cm^2$

भुजा BC मा भएको वर्गको क्षेत्रफल $= (BC)^2$ वर्ग एकाइ

$= 64cm^2$ (किन ?)

भुजा AC मा भएको वर्गको क्षेत्रफल $= (AC)^2$ वर्ग एकाइ

$=100cm^2$

अब, $(AB)^2 + (BC)^2 = 36 + 64 = 100cm^2 = (AC)^2$

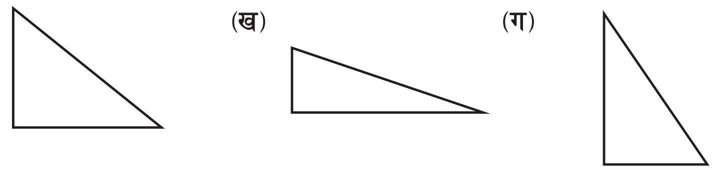
तसर्थ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

दोस्रो तरिका

फरक फरक भुजाहरूको नाप भएका तिन ओटा समकोणी त्रिभुजहरू खिच :

(क) (ख) (ग)

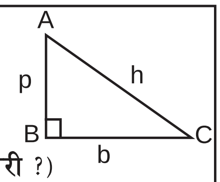


अब रुलर प्रयोग गरी तिन ओटै त्रिभुजका भुजाहरू नाप र तलको तालिकामा भर :

चित्र नं.	AB	AB^2	BC	BC^2	AC	AC^2	$AB^2 + BC^2$	परिणाम
(क)								
(ख)								
(ग)								

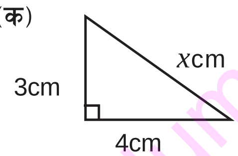
माथिका क्रियाकलापहरूबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर ।

कुनै पनि समकोणी त्रिभुजमा लम्ब र आधारमा बन्ने वर्गको क्षेत्रफलको योगफल उक्त त्रिभुजको कर्णमा बन्ने वर्गको क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ । चित्रमा AB= p, BC=b र AC= h भए $p^2 + b^2 = h^2$ हुन्छ, र p, b र h लाई पाइथागोरियन ट्रिपल्स भनिन्छ । जस्तै : 3, 4, 5 पाइथागोरियन ट्रिपल्स हुन् । (कसरी ?)



उदाहरण 1 **दिइएका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ ।**

(क)



समाधान

यहाँ, p = 3cm b = 4cm

h = x = ?

अब, हामीलाई थाहा छ,

पाइथागोरस साध्यअनुसार, $h^2 = p^2 + b^2$ हुन्छ ।

अथवा, $x^2 = 3^2 + 4^2$

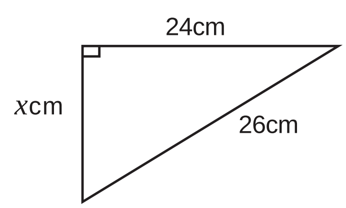
अथवा, $x^2 = 9 + 16$

अथवा, $x^2 = 25$

अथवा, $x = \sqrt{25}$ cm = 5 cm

$\therefore x = 5$cm

(ख)



समाधान

यहाँ, p = 24cm b = x = ?

h = 26 cm

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$h^2 = p^2 + b^2$

अथवा, $26^2 = 24^2 + x^2$

अथवा, $x^2 = (26^2 - 24^2)$

अथवा, $x^2 = (676 - 576)$

अथवा, $x^2 = 100$

$\therefore x = 10$cm

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

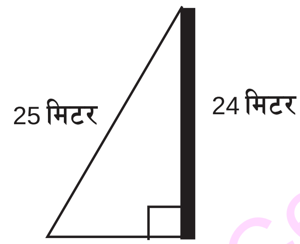
एउटा 24 मिटर अग्लो खम्बाको टुप्पोबाट उक्त खम्बालाई टेवा दिनका लागि 25 मिटर लामो तार जमिनमा गाडिएको छ भने उक्त तार गरिएको स्थान र खम्बाको फेदबिचको दुरी कति होला ?

समाधान

यहाँ, खम्बाको लम्बाइ (p) = 24 मिटर

तारको लम्बाइ (h) = 25 मिटर

तार र खम्बाको बिचको दुरी (b) = ?



हामीलाई थाहा छ, $p^2+b^2 = h^2$

अथवा, $b^2 = h^2 - p^2$

अथवा, $b^2 = (25m)^2 - (24m^2)$

$= (625- 576)\ m^2$

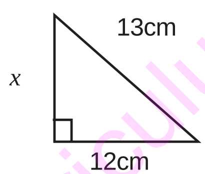
$b^2 = 49m^2$

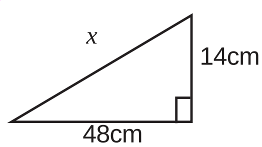
$\therefore b = 7m$

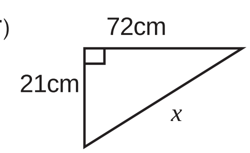
अत : खम्बाको फेद र तार गाडिएको स्थानबिचको दुरी = 7 मिटर

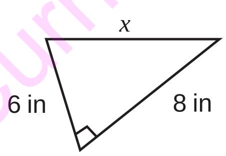
अभ्यास 6.1

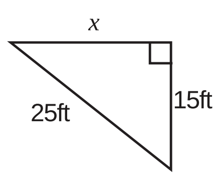
1. तलका समकोणी त्रिभुजहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ :

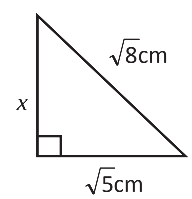
(क)


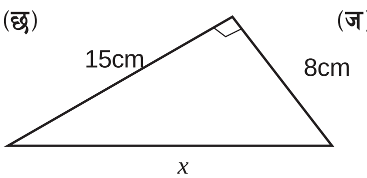
(ख)


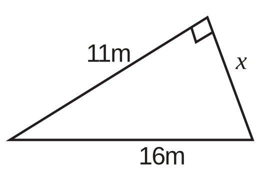
(ग)


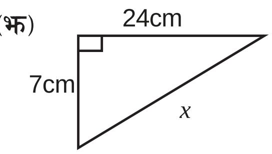
(घ)


(ङ)


(च)


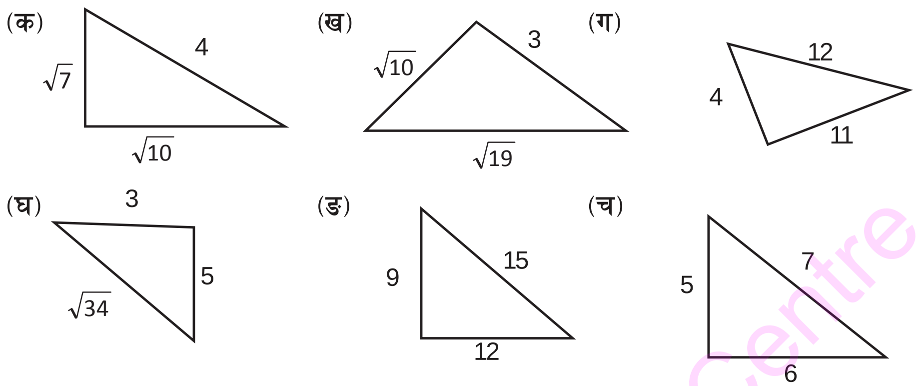
(छ)


(ज)


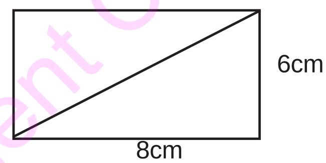
(झ)


Curriculum Development Centre

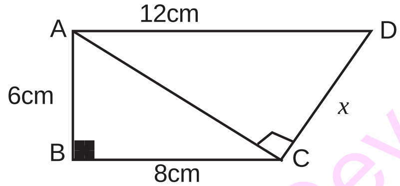
2. पाइथागोरस साध्य प्रयोग गरेर तलका त्रिभुजहरू समकोणी हुन् वा होइनन् जाँचेर हेर :



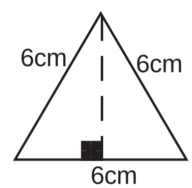
3. यदि एउटा आयतको लम्बाइ 8cm र चौडाइ 6cm छ भने उक्त आयतको विकर्णको लम्बाइ कति होला ?



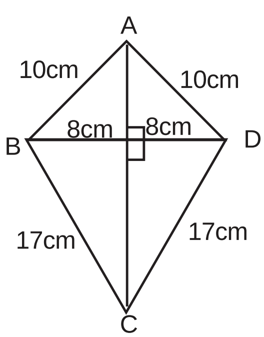
4. सँगैको चित्रमा x को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाऊ ।



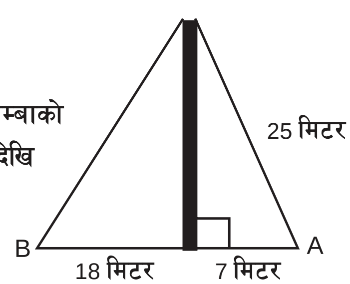
5. एउटा समवाहु त्रिभुजको प्रत्येक भुजाको लम्बाइ 6cm छ भने उक्त त्रिभुजको शीर्षकोणका आधारमा खिचिएको लम्बको लम्बाइ कति होला ?



6. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा चङ्गा हो । जसमा AC को मान कति होला ?



7. एउटा बिजुलीको खम्बाबाट तार झरेर एक छेउले जमिनमा खम्बाको फेददेखि 7 मिटर टाढा बिन्दु A मा छोयो । यदि खम्बाको टुप्पोदेखि जमिनसम्मको तारको लम्बाइ 25 मिटर भए खम्बाको उचाइ कति होला, साथै अर्को छेउले खम्बोदखि 18m पर जमिनको बिन्दु B मा छोयो भने तारको जम्मा लम्बाइ कति होला ।



Curriculum Development Centre

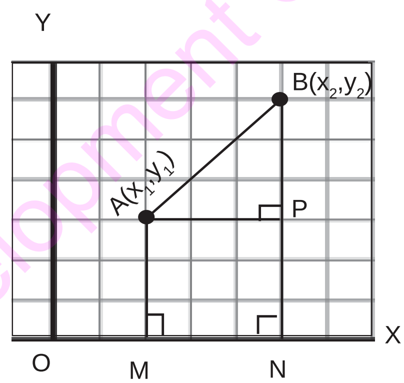
8. तलका तिन सङ्ख्याहरू कुन पाइथागोरियन ट्रिपल्स हुन् र कुन होइनन् पत्ता लगाऊ :

(क) 3, 4, 5 (ख) 6, 8, 10 (ग) 12, 13, 14

(घ) 7, 24, 25 (ङ) 10, 12, 14 (च) 10, 12, 15

6.2 दुई बिन्दुहरूबिचको दुरी (Distance Between two Points)

ग्राफपेपरमा दुई ओटा बिन्दुहरू $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ लेऊ ।
बिन्दु A बाट OX मा लम्ब खिच र M नाम देऊ ।
त्यसैगरी बिन्दु B बाट OX मा लम्ब खिची N नाम देऊ ।
फेरि, A बाट BN मा लम्ब खिच र P नाम देऊ ।



चित्रअनुसार, $OM = x_1$, $AM = PN = y_1$

$ON = x_2$, $NB = y_2$

$MN = ON - OM = x_2 - x_1$ (= AP)

$BP = BN - PN = y_2 - y_1$

यहाँ, ΔABP समकोणी त्रिभुज हो जसमा आधार $AP (= x_2 - x_1)$, लम्ब $BP (= y_2 - y_1)$ र कर्ण (AB) छ ।

हामीलाई थाहा छ, पाइथागोरसको साध्यअनुसार,

$$AB^2 = (AP)^2 + (BP)^2$$

अथवा, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

अथवा, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ एकाइ

त्यसकारण, कुनै दुई बिन्दुबिचको दुरी पत्ता लगाउने सूत्र

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

चित्रमा कोठा गनेर हेर्दा, A(2,4) र B(5,6) छ ।

सूत्रअनुसार $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (6-4)^2}$ एकाइ

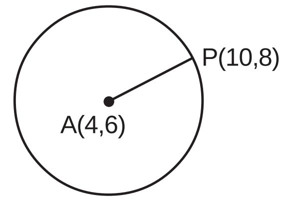
$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ एकाइ

उदाहरण 1

यदि एउटा वृत्तको केन्द्र A(4,6) छ र उक्त वृत्तको परिधिको बिन्दु P(10,8) छ भने वृत्तको अर्धव्यास कति होला ?

Curriculum Development Centre

समाधान



यहाँ, A केन्द्र भएको एउटा वृत्त छ जसमा केन्द्र A(4,6) छ र परिधिको बिन्दु P(10,8) छ । अत:

$x_1 = 4$, $x_2 = 10$, $y_1 = 6$ र $y_2 = 8$ छ । AP= ?

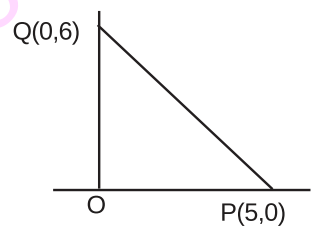
अब, $AP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ एकाइ

$= \sqrt{(10-4)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ एकाइ

उदाहरण 2

X– अक्षको 5 एकाइमा बिन्दु P र Q बिन्दु Y– अक्षको 6 एकाइमा भए P देखि Q सम्मको दुरी कति होला ?

समाधान



यहाँ P बिन्दु X- अक्षमा 5 एकाइ छ । तसर्थ P(5, 0) हो । फेरि Q बिन्दु Y- अक्षमा 6 एकाइ छ । तसर्थ Q (0, 6) हो । (किनकि X-अक्षमा y = 0 र Y-अक्षमा x = 0 हुन्छ ।)

अब $(x_1, y_1) = (5,0)$ र $(x_2, y_2) = (0, 6)$

हामीलाई थाहा छ, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ एकाइ

$= \sqrt{(0-5)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

P देखि Q सम्मको दुरी $\sqrt{61}$ एकाइ छ ।

उदाहरण 3

दिइएका निर्देशाङ्कहरू A(3,4) ,B(7,8) र c(11,4) समद्विबाहु त्रिभुजमा शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर ।

समाधान

यहाँ , $A(3,4)= (x_1 ,y_1)$; $B(7,8)= (x_2 ,y_2)$ र $C(11,4)= (x_3 ,y_3)$ मान्दा,

अब, $d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (8-4)^2}$

$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ एकाइ

$d(AC) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(11-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{7^2 + 0} = 7$ एकाइ

Curriculum Development Centre

फेरि, $=\sqrt{(11-7)^2+(4-8)^2}$ $=\sqrt{4^2+(-4)^2}$ $=\sqrt{16+16}$

$=\sqrt{32}$ $=4\sqrt{2}$ एकाइ

यहाँ, d(AB) =d(BC) $=4\sqrt{2}$ एकाइ

त्यस कारण, ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

अभ्यास 6.2

1. तल दिइएका बिन्दुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाऊ :

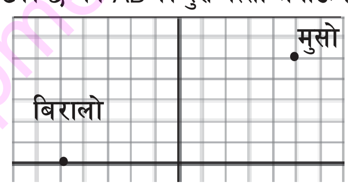
(क) (4, -7) र (-1, 5) (ख) (-3, 4) र (4, 3) (ग) (1, -2) र (5, -6)

(घ) (1, 7) र (1, 1) (ङ) (2, 7) र (4, 9) (च) (-8, 7) र (-3, 4)

(छ) (12, -6) र (6, -8) (ज) (-7, -5) र (-9, 2) (झ) $\left(4+\sqrt{5}, 3-\sqrt{3}\right), \left(3+\sqrt{5}, 3+\sqrt{3}\right)$

2. यदि बिन्दु A ले X-अक्षमा -8 मा र बिन्दु B ले Y-अक्षमा 6 मा काटेको छ भने AB को दुरी पत्ता लगाऊ ।

3. दिइएको ग्राफ पेपरमा बिरालो र मुसोको स्थिति दिइएको छ । बिरालो र मुसो भएको बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ र तिनीहरूबिचको दुरी निकाल ।



4. बिन्दुहरू A(-4,0), B(-4,-4), C(2,-4) र D(2,0) आयातका शीर्ष बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर ।

5. नक्सामा प्रस्तुत गर्दा वालिङ र काठमाडौँका निर्देशाङ्क बिन्दुहरू क्रमश: (4,7) र (7,3) भए त्यो बिन्दुबिचमा नक्सामा दुरी कति होला, यदि 1 एकाइ बराबर 55km भए वालिङदेखि काठमाडौँसम्मको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ ।

6. बिन्दुहरू P(1,6), Q(4,1) र R(-4,3) विषमभुज त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर ।

7. यदि A(2,-1) ;B,(3,4); C(-2,3) र D(-3,-2) समबाहु चतुर्भुज ABCD का शीर्ष बिन्दुहरू हुन् भने यसमा विकर्णहरू AC र BD को दुरी पत्ता लगाऊ ।

8. यदि बिन्दु P(9,12), बिन्दु Q(1,6) केन्द्र भएको वृत्तको परिधिमा पर्छ भने उक्त वृत्तको अर्धव्यास कति होला ? के बिन्दु (-7,0) उक्त वृत्तको परिधिमा पर्छ ?

9. उद्गम बिन्दु O बाट बिन्दु A र बिन्दु B को दुरी पत्ता लगाऊ, जहाँ A=(-7,7) छ र B=(7,-7) छ ।

10. यदि P(0,6) र Q (a,0) बिचको दुरी 6 एकाइ भए a को मान कति होला ?

11. तल दिइएका बिन्दुहरू रेखीय बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर :

(क) (4, 3), (3, 2) र (2, 1) (ख) (5, 1), (3, 2) र (1, 3)

(ग) (24, 3), (0, 2) र (-2, -1) (घ) (3, -1), (1, 1) र (-2, 4)

Curriculum Development Centre

पाठ 7

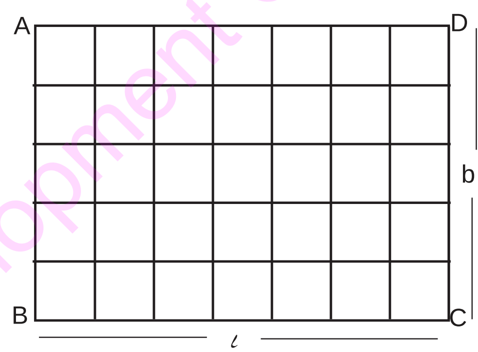
क्षेत्रफल र आयतन (Area and Volume)

7.0 पुनरवलोकन (Review)

वर्ग र आयतको क्षेत्रफल (Area of Square and Rectangles)

एउटा ABCD आयत लेऊ ।
जसमा लम्बाइ 7cm र चौडाइ 5cm छ ।
अब यस आयतलाई 1cm लम्बाइ र 1cm चौडाइ भएका साना वर्गहरूमा विभाजन गर ।

कति ओटा साना वर्ग बन्छन्, गन र लेख ।

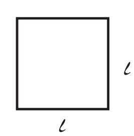


दिइएको आयतमा ठाडोतिर 5 ओटा र तेर्सोतिर 7 ओटा साना वर्गहरू बन्छन् । र 35 साना वर्ग बन्छन् । यसरी उक्त आयातको क्षेत्रफल 35 वर्ग सेमि भयो र यहाँ लम्बाइ 7 cm र चौडाइ 5 cm छ । त्यस कारण 7 cm $\times$ 5 cm = 35 cm^2 हुन्छ ।

$\therefore$ आयतको क्षेत्रफल (A) = लम्बाइ $\times$ चौडाइ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

$A = l \times b$ वर्ग एकाइ

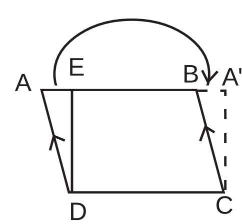
फेरि, हामीलाई थाहा छ, सबै भुजाहरू बराबर भएको आयत नै वर्ग हो । वर्गमा लम्बाइ = चौडाइ हुन्छ । त्यस कारण, वर्गको क्षेत्रफल = (लम्बाइ $\times$ लम्बाइ) वर्ग एकाइ



(A) = $l \times l = l^2$ वर्ग एकाइ भयो ।

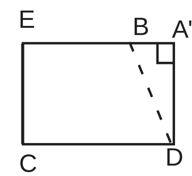
7.1 चतुर्भुज र त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Quadrilaterals and Triangles)

(I) **समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Parallelogram)**



बाक्लो कागजको पन्नामा एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD खिच र बिन्दु D बाट AB मा लम्ब खिच । त्यसपछि उक्त स.च.लाई कैँचीले काट । फेरि उक्त समानान्तर चतुर्भुर्जको DE बाट काटी ΔADE र चतुभुर्ज BCDE लाई छुट्याऊ ।

Curriculum Development Centre



चित्रमा देखाए झैँ ΔADE लाई स.च.को अर्कोपट्टि जोड । आयत EA'CD तयार भयो । जसको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज ABCD सँग बराबर हुन्छ ।

अब, समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

= आयत CDAE को क्षेत्रफल

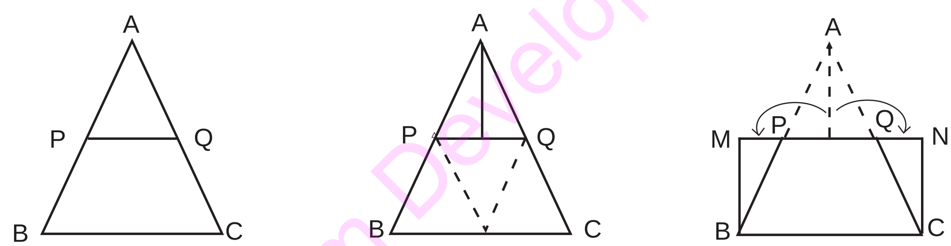
= $CD \times CE$ वर्ग एकाइ

= आधार $\times$ उचाइ वर्ग एकाइ

यदि आधार (base)= b र उचाइ (height) = h भए, स.च. को क्षेत्रफल $A= b \times h$ हुन्छ ।

(II) **त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle)**

कार्ड बोर्डको प्रयोग गरेर एउटा ΔABC बनाऊ । जसमा आधार BC (b) र उचाइ (h) छ । चित्र (क) मा देखाए जस्तै शीर्षबिन्दु A लाई आधारमा पर्ने गरी पट्याऊ र पट्याइएको त्यस ठाउँबाट काट । ΔAPQ बन्छ । अब, ΔAPQ को आधार PQ मा शीर्षबिन्दु A बाट लम्ब खिच र त्यस लम्बबाट काट । चित्र (ग) मा देखाए जस्तै चतुर्भुज PQCB का दुईतर्फ जोड । आयत MNCB तयार भयो ।



$\frac{a}{2}$

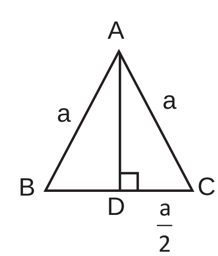
अब, ΔABC को क्षेत्रफल = आयत MNCB को क्षेत्रफल = MB x BC वर्ग एकाइ

$= \frac{1}{2} h \times b = \frac{1}{2} b \times h$ वर्ग एकाइ $\left[\because MB = \frac{1}{2}\text{उचाइ}\right]$

$\therefore$ त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2} b \times h$ वर्ग एकाइ

(III) **समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Equilateral Triangle)**

सँगैको चित्र समबाहु त्रिभुज हो । जसमा भुजाको लम्बाइ 'a' छ । A बाट BC मा लम्ब AD खिचौँ जसले आधार BC लाई आधा गर्छ ।



पाइथागोरस साध्यअनुसार, $AD^2 = AC^2 - CD^2$

अथवा, $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$

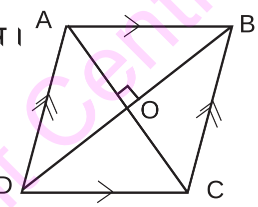
Curriculum Development Centre

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

अब, ΔABC को क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ

अत : समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग एकाइ

(IV) **समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Rhombus)**



समबाहु चतुर्भुज ABCD लेऊ र विकर्णहरू AC (d_1) र BD (d_2) खिच। हामीलाई थाहा छ, समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर लम्ब हुन्छन् । तसर्थ $OA \perp BD$ र हुन्छ ।

अब, समबाहु चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

को क्षेत्रफल $+ \Delta BCD$ को क्षेत्रफल

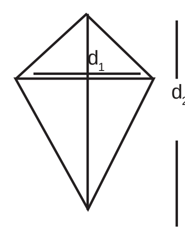
आधार (BD) $\times$ उचाइ (OA)

$$= \frac{1}{2}BD(OA + OC)$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$= \frac{1}{2}BD \times AC$$

$$= \frac{1}{2}d_1 \times d_2$$



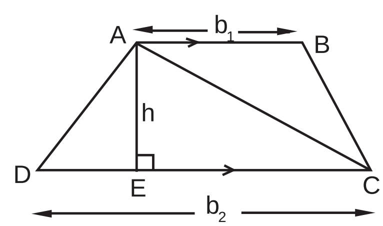
अत: समवाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}d_1 \times d_2$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

त्यसैगरी चङ्गा (Kite) को क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}d_1 \times d_2$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

(V) **समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Trapezium)**

ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो, जसमा AB र CD समानान्तर भुजाहरू हुन् । AE समलम्ब चतुर्भुजको उचाइ हो । AC विकर्ण हो ।

अब, ΔABC को क्षेत्रफल



$$= \frac{1}{2}b_1 \times h$$

$[\because AB = b_1]$

Curriculum Development Centre

फेरि को क्षेत्रफल

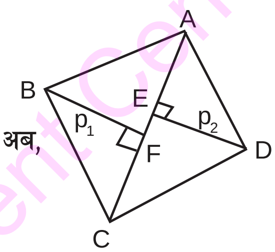
$$= \frac{1}{2} b_2 \times h \qquad [\because CD = b_2]$$

अब समलम्ब चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल (A) = ΔABC को क्षेत्रफल + को क्षेत्रफल

$$+ \frac{1}{2} b_2 \times h \quad = \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$$

त्यस कारण, समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ उचाइ $\times$ (दुई समानान्तर भुजाको जोड)

(VI) चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Quadrilateral)



ABCD एउटा चतुर्भुज हो । जसमा AC एउटा विकर्ण हो ।
B बाट AC मा लम्ब BF (p_1) र D बाट लम्ब DE (p_2) लम्बहरू खिचौं । अब,

को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} AC \times p_1 \text{ वर्ग एकाई } [\because BF = p_1]$$

र को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AC \times p_2$ वर्ग एकाइ $[\because DE = p_2]$

अब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) = को क्षेत्रफल + को क्षेत्रफल

ΔABD $= \frac{1}{2} AC \times p_1$

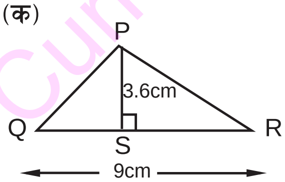
$$+ \frac{1}{2} AC \times p_2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= \frac{1}{2} AC(p_1 + p_2) \text{ वर्ग एकाइ}$$

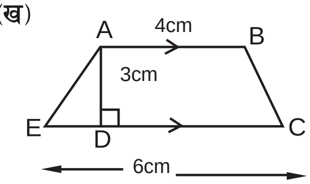
त्यसकारण, क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}$ विकर्ण $\times (p_1 + p_2)$ वर्ग एकाइ

उदाहरण 1 दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल निकाल :

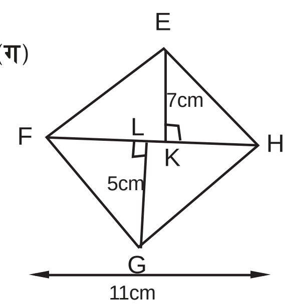
(क)



(ख)



(ग)



समाधान

(क) ΔPQR मा आधार (PR)= 9cm

उचाइ (PS)= 3.6cm

क्षेत्रफल (A)= ?

हामीलाई थाहा छ, त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) =

$$= \left(\frac{1}{2}\times 9\times 3.6\right)cm^2$$

$$=(9\times 1.8)cm^2 = 16.2\ cm^2$$

(ख) यहाँ समलम्ब चतुर्भुज ABCE मा, b_1 = AB = 4cm

b_2 = CE = 6cm

h = AD = 3cm

समलम्ब चतुर्भुज ABCE को क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A)=\frac{1}{2}\times h\times[b_1+b_2]$

$$=\frac{1}{2}\times 3\times[4+6]\ cm^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 3\times 10\ \ cm^2 = 15\ cm^2$$

(ग) यहाँ विकर्ण (FH) = 11cm

$=\frac{1}{2}b\times h$

$=\frac{1}{2}\times 11\times(7+5)cm^2$

EK= p_1 = 7cm

GL = p_2 = 5cm

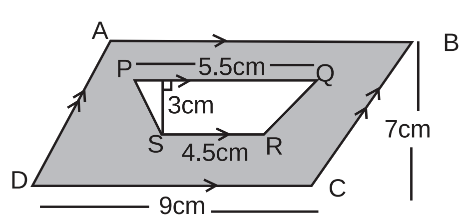
क्षेत्रफल $A=\frac{1}{2}$ विकर्ण $\times(p_1+p_2)$

$$=\frac{1}{2}\times 11\times 12cm^2 = 66\ cm^2$$

उदाहरण 2

सँगैको चित्रमा छाया पारेको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान



यहाँ, समानान्तर चतुर्भुज ABCD छ

आधार (CD)= 9cm र

उचाइ (h) = 7cm छ

ABCD को क्षेत्रफल $(A_1) = b\times h$

$= 9\times 7\ cm^2$

$= 63cm^2$

Curriculum Development Centre

फेरि, समलम्ब चतुर्भुज PQRS छ । जसमा

उचाइ (h) = 3cm

PQ = b_1 = 5.5 cm

RS = b_2 = 4.5 cm

$\therefore$ PQRS को क्षेत्रफल (A_2) = $= \frac{1}{2} \times 3 \times (5.5 + 4.5) cm^2 = 15\ cm^2$

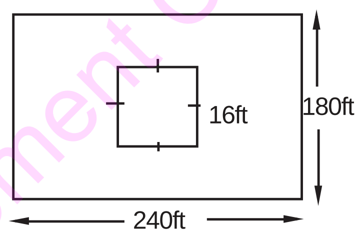
अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल = $A_1 - A_2$

$= 63\ cm^2 - 15 cm^2$

$= 48 cm^2$

उदाहरण 3

एउटा 240 ft लम्बाइ भएको र 180 ft चौडाइ भएको आयातकार खेतको बिचमा एउटा 16 ft किनारा भएको एउटा वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरीबाहेकको खेतको क्षेत्रफल कति होला ?



समाधान

आयातकार खेतको लम्बाइ (l) =240 ft

आयातकार खेतको चौडाइ (b) =180 ft

आयातकार खेतको क्षेत्रफल $l \times b = 240 \times 180$ वर्ग फिट

= 43200 वर्ग फिट

$\frac{1}{2} h(b_1 \times b_2)$

फेरि, वर्गाकार पोखरीको क्षेत्रफल = $l^2 = 16^2$ वर्ग फिट = 256 वर्ग फिट

अब, पोखरीबाहेकको खेतको क्षेत्रफल (A) = खेतको क्षेत्रफल - पोखरीको क्षेत्रफल

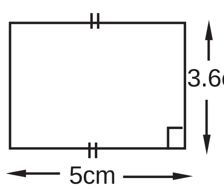
= (43200- 256) वर्ग फिट

= 42944 वर्ग फिट

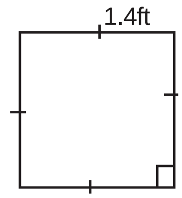
अभ्यास 7.1

1. तलका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल निकाल :

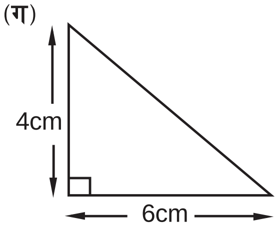
(क)



(ख)

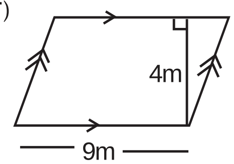


(ग)

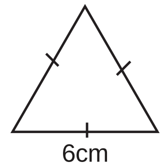


Curriculum Development Centre

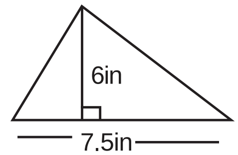
(घ)



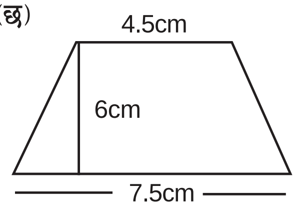
(ङ)



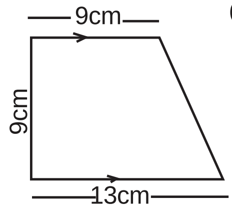
(च)



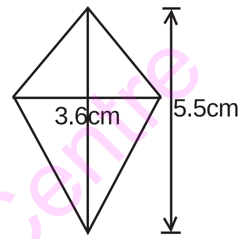
(छ)



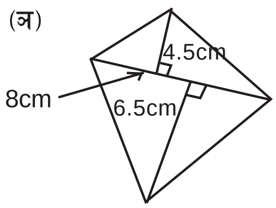
(ज)



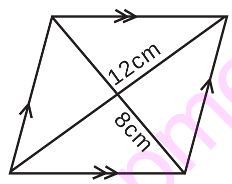
(झ)



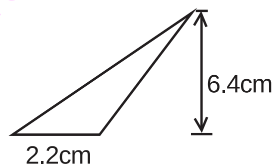
(ञ)



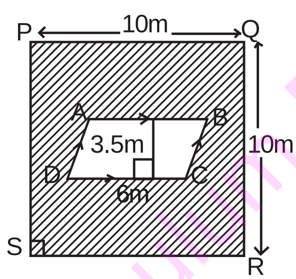
(ट)

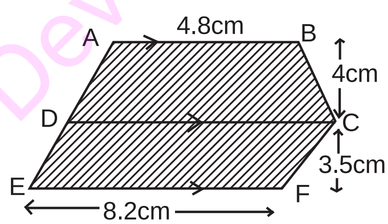


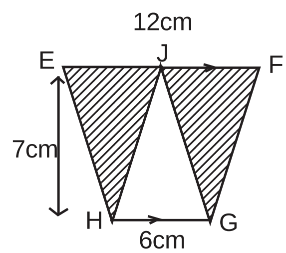
(ठ)



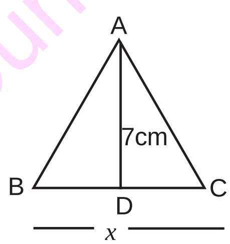
2. तल दिइएका चित्रहरूमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल :



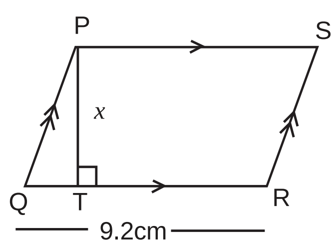




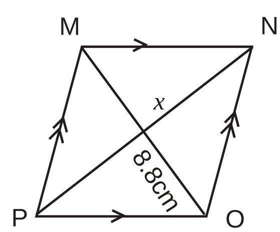
3. तलका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ :



A = 56cm^2



A = 92cm^2



A = 44cm^2

Curriculum Development Centre

4. एउटा 120 मिटर लम्बाइ र 110 मिटर चौडाइ भएको आयातकार बगैँचाको बिचमा 18 मिटर लामो र 9 मिटर चौडाइ भएको भलिबल कोर्ट बनाइएको छ । भलिबल कोर्टबाहेक बगैँचाको क्षेत्रफल कति होला ?

5. 9 फिट लामो र 7 फिट चौडा भएको पर्खालमा कति ओटा 1 वर्ग फिटका बोर्डहरू नखप्टाइकन बनाउन सकिएला ?

6. सँगैको चित्रमा एउटा गाउँका विभिन्न महत्त्वपूर्ण ... ठाँउहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :

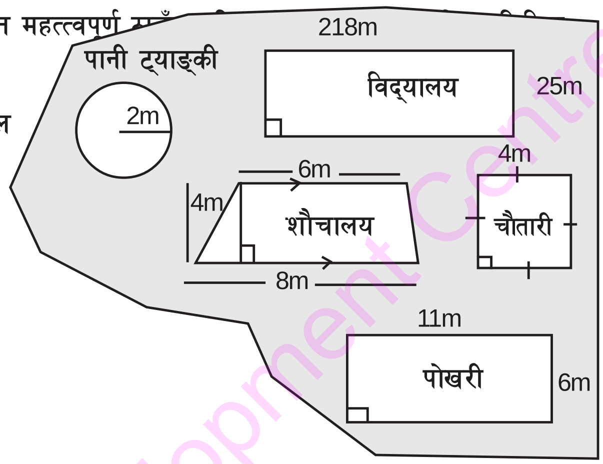
(क) सार्वजनिक शौचालयको क्षेत्रफल

(ख) पोखरीको क्षेत्रफल

(ग) विद्यालयको क्षेत्रफल

(घ) चौतारीको क्षेत्रफल

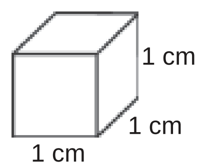
(ङ) पानी ट्याङ्कीको क्षेत्रफल



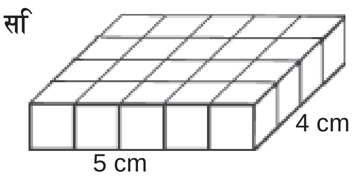
7.2. घन र षड्मुखाको आयतन (Volume of Cube and Cuboids)

क्रियाकलाप

1. 1 cm लम्बाइ, 1cm चौडाइ र 1 cm उचाइ भएको घनको आयतन कति हुन्छ ?



2. एउटा 5 cm लम्बाइ र 4 cm चौडाइ भएको आयातकार बाकसको आधारमा नखप्टाइकन कति ओटा 1 cm^3 का बट्टाहरू राख्न सर्

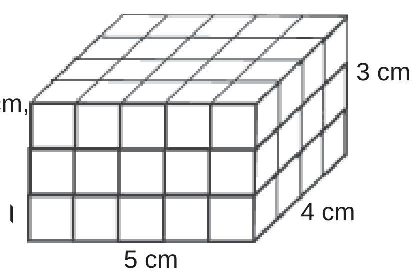


3. यस्तै तिन ओटा तहहरूसँगै एक माथि अर्को गर्दै राख्दा कति ओटा एकाइ घनहरू अटाउलान् र कस्तो ठोस आकृति बन्छ ?

यसमा जम्मा 60 ओटा एकाइ घनहरू हुन्छन् ।

तसर्थ 60 = 5 x 4 x 3 हुन्छ जहाँ षड्मुखाको लम्बाइ 5cm, चौडाइ 4 cm र उचाइ 3cm छ ।

त्यस कारण, षड्मुखाको आयतन = $l \times b \times h$ घन एकाइ हुन्छ ।



Curriculum Development Centre

यदि लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भए उक्त षट्मुखा घन (cube) हो र घनको आयतन

(V) = $\ell \times \ell \times \ell$ घन एकाइ

= ℓ^3 घन एकाइ हुन्छ ।

उदाहरण 1

10 cm लम्बाइ, 8 cm चौडाइ र 3 cm उचाइ भएको एउटा बाकसको आयतन कति होला ?

समाधान

यहाँ बाकसको लम्बाइ (ℓ) = 10 cm

चौडाइ (b) = 8 cm

उचाइ (h) = 3 cm

आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ, आयतन (V) = ℓ x b x h घन एकाइ

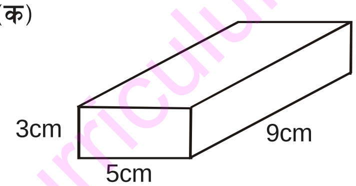
= 10x8x3 cm^3

= 240 cm^3

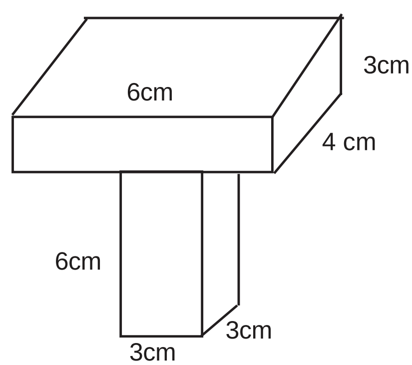
उदाहरण 2

तलका ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाऊ :

(क)



(ख)



(क) समाधान

यहाँ, लम्बाइ (ℓ) = 9 cm

चौडाइ (b)= 5 cm

उचाइ (h) = 3 cm

आयतन (V) = ?

Curriculum Development Centre

हामीलाई थाहा छ,

आयतन (V) $= \ell \times b \times h$ घन एकाइ

$= (9 \times 5 \times 3)\ cm^3 = 135\ cm^3$

(ख) **समाधान**

यहाँ दिइएको ठोसको आयतन भनेको षड्मुखाकार भागहरूको आयतनको योगफल हो ।

$\therefore V = (6 \times 4 \times 3 + 6 \times 3 \times 3)$ घन एकाइ

$= (72+54)\ cm^3$

$= 126\ cm^3$

उदाहरण 3

एउटा 10 m लम्बाइ, 9 m चौडाइ र 8 m उचाइ भएको ट्याङ्कीमा कति पेट्रोल अटाउला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, ट्याङ्कीको लम्बाइ $(\ell) = 10$ m

ट्याङ्कीको चौडाइ $(b) = 9$ m

ट्याङ्कीको उचाइ $(h) = 8$ m

आयतन (V) $= \ell \times b \times h$ घन एकाइ

$= (10 \times 9 \times 8)\ m^3$

$= 720\ m^3$

त्यसकारण, उक्त ट्याङ्कीमा $720\ m^3$ पेट्रोल अटाउँछ ।

अभ्यास 7.2

1. तलका नाप भएका षड्मुखाहरूको आयतन पत्ता लगाऊ :

लम्बाइ	चौडाइ	उचाइ
(क) 10 cm	6 cm	5 cm
(ख) 4 cm	2 cm	3 cm
(ग) 50 cm	40 cm	30 cm
(घ) 6 cm	2 cm	$\frac{5}{2} cm$
(ङ) 20 cm	10 cm	3.15 cm

Curriculum Development Centre

2. **तलका लम्बाइ भएका घनहरूको आयतन पत्ता लगाऊ :**

(क) 3 cm (ख) 4 cm (ग) 5 cm

(घ) 8 in (ङ) 6 ft (च) 2.5 in

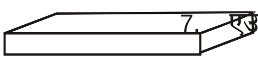
3. एउटा 6 cm लम्बाइ भएको घनको भित्र 2 cm लम्बाइ भएको कति ओटा घनहरू अटाउलान् ?

4. 18m लम्बाइ, 6m चौडाइ र, 15m उचाइ भएको ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउला ?

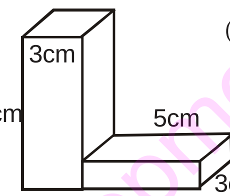
5. 10cm लम्बाइ, 10 cm चौडाइ र 10 cm उचाइ भएको बाकसभित्र 10 cm x 5 cm x 2 cm का कति ओटा साना बट्टाहरू अटाउलान् ?

6. **तलका ठोस वस्तुहरूको आयतन पत्ता लगाऊ :**

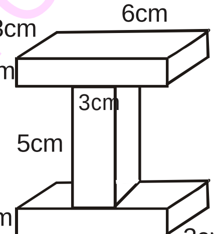
(क)



(ख)



(ग)



7. एउटा षडमुखाको चौडाइ 9cm, उचाइ 8cm र आयतन 720cm^3 भए षड्मुखाको लम्बाइ पत्ता लगाऊ ।

8. एउटा घनको आयतन 729cm^3 भए भुजाको लम्बाइ कति होला, पत्ता लगाऊ ।

9. 4cm लम्बाइ र 7cm चौडाइ भएको आयातकार बट्टाको आधारमा (क) 1cm^3 का कति ओटा घनहरू राख्न सकिएला ? (ख) यदि उक्त आधारमा 10 ओटा त्यस्ता तहहरू खप्टाइयो भने कति ओटा घनहरू अटाउलान् ?

10. 40cm लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ भएको घनको आयतन कति होला, पत्ता लगाऊ ।

11. 20cm x 30cm x 40cm भएको बसको ट्याङ्कीमा कति पेट्रोल अटाउला ? पत्ता लगाऊ ।

(1000 cm^3 = 1 liter)

12. एउटा 28cm लम्बाइ र 20cm चौडाइ भएको बाकसको आयतन 3360 cm^3 भए उक्त बाकसको उचाइ कति होला ?

13. तिम्रो घरमा भएका 5/5 ओटा घनाकार र षड्मुखाकार ठोस वस्तुहरूको नाम लेखी तिनीहरूको आयतन पत्ता लगाऊ ।

14. 12 m लम्बाइ, 0.5 m चौडाइ र 3 m उचाइ भएको पर्खाल बनाउन 0.3 m x 0.2 m x 0.2 m का कति ओटा ब्लकहरू आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाऊ ।

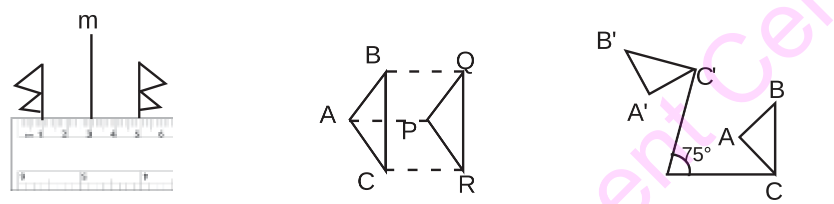
Curriculum Development Centre

पाठ

8 स्थानान्तरण (Transformation)

8.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका चित्रहरू हेर र प्रत्येक चित्रका बारेमा साथीहरूसँग छलफल गरी निष्कर्षमा पुगी, लेख :



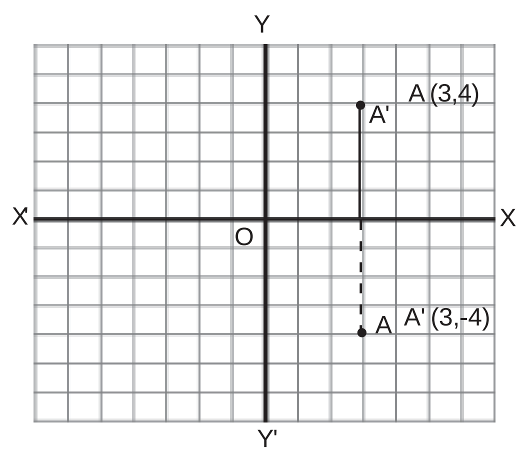
(क) (ख) (ग)

8.1 परावर्तन (Reflection)

माथिको पहिलो चित्रमा के पायौ ? यसमा एउटा झन्डाको प्रतिबिम्ब रेखा m सँग देखाइएको छ । यसलाई m सँग झन्डाको परावर्तन भनिन्छ । यो हामीले कक्षा 7 मा पढिसकेका छौँ । अब हामी निर्देशाङ्कबाट परावर्तनका बारेमा जानकारी लिन्छौँ :

(क) **X- अक्षबाट परावर्तन**

चित्रमा बिन्दु A लेऊ । A लाई XOX' बाट परावर्तन गर र उक्त बिन्दुलाई A' नाम देऊ । यसमा X- अक्षबाट A सम्मको दुरी र X-अक्षबाट A' सम्मको दुरी बराबर हुन्छ । अब ग्राफमा बिन्दु A को निर्देशाङ्क गनेर लेख । त्यसैगरी A' को निर्देशाङ्क कति हुन्छ यहाँ A को निर्देशाङ्क (3,4) छ र A' को निर्देशाङ्क (3,-4) छ ।

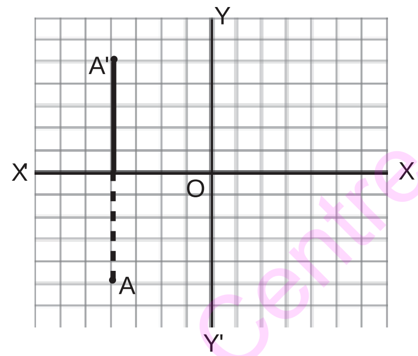


Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

बिन्दु (-4,5) लाई X- अक्षबाट परावर्तन गरी प्रतिविम्ब बिन्दुको निर्देशाङ्क लेख ।

समाधान



यहाँ, A(x,y) = A(-4,5)

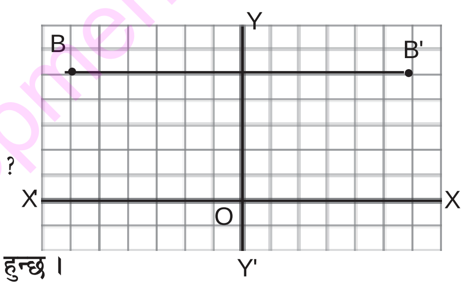
x = –4, y = 5

अब, X- अक्षबाट परावर्तन गर्दा,

(-4,5) को प्रतिबिम्ब (-4,-5) भयो ।

$\therefore$ (x', y') = (-4,-5)

(ख) **Y- अक्षबाट परावर्तन (Refelction by Y-axis)**



सँगैको चित्रमा बिन्दु B लाई YOY' बाट परावर्तन गरेर हेर । यसको प्रतिविम्ब YOY' रेखाबाट बिन्दु B को बराबर दुरीमा पर्छ । यसलाई B' नाम देऊ ।

अब B र B' को निर्देशाङ्क गनेर कति कति छ हेर ?

तिनीहरू क्रमशः (-6,5) र (6,5) हुन्छन् ।

तसर्थ (-6,5) लाई Y -अक्षबाट परावर्तन गर्दा (6,5) हुन्छ ।

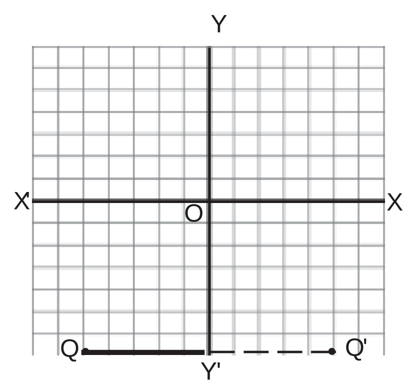
उदाहरण 2

बिन्दु (-5,-7) लाई ग्राफ पेपरमा अङ्कन गरी Y- अक्षबाट परावर्तन गराई ग्राफ पेपरमा देखाऊ ।

समाधान

यहाँ Q(-5,-7) दिएको छ ।

जहाँ x= -5, र y= -7 छ ।



अब, ग्राफ पेपरमा Q(-5,-7) लाई Y- अक्षबाट परावर्तन गर्दा,

(-5,-7) को प्रतिबिम्ब (5,-7) भयो ।

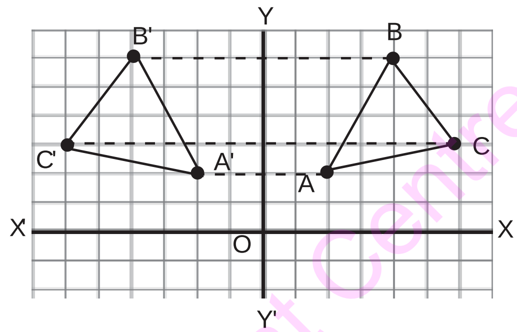
Q'(x', y') = (5,-7) हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 3

A(2,2), B(4,6) र C(6,3) एउटा त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी उक्त त्रिभुजलाई Y-अक्षसँग परावर्तन गर र प्रतिबिम्ब त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू लेख ।

समाधान



यहाँ, लेखाचित्रमा हेर्दा ΔABC को प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' हो ।

अब, बिन्दु A(2,2), B(4,6) र C(6,3) लाई Y-अक्षसँग परावर्तन गर्दा,

A' (-2,2)

B' (-4,6)

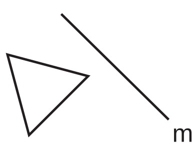
C' (-6,3)

आवश्यक प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' हो, जसमा शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू A'(-2,2), B'(-4,6) र C'(-6,3) छन् ।

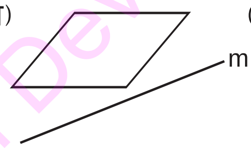
अभ्यास 8.1

1. दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई दिइएको अक्ष **m** सँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब चित्र खिच :

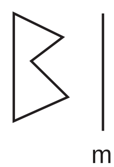
(क)



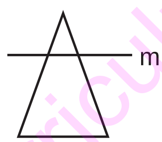
(ख)



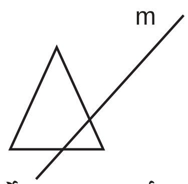
(ग)



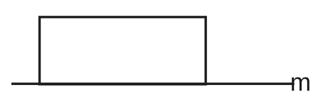
(घ)



(ङ)



(च)



2. लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका निर्देशाङ्कहरूलाई **X-** अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क लेख ।

   (क) (1,2) (ख) (-2,3) (ग) (4,-5) (घ) (-6,6) (ङ) (-5,-4)

   (च) (-2,5) (छ) (9,-8) (ज) (-3,-9) (झ) (-10,12) (ञ) (7,8)

3. प्रश्न नं 2 का बिन्दुहरूलाई Y- अक्षबाट परावर्तन गरी ग्राफ पेपरमा लेख ।
4. बिन्दु P(5,-6) लाई Y-अक्ष बाट परावर्तन गर र P' को निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ । रेखा PP' को दुरी पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

5. P(4,3), Q(7,3) र R(4,-3) एउटा समकोण त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । उक्त त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी X- अक्षसँग परावर्तन गर ।

6. A(2,-2), B(2,3) C(5,3) र D(5,-2) एउटा आयतका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । अब उक्त आयतलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी Y-अक्षबाट परावर्तन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

7. A(-2,3), B(-5,2) र C(-4,5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी पहिले X-अक्षबाट परावर्तन गरी ΔA'B'C' पत्ता लगाऊ । फेरि ΔA'B'C' लाई Y- अक्षबाट परावर्तन गरी अन्तिम प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

8.2 परिक्रमण (Rotation)

कुनै बिन्दु वा चित्रलाई कुनै बिन्दुबाट दिइएको दिशामा र दिइएको कोणमा स्थानान्तरण गराउनुलाई परिक्रमण (Rotation) भनिन्छ । परिक्रमणका लागि निम्न लिखित तिन अवस्थाहरू आवश्यक छन् :

- परिक्रमणको केन्द्र (Center of Rotation)
- परिक्रमणको कोण (Angle of Rotation)
- परिक्रमणको दिशा (Direction of Rotation)

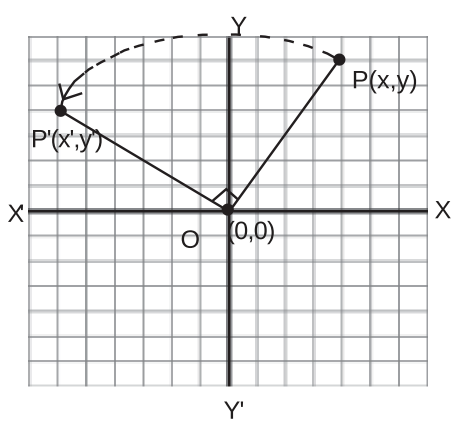
घडीको सुइको दिशालाई परिक्रमणको ऋणात्मक (Negative) दिशा र घडीको सुईको विपरीत दिशालाई परिक्रमणको धनात्मक (Positive) दिशा भनिन्छ ।

(क) उद्गम बिन्दु **O(0,0)** बाट **+90°** मा परिक्रमण

O उद्गम बिन्दु हो । XOX' र YOY' दुई अक्षहरू हुन् । P(x,y) एउटा बिन्दु हो । अब P बिन्दुलाई O बाट 90° मा घुमाऊ र P'(x',y') मा पुऱ्याऊ, जहाँ $\angle$POP' = 90° हुन्छ र OP=OP' हुन्छ ।

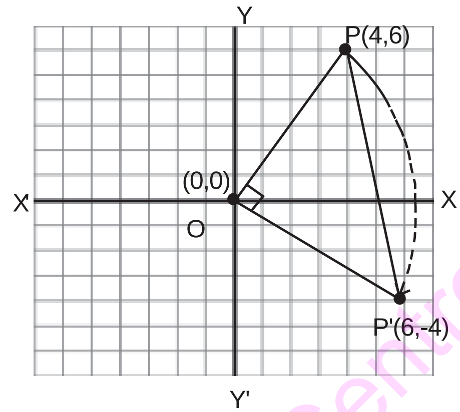
लेखाचित्रबाट बिन्दु P र P' को निर्देशाङ्क हेरौँ ।

P(x,y)=(4,6) छ र P'(x',y')=(-6,4) छ ।



Curriculum Development Centre

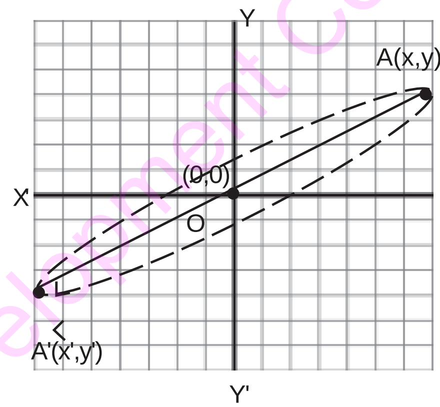
त्यसैगरी लेखाचित्रबाट हेर्दा उक्त बिन्दुलाई घडीको सुईको दिशामा वा ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा P(4,6) बाट P'(6,-4) भयो । त्यसलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।



$P(4,6) \xrightarrow{+90^\circ} P^1(-6,4)$

$P(4,6) \xrightarrow{-90^\circ} P^1(6,-4)$

(ख) उद्गम बिन्दु **O(0,0)** बाट **180°** मा परिक्रमण



ग्राफ पेपरमा बिन्दु (x, y) लेऊ । बिन्दु A लाई उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट धनात्मक दिशामा 180° मा परिक्रमण गराऊ र बिन्दु A'(x',y') नामले जनाऊ । जहाँ 0A=OA' छ । ग्राफमा बिन्दु A र A' को निर्देशाङ्क गनी लेख । जहाँ A(x,y)= (7,4) छ र A(x',y')= (-7,-4) छ ।

A(6,6)——

C(6,2)——

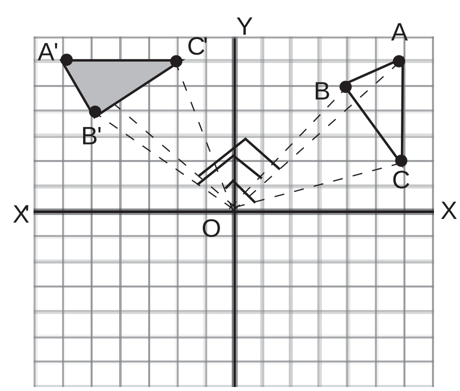
त्यस्तै (7,4) लाई 180° बाट ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा (-7,-4) नै हुन्छ ।

उदाहरण 1

शीर्षबिन्दुहरू A(6,6), B(4,5) र C(6,2) भएको एउटा त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर । । उक्त त्रिभुजलाई उद्गम बिन्दु (0,0) बाट (क) 90° धनात्मक दिशामा र (ख) 180° मा परिक्रमण गर ।

समाधान

(क) यहाँ, ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू क्रमशः (6,6), (4,5) र (6,2) छन् ।



अब बिन्दुहरू A, B र C लाई क्रमशः 90° मा परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिविम्ब त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ ।

जहाँ,

हुन्छ ।

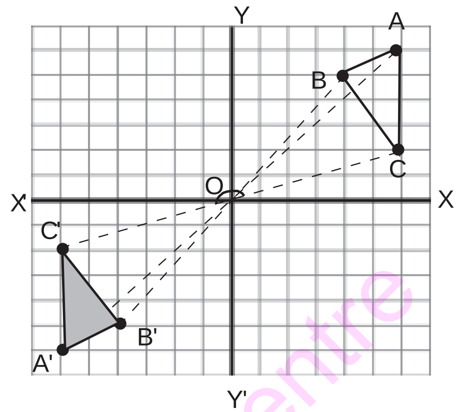
Curriculum Development Centre

(ख) ΔABC लाई लेखाचित्रबाट 180° मा परिक्रमण गराउँदा बन्ने $\Delta A'B'C'$ लाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ । जसमा,

A(6,6)⟶A′(-6,-6)

B(4,5)⟶B′(-4,-5)

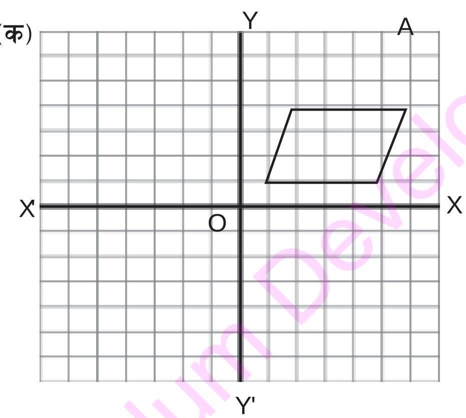
C(6,2)⟶C′(-6,-2) हुन्छ ।



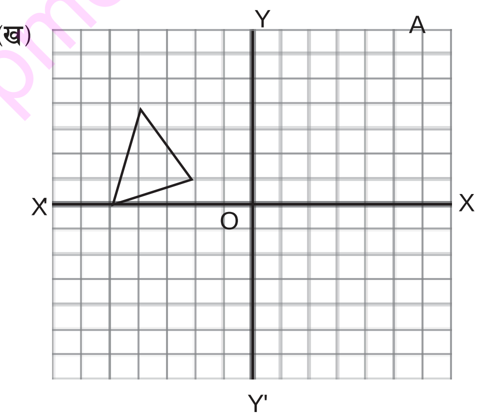
अभ्यास 8.2

1. तलका चित्रहरूलाई लेखाचित्रमा सारेर छुट्टा छुट्टै बिन्दु O(0,0) बाट घनात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गरेर देखाऊ :

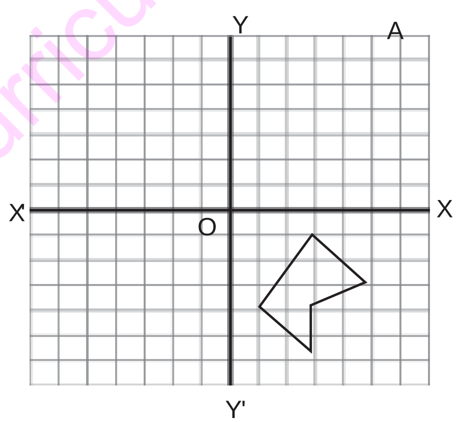
(क)



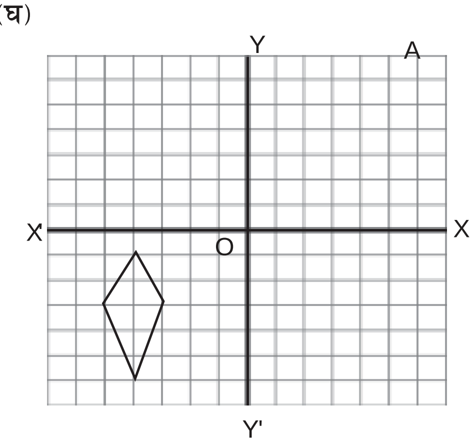
(ख)



(ग)



(घ)



Curriculum Development Centre

2. प्रश्न 1 का चित्रहरूलाई ऋणात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

3. तलका बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी+90°, -90° र 180° मा परिक्रमण गरी लेखाचित्रमा छुट्टा छुट्टै प्रस्तुत गर ।

(क) (-4,7)	(ख) (4,-7)	(ग) (5,9)	(घ) (3,0)	(ङ) (-4,-8)
(च) (2,-5)	(छ) (10,-10)	(ज) (0,6)	(झ) (0,0)	(ञ) (-9,-9)

4. A(0,0), B(3,0), C(3,3) र D(0,3) शीर्षबिन्दुहरू भएको एउटा वर्गलाई लेखाचित्रमा खिची त्यसलाई उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट (क) +90° र (ख) -90° मा परिक्रमण गराई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

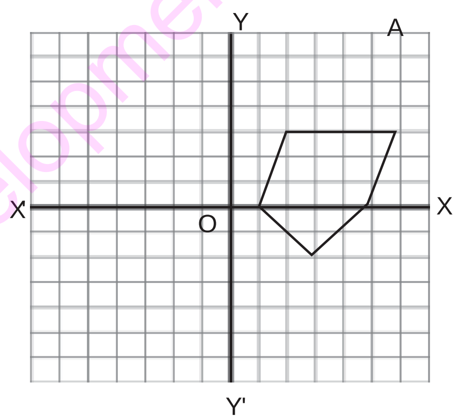
5. तल दिइएका शीर्षबिन्दुहरूबाट बन्ने ज्यामितीय आकृतिलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट (i) 90° र (ii) -90° मा परिक्रमण गराई छुट्टा छुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(क) (2,7), (3,3), र (6,7)

(ख) (3,2), (-2,2), (6,5) र (1,5)

(ग) (10,6), र (12,6)

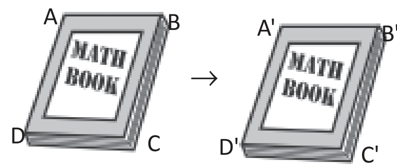
6. सँगैको चित्रलाई उद्गम बिन्दु (0,0) बाट -90°, +90° र 180° मा परिक्रमण गराई छुट्टा छुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।



Curriculum Development Centre

8.3 विस्थापन (Displacement)

टेबुलमा एउटा किताब राख । त्यसलाई घिसारेर केही बायाँ सार । पहिलेको किताबको स्थान ABCD थियो र अहिलको स्थान A'B'C'D' भयो । किताबको स्थान निश्चित दिशामा परिवर्तन भयो । यसलाई उक्त किताबको विस्थापन भनिन्छ । अब AA', BB', CC' र DD' जोड र नाप । र तिनीहरूको सम्बन्ध कस्तो पायौ लेख । यहाँ, AA', BB', CC' र DD' बराबर र परस्पर समानान्तर छन् ।

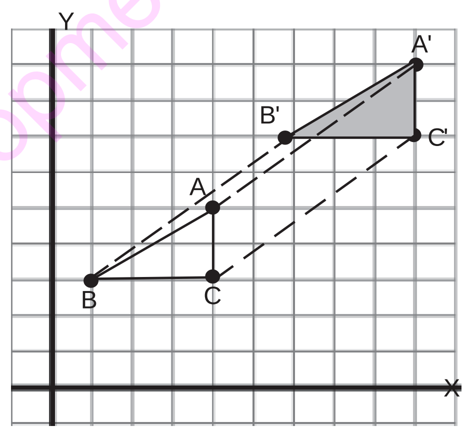


कुनै पनि बिन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा सार्नु वा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (translation) भनिन्छ । विस्थापनका लागि विस्थापनको परिमाण र दिशा उल्लेख गर्नु आवश्यक छ ।

कुनै निर्देशाङ्कलाई दायाँ विस्थापन गर्दा +, बायाँ विस्थापन गर्दा –, माथि विस्थापन गर्दा + र तल विस्थापन गर्दा – लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

सँगैको चित्रमा ΔABC दिइएको छ र उक्त त्रिभुजलाई 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी आकृति A'B'C' पुऱ्याइएको छ । अब ΔABC र ΔA'B'C' का शीर्ष बिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू हेरौँ ।



ΔABC $\qquad$ ΔA'B'C'

$A(4,5) \xrightarrow{\text{विस्थापन}} A'(9,9)$

$B(1,3) \xrightarrow{\text{विस्थापन}} B'(6,7)$

$C(4,3) \xrightarrow{\text{विस्थापन}} C'(9,7)$

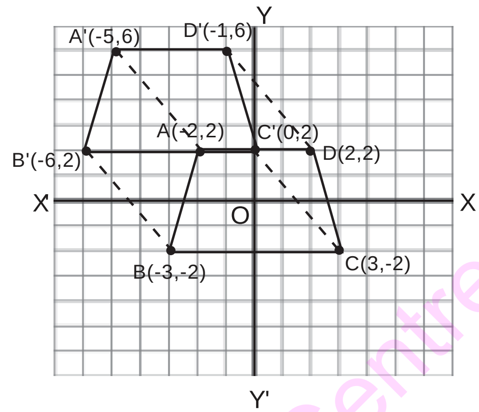
यहाँ, विस्थापन अगाडि र विस्थापन पछाडिको x र y निर्देशाङ्क हेरौँ ।

तिन ओटै शीर्षबिन्दुहरूमा x- को मानमा विस्थापनपछि 5 थपिएको छ । त्यस्तै, y को मानमा पनि विस्थापनपछि 4 थपिएको छ । विस्थापनपछि प्रतिबिम्ब त्रिभुजलाई छाया पारी देखाइएको छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

A(-2,2), B(-3,-2), C(3,-2) र D(2,2) एउटा चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । उक्त चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी 3 एकाइ बाया र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।



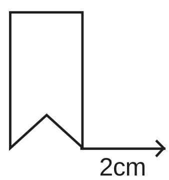
समाधान

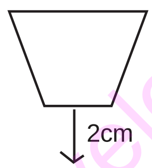
यहाँ, A(-2,2), B(-3,-2) , C(3,-2) र D(2,2) छ । यसलाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ । जसमा प्रतिबिम्ब चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुका निर्देशाङ्कहरू A(-5,6), B(-6,2), C(0,2) र D(-1,6) छन् ।

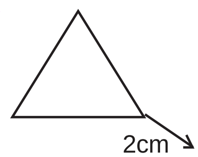
अभ्यास 8.3

1. तल दिइएका आकृतिहरूलाई दिएको दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर :

(क) (ख) (ग)







2. बिन्दु (4,-5) लाई लखेाचित्रमा अङ्कन गरी 3 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी प्रस्तुत गर ।

3 तलका निर्देशाङ्कहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 3 एकाइ बायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर :

(क) (4,9) (ख) (-3,6) (ग) (-2,2) (घ) (-5,5)

(ङ) (2,-3) (च) (4,-7) (छ) (-4,8) (ज) (-5,-6)

4. P(-1,-3) र Q(4,5) लाई 2 एकाइ दायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

5. शीर्षबिन्दुहरू A(1,0), B(4,5) र C(7,-2) भएको ΔABC लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 3 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

6. बिन्दुहरू (4,6), (7,5), (5,1) र (2,2) लाई लेखाचित्रमा खिची बन्ने आकृतिलाई 4 एकाइ बायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

7. A(4,1) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गर । फेरि उक्त प्रतिबिम्ब बिन्दुलाई 2 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

8. बिन्दु (-3,5) लाई कति एकाइमा विस्थापन गर्दा (4,5) बन्छ, लेखाचित्रमा देखाऊ ।

Curriculum Development Centre

पाठ 9

दिशास्थिति र स्केल ड्र्इङ

(Bearing and Scale Drawing)

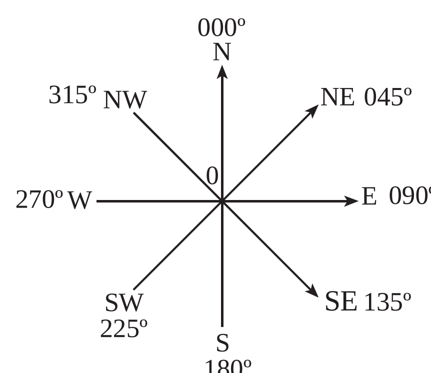
9.0. पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएको नक्सामा पोखरालाई केन्द्र मानी निम्न लिखित स्थानहरू जोड :

जुम्ला, सुर्खेत, काठमाडौँ, इलाम, विराटनगर, वीरगन्ज र महेन्द्रनगर

सँगैको चित्र हेरेर दिइएका प्रश्नहरूका उत्तरहरूका बारेमा छलफल गरौँ :

N लाई आधार रेखा मानेर मापन गर्दा,



(क) NE को मापन कति हुन्छ ?

(ख) E को मापन कति छ ?

(ग) SE को मापन कति छ ।

(घ) S को मापन कति होला ?

(ङ) SW को मापन कति छ ?

(च) सबै कोणहरू कुन दिशामा लिइएको छ ?

(छ) सबैको मापनलाई कति अङ्कका रूपमा प्रस्तुत गरिएको छ ?

Curriculum Development Centre

माथिको छलफलबाट निम्न लिखित तिन कुराहरू थाहा पाउन सकिन्छ :

(क) **N** लाई आधार रेखा मान्ने (ख) घडीको सुईको दिशामा नाप्ने

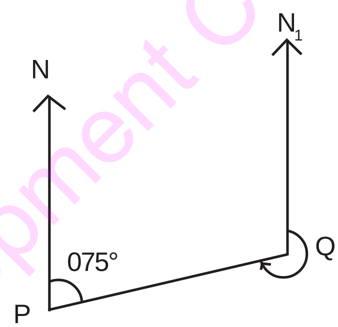
(ग) मापन तिन अङ्कमा प्रस्तुत गर्ने

तसर्थ, उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार रेखा मानेर घडीको सुईको दिशामा कुनै दुई स्थान बिचको दुरीलाई मापन गरी तिन अङ्कको कोणका रूपमा प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई दिशास्थिति (Bearing) भनिन्छ । अर्को शब्दमा यसलाई कम्पास दिशास्थिति **(Compass Bearing)** पनि भनिन्छ । *उदाहरणका लागि माथि दिइएको चित्रमा **O** बाट **E** को दिशास्थिति* **090°** छ ।

उदाहरण 1

स्थान P बाट स्थान Q को दिशास्थिति 075° छ भने स्थान Q बाट P को दिशास्थिति कति होला ?

समाधान



यहाँ, Q को दिशास्थिति $= \angle NPQ = 075^o$

$\angle NPQ + \angle PQN_1 = 180^o$ [$\therefore$ PN || QN_1]

or, $075^o + \angle PQN_1 = 180^o$

or, $\angle PQN_1 = 180^o - 075^\circ = 105^o$

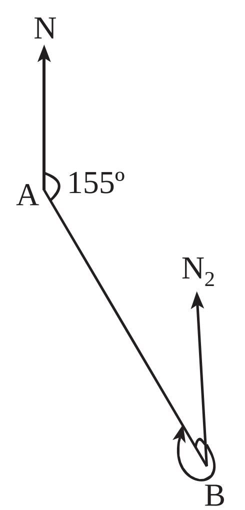
$\therefore$ Q बाट P को दिशास्थिति $= 360^o - \angle PQN_1$

$= 360^o - 105^o = 255^o$

उदाहरण 2

यदि पोखराको महेन्द्रगुफाबाट के.आई.सिंह पुलको दिशास्थिति 155° छ भने के.आई.सिंह पुलबाट महेन्द्रगुफाको दिशास्थिति कति होला ?

समाधान



मानौँ, महेन्द्रगुफा = A

के.आई. सिंह पुल = B

प्रश्नानुसार,

स्थान B को दिशास्थिति $= \angle NAB = 155^o$

$\angle NAB + \angle ABN_1 = 180^o$ [$\therefore$ AN || BN_1]

अथवा, $155^o + \angle ABN_1 = 180^o$

अथवा, $\angle ABN_1 = 180^o - 155^o = 25^o$

अब, के. आई. सिंह पुल (B) बाट महेन्द्रगुफा (A) को दिशास्थिति = ?

अब, B बाट A को दिशास्थिति

$= 360^o - \angle ABN_1$

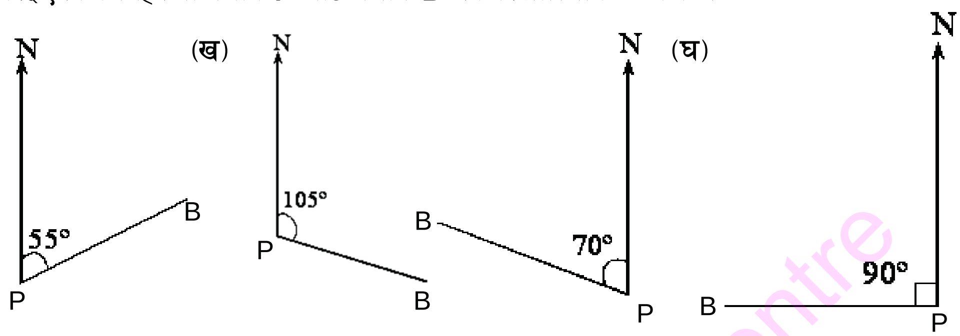
$= 360^o - 25^o = 325^o$

Curriculum Development Centre

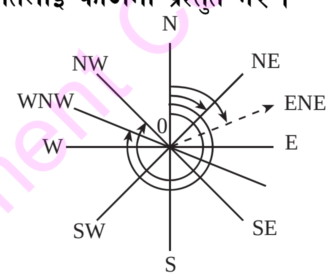
अभ्यास 9.1

1. तल दिइएका चित्रहरूमा स्थान **P** बाट स्थान **B** को दिशास्थिति उल्लेख गर :

(क) (ख) (घ)



2. उत्तर जनाउने रेखालाई आधार मानेर दिइएका दिशास्थितिलाई कोणमा प्रस्तुत गर ।



(क) उत्तर - पश्चिम (NW)

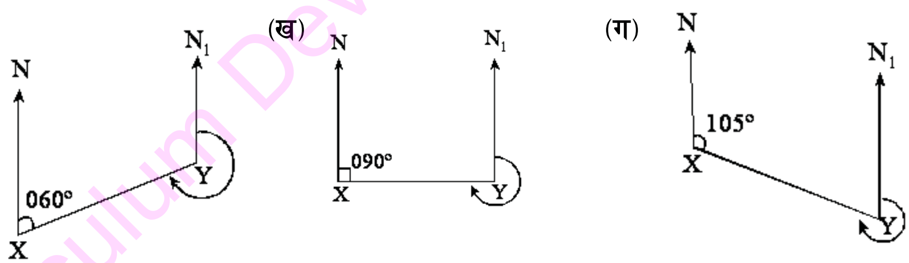
(ख) दक्षिण पूर्व (SE)

(ग) पश्चिम - उत्तर - पश्चिम (WNW)

(घ) पूर्व - उत्तर - पूर्व (ENE)

3. दिइएका चित्रहरूमा स्थान **X** बाट स्थान **Y** को दिशास्थिति दिइएको छ भने स्थान **Y** बाट स्थान **X** को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

(क) (ख) (ग)



4. दिइएका दिशास्थितिलाई चित्र बनाएर देखाऊ :

(क) बिन्दु A बाट एउटा जहाजको दिशास्थिति 120° छ ।

(ख) गाउँको पँधेरोबाट मन्दिरको दिशास्थिति 280° छ ।

(ग) एउटा डाँडाको टुप्पोबाट गोठको दिशास्थिति 075° छ ।

5. एउटा गाउँको मन्दिरबाट स्कुलको दिशास्थिति 062° भए उक्त स्कुलबाट मन्दिरको दिशास्थिति कति होला, चित्रद्वारा देखाऊ ।

6. एउटा खहरे खोला 120° को दिशास्थितिमा बगिरहेको थियो । फाँटमा पुगेपछि बर्षात्को भेलसँगै उक्त खोला 200° को दिशास्थितिमा बग्न थाल्यो भने उक्त खोलाले कति डिग्रीको कोणमा दिशा परिवर्तन गर्‍यो होला ?

Curriculum Development Centre

7. **सँगैको चित्रमा विभिन्न स्थानका बिन्दुहरू दिइएका छन् ।**

निम्न लिखित बिन्दुहरूको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् :

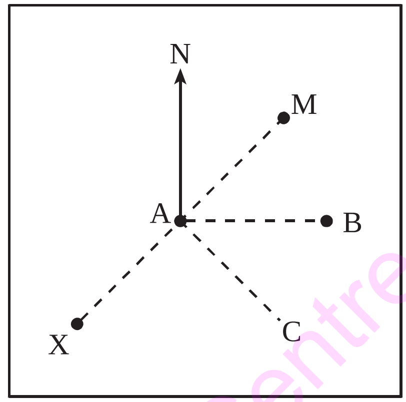
(क) बिन्दु A बाट M

(ख) बिन्दु A बाट B

(ग) बिन्दु A बाट C

(घ) बिन्दु A बाट X

(ङ) बिन्दु A बाट A



9.2. स्केल ड्रइङ (Scale Drawing)

तिम्रो घरबाट स्कुलसम्मको दुरीलाई कापीमा रेखा खिचेर देखाउन सक्छौ कि सक्दैनौ, त्यसलाई कापीमा देखाउन सकिँदैन किनकि घरबाट स्कुलसम्मको दुरी कपीको लम्बाइभन्दा धेरै छ ।

तसर्थ, कुनै दुई ठाउँहरूबिचको दुरी जसलाई मिटर (m), किलोमिटर (km) वा माइल (mile) मा नापिन्छ, त्यसलाई नक्सामा देखाउन सम्भव हुँदैन । उक्त दुरीलाई उचित दुरीमा रूपान्तरण गरी वास्तविक दुरीलाई नक्सामा प्रस्तुत गर्न सम्भव पार्ने मापनको तरिकालाई नै स्केल ड्रइङ (scale drawing) भनिन्छ । उदाहरणका लागि काठमाडौँदेखि पोखरासम्मको वास्तविक दुरी 200km छ । यदि स्केल 1cm = 100 km भए काठमाडौँदेखि पोखराको दुरीलाई नक्सामा 2cm मा देखाउन सकिन्छ । 200 km = 2cm मा लेखिन्छ ।

[स्केल : 1 cm = 100 km वा 1:100]

उदाहरण 1

1 cm = 600 m को स्केल प्रयोग गरी एउटा नक्सा तयार गर्दा दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी 6cm भए उक्त दुई स्थानहरूबिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

समाधान

यहाँ, स्केल 1 cm = 600m वास्तविक दुरी

स्केल 6 cm = (6 × 600) m = 3600 m

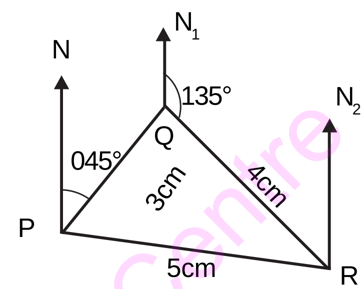
त्यसैले दुई ठाउँबिचको वास्तविक दुरी = 3600 m

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

एउटा जहाज सुरुको स्थानबाट 045° दिशास्थितिमा 600 माइल (miles) र 135° दिशास्थितिमा 800 माइल (miles) उडान गर्दछ भने उक्त जहाजको सुरुको स्थान र अन्तिम स्थानबिचको वास्तविक दुरी कति होला, साथै अन्तिम स्थानबाट सुरुको स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाऊ । स्केल 1 cm = 200 mile

समाधान



मानौँ, जहाजको सुरुको स्थान = P

जहाजको अन्तिम स्थान = R

$\angle NPQ = 045^o$

$\angle N_1QR = 135^o$

चित्रअनुसार, PR = 5cm

त्यसैले, सुरुको स्थानबाट अन्तिम स्थानबिचको वास्तविक दुरी = 5 × 200 = 1000 mile

फेरि, चित्रमा प्रोटेक्टर प्रयोग गरी नाप्दा $\angle PRN_2 = 079^o$

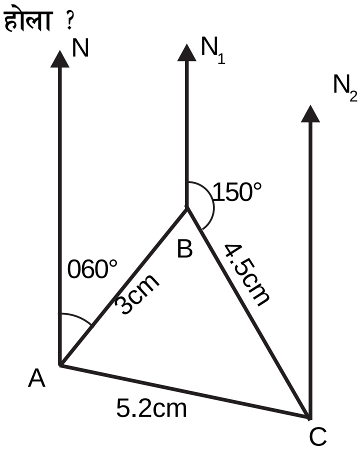
अन्तिम स्थानबाट सुरुको स्थानको दिशास्थिति $= 360^o - \angle PRN_1$

$= 360^o - 079^o = 281^o$

उदाहरण 3

रमेश प्रत्येक दिन 060° को दिशास्थितिमा 120 मिटर र 150° को दिशास्थितिमा 180 मिटर हिँड्ने गर्दछ । 1 cm = 40 m को स्केल प्रयोग गरेर उसले सुरु गरेको ठाउँ र अन्तिम ठाउँसम्मको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ । साथै अन्तिम स्थानबाट सुरु स्थानको दिशास्थिति कति होला ?

समाधान



चित्रमा रुलर प्रयोग गरेर नाप्दा,

सुरुको स्थान = A, अन्तिम स्थान = C मान्दा

सुरु स्थानदेखि अन्तिम स्थानको नक्साको दुरी = 5.2 cm

1 cm = 40 मिटर वास्तविक दुरी

5.2 cm = (40 × 5.2) मिटर वास्तविक दुरी

= 208 मिटर

फेरि, चित्रमा प्रोटेक्टर प्रयोग गरी नाप्दा $\angle ACN_2 = 65^o$

अन्तिम स्थान (C) बाट सुरु स्थान (A) को दिशास्थिति $= 360^o - 065^o$

$= 295^o$

अभ्यास 9.2

1. **तलका प्रश्नहरूमा दुई स्थानबिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ :**

(क) दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी = 7 cm, [स्केल 1 cm = 750 m]

(ख) दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी = 6.5 cm [स्केल 1 cm = 1000 miles]

(ग) महेन्द्र गुफा र चमेरो गुफाबिचको नक्साको दुरी = 3 cm [स्केल 1 cm = 250 m]

2. काठमाडौँको चक्रपथको लम्बाइ 27km छ । यदि स्केल 1cm = 12km भए उक्त चक्रपथको नक्साको लम्बाइ कति होला ?

3. माधवले स्थान A बाट 030^o दिशास्थितिमा 5km हिँडेपछि स्थान B मा पुग्छ । त्यसपछि B बाट 140^o को दिशास्थितिमा 3 km हिँडेपछि स्थान C मा पुग्छ र अन्त्यमा सिधा C बाट A मा फर्कन्छ भने,

(क) उचित स्केल छानी स्केल ड्रइङ गर ।

(ख) स्थान C बाट स्थान A सम्मको स्केल दुरी कति होला ?

(ग) स्थान C बाट स्थान A सम्म सिधा फर्किदा उसले वास्तविक दुरी कति पार गर्छ ?

(घ) स्थान C बाट A स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

4. एउटा सहरको बसपार्कबाट 500 मिटर दक्षिणमा एउटा मन्दिर पर्दछ र पौडीपोखरी मन्दिरबाट 065^o दिशास्थितिमा पर्छ । बसपार्कबाट पौडीपोखरी 145^o दिशास्थितिमा पर्छ भने पौडीपोखरी र मन्दिरबिचको वास्तविक दुरी कति होला ? 1 cm = 100 m को स्केल प्रयोग गरी देखाऊ ।

5. स्थान B बाट स्थान A 400 मिटर पश्चिममा पर्छ । स्थान A बाट स्थान C को दिशास्थिति 050^o छ र स्थान B बाट C को दिशास्थिति 290^o छ भने,

(क) 1 cm = 40 m स्केल लिई स्केल ड्रइङ गर ।

(ख) स्थान B र स्थान C बिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

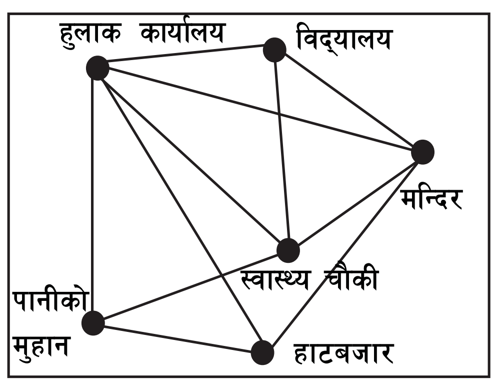
(ग) स्थान C का आधारमा स्थान B को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।

6. चित्रमा एउटा गाउँको मुख्य ठाउँहरू देखाइएको छ । यदि स्केल 1 cm = 150 मिटर भए रुलर प्रयोग गरी हुलाक कार्यालयबाट निम्न लिखित ठाउँहरूको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ :

(क) मन्दिर　　(ख) पानीको मुहान

(ग) स्वास्थ्य चौकी　　(घ) विद्यालय

(ङ) हाटबजार



Curriculum Development Centre

पाठ 10

समूह (Sets)

10.0. पुनरवलोकन (Review)

तलका समूहहरूको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूका उत्तरहरूको खोजी गर :

U = { 1 देखि 20 सम्ममा सङ्ख्याहरू }

A= { 20 भन्दा साना 3 का अपवर्त्यहरू }, र B= { 20 भन्दा साना 4 का अपवर्त्यहरू} भए

(क) समूहहरू U, A, र B का सदस्यहरू सूचीकरण गर ।

(ख) समूहहरू U, A, र B लाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(ग) भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ :

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$

(घ) A र B समूह U का कस्ता समूहहरू हुन् ?

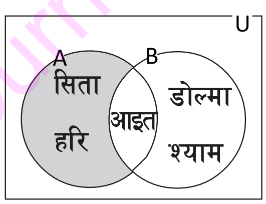
(ङ) समूह A मा पर्ने तर समूह B मा नपर्ने सदस्यहरूको समूह निर्माण गर ।

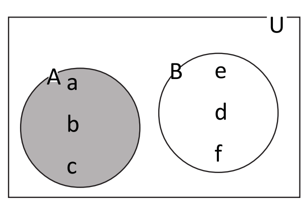
(च) समूह U मा पर्ने तर $A \cup B$ मा नपर्ने सदस्यहरूको समूह पत्ता लगाऊ ।

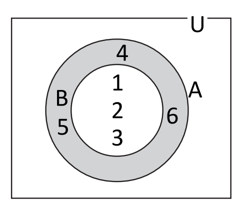
माथिका प्रश्नहरूका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा नै पढिसकेका छौँ । अब हामी समूहहरूको फरक र समूहका पुरकका बारेमा अध्ययन गर्दछौँ ।

10.1. समूहहरूको फरक (Difference of Sets)

तलका भेनचित्रहरू अध्ययन गर र के के देखिन्छ, सबैले आआफ्ना कापीमा लेख :







सबै भेनचित्रमा समूह B बाहेक A को भाग मात्र छाया पारिएको छ । समूह A को मात्र भागमा छाया पारिएको छ । B को कुनै पनि भागमा छाया पारिएको छैन र छाया पारेको भागले समूह A मा पर्ने तर B मा नपर्ने सदस्यहरूको समूहलाई जनाउँछ । यो नै समूह A बाट समूह B को फरक हो ।

Curriculum Development Centre

यदि समूह A र समूह B सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू हुन् भने समूह A मा पर्ने तर समूह B मा नपर्ने सदस्यहरूको समूहलाई वा समूह A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई A फरक B भनिन्छ र यसलाई A-B ले जनाइन्छ । A-B = $\{x: x \in A$ र $x \notin B\}$

माथिको पहिलो भेनचित्रमा A = { सीता, हरि, आइत } छ र B= {आइत, डोल्मा, श्याम} छ ।

A मा मात्र पर्ने सदस्यहरू A–B = { सीता, हरि, आइत } – {आइत, डोल्मा, श्याम}

= { सीता, हरि } भयो ।

त्यस्तै दोस्रोमा A -B= {a, b, c} र तेस्रोमा A–B= {4, 5, 6} भयो (कसरी ?)

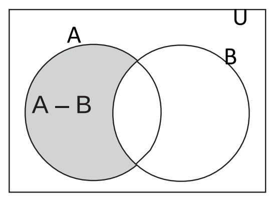
उदाहरण 1

यदि, U = {आदर्श मा. वि.का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह }

A = { आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको समूह} र

B = { आदर्श मा.वि.का सम्पूर्ण छात्राहरूको समूह } भए A-B र B-A पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा छाया पारेर देखाऊ ।

समाधान



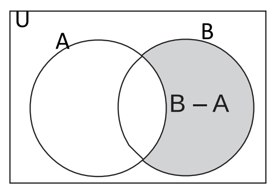
यहाँ, U= {आदर्श मा. वि.का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह }

A = { आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको समूह}

B = { आदर्श मा.वि.का सम्पूर्ण छात्राहरूको समूह }

अब, A–B = { x: आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का विद्यार्थीहरू हुन् तर छात्रा होइनन्)}

A–B ={ आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का छात्रहरूको समूह }



फेरी, B–A = {x: आदर्श मा.वि.का छात्रा तर कक्षा 8 का होइन}

= { आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का बाहेकका छात्राहरूको समूह}

नोट : 1. $A-B \neq B-A$

2. $A-B \cup B-A$ भएमा यसलाई सममितीय फरक (Symmetrical Difference) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

यदि U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u} , A= {a, b, c, d, e}, B = {a, e, i,o, u} र C = { d, e, f, i, } भए तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(क) A-B (ख) B-C (ग) $A\cup(B-C)$

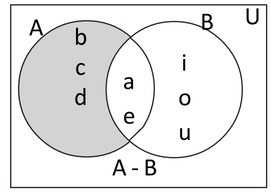
(घ) $U-(A\cup B)$ (ङ) $(A\cup B) - (A \cap B)$ (च) $(A-B) \cup (B-A)$

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ, U = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u} , A = { a, b, c, d, e }

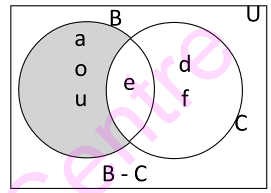
B = { a, e, i,o, u } **र** C = { d, e, f, i }



(क) A– B = {x:$x \in$ A **र** $x \notin$ B}

= {a, b, c, d, e} - {a, e, i, o, u}

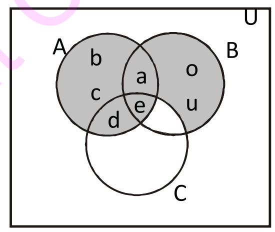
= {b,c, d}



(ख) B-C = {x: $x \in$ B **र** $x \notin$ C}

= { a, e, i,o, u } - { d, e, f, i, }

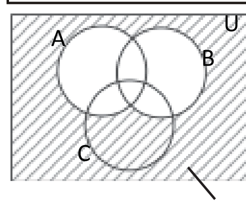
= {a, o, u}



(ग) A∪(B-C) . {$x \in$ A **अथवा** x ∈ B-C}

= {a, b, c, d, e} ∪ {a, o, u}

= {a, b, c, d, e,o,u }



U-(A∪B)

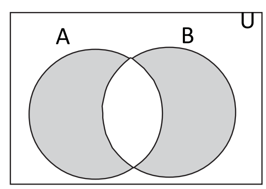
(घ) U-(A∪B) = {$x \in$ U **र** $x \notin$ A∪B}

यहाँ, A∪B = { a, b, c, d, e} ∪ { a, b, c, d, e, i,o, u }

= { a, b, c, d, e, i, o, u} **हुन्छ ।**

= { a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u} - { a, b, c, d, e, i, o, u }

= {f,g, h}



छाया पारिएको भाग

(A∪B) - (A ∩ B)

(ङ) A ∩ B = { a, b, c, d, e} ∩ {a, e, i, o, u} = {a, e}

तसर्थ, (A∪B) - (A ∩ B) = {a, b, c, d, e, i, o, u} - {a, e}

= {b, c, d, i, o, u}

(च) **यहाँ,** B-A = { x ∈ B **र** x ∉ A}

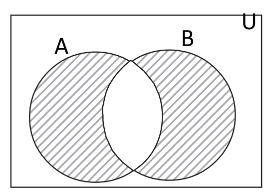
= {a, e, i, o, u } - {a, b, c, d, e }

= {i, o, u }

र (क) बाट हामीलाई थाहा छ A-B = { b, c, d}

अब, (A-B) ∪(B-A) = { b, c, d} ∪ {i, o, u }

= {b, c, d, i, o, u}



(A–B) ∪ (B – A)

(ङ) **र** (च) **बाट के पायौ ? लेख ।**

Curriculum Development Centre

अभ्यास 10.1

1. यदि A = {2, 4, 6, 8,10} र B = { 4, 8, 10, 12, 14} भए तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ :

   (क) A∪B (ख) A∩B (ग) A-B

   (घ) B-A (ङ) (A-B)∪(B-A)

2. प्रश्न नं 1 का समूहहरूलाई छुट्टा छुट्टै भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

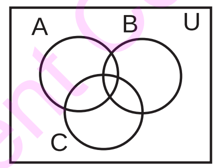
3. यदि P = {20 भन्दा साना जोर पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह} र Q={20 भन्दा साना 4 का अपवर्त्यहरूको समूह} भए P-Q र Q-P लाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

4. दिइएको चित्रमा तलका समूहहरूलाई छुट्टा छुट्टै छाया पारेर देखाऊ ।

   (क) A-B (ख) B-C

   (ग) C-A (घ) (A∪B)-C

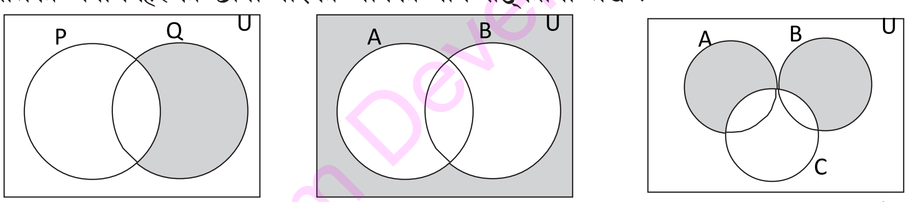
   (ङ) A-(B∪C) (च) (B∩C)-(C∩A)



5. यदि U={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A={2,4,6,8}, B={3,5,7,9} र C={3,6,9} भए

   (क) (A∪B)-C (ख) (B∪C)-A (ग) (C∪A)-B पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

6. तलका भेनचित्रहरूको छाया पारेको भागको नाम सङ्केतमा लेख :



7. यदि A = {a, e, i, o, u } , B = {i, o, u,w} र C = {e, i, o} भए (A-B)-C र A-(B-C) लाई छुट्टा छुट्टै भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

8. U = {तिम्रो विद्यालयमा कक्षा 8 का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह}

   A = {कक्षा 8 का कपर्दी खेल्न मन पराउनेको समूह }

   B = {कक्षा 8 का डन्डीबियो खेल्न मन पराउनेको समूह }

   C = {कक्षा 8 का फुटबल खेल्न मन पराउनेको समूह }

   यदि A, B र C सबै प्रतिच्छेदित समूहहरू भए A, B, C को सम्बन्धलाई भनेचित्रमा प्रस्तुत गर ।

9. प्रश्न 8 का आधारमा तलका समूहहरूलाई छाया पारेर देखाऊ :

   (क) कपर्दी मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह

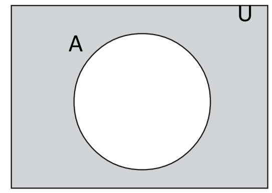
   (ख) कपर्दी र डन्डीबियो मन पराउने विद्यार्थीको समूह

   (ग) कपर्दी, डन्डीबियो वा फुटबल खेल्न मन पराउनेको समूह

   (घ) तिन ओटै खेल खेल्न मन पराउनेको समूह

Curriculum Development Centre

10.2 समूहको पुरक (Complement of sets)



मानौँ, U = { कक्षा 8 का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह }

A = { कक्षा 8 का छात्राहरूको समूह }

कक्षा 8 का छात्राहरू बाहेकको समूह कस्तो होला एकछिन सोचेर कापीमा लेख । त्यो समूह भनेको कक्षा 8 का छात्रहरूको समूह हुन्छ । छात्रहरूको समूह र छात्राहरूको समूह मिलेर मात्र कक्षा 8 का विद्यार्थी समूह बन्छ । त्यसकारण छात्रहरूको समूह कक्षा 8 का छात्राहरूको समूहमा लागि पुरक समूह हो। यदि A = छात्राहरूको समूह भए A को पुरक समूहलाई A' वा $\overline{A}$ ले जनाइन्छ ।

यदि U सर्वव्यापक समूह हो र समूह A समूह U को उपसमूह हो भने U मा पर्ने तर समूह A मा नपर्ने सदस्यहरूको समूहलाई समूह A को पुरक समूह भनिन्छ । यसलाई A' वा ले जनाइन्छ र = {x : x U र x∉ A} हुन्छ । साथै, = U-A पनि लेखिन्छ ।

दिइएको भेनचित्रमा छाया पारिएको भागले जनाउँछ र A∪ = U हुन्छ (कसरी ?) र A = हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि U= { 20 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह } र A= {20 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह} भए,

(क) पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(ख) पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ U = { 20 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह }

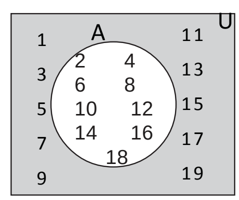
= { x:x प्राकृतिक सङ्ख्या हो x< 20 }

= { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 }

A = {20 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह}

= { x:x< 20 र x जोर सङ्ख्या हो }

= { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 }



अब, (क) = U - A

= {x:x ∈ U र x∉ A}

={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19} -{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 }

= { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, र 19 } हुन्छ ।

भेनचित्रमा छाया पारेको भागले जनाउँछ ।

Curriculum Development Centre

(ख) = {x:∈ र x ∉ }

= {U- } = [U - {U - A} = U - U + A = A

= { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 }

= A (कसरी ?)

उदाहरण 2

यदि U= { 30 भन्दा साना बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह }P= { 30 भन्दा साना बिजोर रुढ सङ्ख्याहरूको समूह } भए तलका समूहहरूका सदसस्यहरू पत्ता लगाऊ :

(क) U (ख) P (ग) (घ)

(ङ) (च)

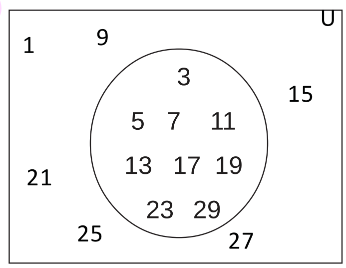
समाधान

(क) U = { 30 भन्दा साना बिजोर पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह }

= { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 }

(ख) P = { 30 भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरूको समूह }

= { 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 }



(ग) = {x:U र x∉ p}

= { 1, 9, 15, 21, 25, 27}

(घ) p = { 0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29} { 1, 9, 15, 21, 25, 27}

= {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29}

= U (कसरी ?)

(ङ) P = {x:x∈ P र x∈ }

= {3,5,7,11,13,17,19,23,29} { 1, 9, 15, 21, 25, 27}

=

(च) = {x:x∈ P र x ∉ }

= {3,5,7,11,13,17,19,23,29} - { 1, 9, 15, 21, 25, 27}

= {3,5,7,11,13,17,19,23,29}

= P हुन्छ । (कसरी ?)

अत: माथिको उदाहरणबाट हामीले के थाहा पायौँ भने

= U हुन्छ र = र = p हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 10.2

1. यदि U={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } भए तल दिइएका समूहहरूका पुरक समूहहरू पत्ता लगाऊ :

(क) A= { जोर सङ्ख्या < 8}　　(ख) B= { विजोर सङ्ख्या < 8}

(ग) C= { 8 भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरू }　　(घ) D= { जोर सङ्ख्या रुढ सङ्ख्या}

(ङ) E = {1,3,6,8 }　　(च) F = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

2. यदि U={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 } B= { 10 भन्दा साना 3 का अपवर्त्यहरू } भए

(क) B　(ख)　(ग) B　(घ) B　(ङ)

(च)　पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

3. यदि U = {अङ्ग्रेजी स्वर वर्णहरू } A= { a,e,i} र B= { i,o,u} भए

(क) $\overline{A}$　(ख)　(ग)　(घ)　(ङ) $A \cup \overline{B}$

(च)　(छ)　(ज)　(झ)　(ञ)　पत्ता लगाऊ ।

4. प्रश्न नं. 3 का आधारमा तलका तथ्यहरूलाई प्रमाणित गर :

(क)　=　　(ख)　$= \overline{A} \cup \overline{B}$

5. यदि U= { बाग्मती अञ्चलका जिल्लाहरू } र P= { काठमाडौँ, भक्तपुर, ललितपुर } भए तलका समूहरूका सदस्यहरूको सूची तयार पार र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(क) U　(ख)　(ग)

(घ)　(ङ)　(च)

6. यदि U = { पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह }　E = { जोर सङ्ख्याहरूको समूह } भए

(क) U　(ख) E　(ग) $\overline{E}$　(घ)　(ङ)

(च)　को सदस्यहरूको सूची तयार पार ।

7. सँगैको चित्रबाट तलका समूहहरूका सदस्यहरू पत्ता लगाऊ :

(क) A　(ख) B　(ग) C

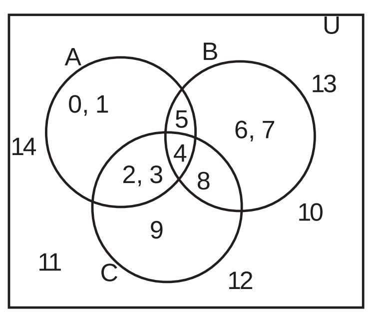
(घ) U　(ङ)　(च)

(छ)　(ज) $A \cup B \cup C$　(झ)

(ञ)　(ट) $\overline{A \cap B \cap C}$　(ठ) $A \cap B$

(ड)　(ढ) $\overline{B \cap C}$　(ण) $\overline{C \cap A}$

(त) $A - B$　(थ)　(द)



Curriculum Development Centre

10.3 भेनचित्रको प्रयोग (Use of Venn Diagrams)

गणितज्ञ John Venn ले बिसौं शताब्दीमा समूहका कियाहरूलाई चित्रद्वारा प्रस्तुत गरेका थिए । उनै गणितज्ञको नामबाट भेनचित्र (Venn- Diagram) भनिएको हो । समूहका शाब्दिक समस्याहरूलाई भेनचित्रको प्रयोग गरी समाधान गर्न सकिन्छ ।

तलको उदाहरण अध्ययन गरौँ :

गण्डकी अञ्चलका जिल्लाहरूको समूह = {कास्की, स्याङ्जा, तनहुँ, लमजुङ, गोरखा, मनाङ}

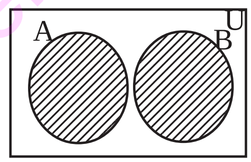
धवलागिरि अञ्चलका जिल्लाहरूको समूह = {वाग्लुङ, म्याग्दी, पर्वत, मुस्ताङ}

गण्डकी अञ्चलका जिल्लाहरूको समूहलाई G मान्दा, G ={ कास्की, स्याङ्जा, तनहुँ, लमजुङ, गोरखा, मनाङ} ।

गण्डकी अञ्चलका 6 ओटा जिल्लाहरू समूह G का सदस्यहरू छन् । यसलाई G समूहको गणनात्मकता भनिन्छ । त्यस्तै, धवलागिरि अञ्चलका जिल्लाहरूको समूह D को गणनात्मकता 4 भयो ।

कुनै पनि समूहमा भएको जम्मा सदस्यहरूको सङ्ख्यालाई उक्त समूहको गणनात्मकता (cardinality) भनिन्छ ।

यहाँ : माथिको समूह D को गणनात्मकता 4 छ । यसलाई n(D)=4 लेखिन्छ ।



यदि, U ={सार्क राष्ट्रहरूको समूह }

A ={ नेपाल, भारत, पाकिस्तान }

B = { भुटान, बङ्गालादेश, श्रीलङ्का, माल्दिभ्स, अफगानिस्थान} भए,

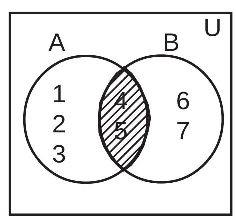
A∪B = { नेपाल, भारत, पाकिस्तान, भुटान, बङ्गालादेश, श्रीलङ्का, अफगानिस्थान} हुन्छ । n(A∪B) कति हुन्छ ?

यहाँ, A∪B मा जम्मा 8 ओटा सदस्यहरू छन् । त्यसकारण n(A∪B) = 8 भयो ।

फेरि, n(A) = 3 र n(B) = 5 छ । n(A) + n(B) = 3 + 5 = 8 भयो ।

n(A∪B)=n(A) + n(B) भयो ।

दुई ओटा समूहहरू अलग्गिएका छन् भने n(A∪B)=n(A) + n(B) हुन्छ ।



त्यस्तै, दिइएको भेनचित्रमा हेर ।

A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = { 4, 5, 6, 7 } n(A) = 5, n(B) = 4 छ ।

फेरि, A∪B = {1, 2, 3, 4, 5,6,7} र A∩B = {4, 5} छ ।

n(A∪B) = 7 र n(A∩B) = 2

त्यसकारण, भेनचित्रको प्रयोग गर्दा n(A) + n(B) = 9 भयो तर n(A∪B) = 7 छ ।

जुन n(A) + n(B) भन्दा 2 वा n(A∩B) ले कम छ ।

त्यसकारण, n(A∪B) = n(A) + n(B) - n(A∩B) भयो ।

दुई ओटा समूह A र B प्रतिच्छेदित समूहहरू भए n(A∪B) = n(A) + n(B) - n(A∩B) हुन्छ । साथै, समूह A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या 3 छ । तसर्थ, $n_0(A) = 3$ छ ।

$n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$

समूह B मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या 2 छ । तसर्थ, $n_0(B) = 2$ छ ।

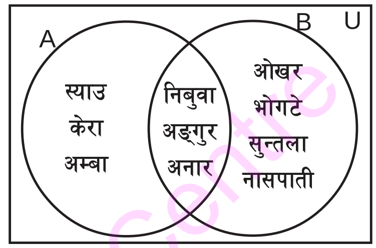
$n_0(B) = n(B) - n(A \cap B)$

Curriculum Development Centre

नोट : यदि $A \cup B = U$ भए $n(A \cup B) = n(U)$ हुन्छ ।
यदि $A \cup B \subset U$ भए $n(U) = n(A \cup B) + n(\quad)$ हुन्छ र $n(\quad) \neq 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाऊ :



(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$ (ग) $n(A \cup B)$

(घ) $n(A \cap B)$ (ङ) $n_0(A)$ (च) $n_0(B)$

समाधान

यहाँ, भेनचित्रबाट हेर्दा,

(क) A = { स्याउ, केरा, अम्बा, निबुवा, अनार, अङ्गुर }; $n(A) = 6$

(ख) B = {निबुवा, अनार, अङ्गुर, ओखर, भोगटे, सुन्तला, नास्पाती }; $n(B) = 7$

(ग) $(A \cup B)$ = { स्याउ, केरा, अम्बा, निबुवा, अनार, अङ्गुर, ओखर, भोगटे, सुन्तला, नास्पाती }; $n(A \cup B) = 10$.

(घ) $(A \cap B)$ = { निबुवा, अनार, अङ्गुर}; $n(A \cap B) = 3$

(ङ) $n_0(A)$ = { स्याउ, केरा, अम्बा }; $n_0(A) = 3$

(च) $n_0(B)$= { ओखर, भोगटे, सुन्तला, नास्पाती }; $n_0(B) = 4$

उदाहरण 2

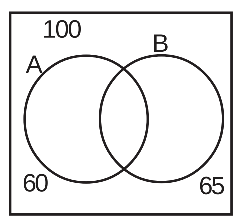
$\overline{A \cup B}$

100 जना मानिसमा गरिएका सर्वेक्षणमा 60 मानिसको मत विद्यालयमा खेल मैदान बनाउने, 65 को मत पुस्तकालय भवन निर्माण गर्ने पाइयो भने भेनचित्रको माध्यमबाट खेल मैदान र पुस्तकालय भवन दुवै बनाउन मत भएका मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ । साथै पुस्तकालय भवन मात्र बनाउने मत भएका मानिसहरू कति जना होलान् ?

समाधान

मानौँ, खेल मैदान बनाउने मत भएकाको समूह = A

पुस्तकालय भवन निर्माण गर्ने मत भएकाको समूह = B



$n(U) = 100$

$\therefore n(A) = 60 \qquad n(B) = 65$

अब, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 60 + 65 - 100 = 25$

त्यस्तै पुस्तकालय भवन मात्र निर्माण गर्ने मत भएका मानिसको सङ्ख्या $n_0(B) = ?$

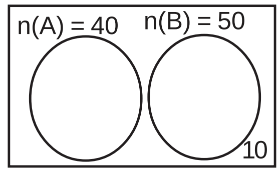
$n_0(B) = n(B) - n(A \cap B) = 65 - 25 = 40$

तसर्थ, पुस्तकालय भवन र खेल मैदान बनाउन मत भएका 25 जना र पुस्तकालय भवन मात्र बनाउने मत भएका 40 जना रहेछन् ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 10.3

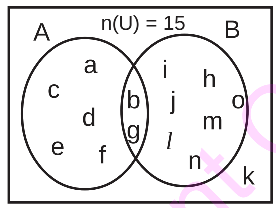
1. भेनचित्रको प्रयोग गरी निम्न लिखित समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाऊ :



(क) $n(A\cup B)$ (ख) $n(A\cap B)$

(ग) (घ) $n(\overline{A\cap B})$

2. दिइएको भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ :



(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$

(ग) $n(A\cap B)$ (घ) $n(A\cup B)$

(ङ) $n_0(A)$ (च) $n_0(B)$

(छ) $n(\overline{A})$ (ज) $n(\overline{B})$

3. 75 विद्यार्थी सङ्ख्या भएको एउटा कक्षामा 50 जनाले भ्रमण गर्न मन पराउँछन्, 50 जनाले वनभोज मन पराउँछन् । यदि हरेक विद्यार्थीले कम्तीमा एउटा कार्य गर्न मन पराउँछन् भने भेनचित्र प्रयोग गरी दुवै मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

4. एउटा गाउँका 100 युवामा सर्वेक्षण गर्दा 40 जनाले वैदेशिक रोजगार मन पराए, 70 जनाले स्वरोजगार मन पराए भने भेनचित्र बनाई तलका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाऊ : $n(\overline{A\cup B})$

(क) वैदेशिक रोजगार र स्वरोजगार दुवै मन पराउनेको सङ्ख्या कति होला ?

(ख) स्वरोजगार मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या कति होला ?

(ग) वैदेशिक रोजगार मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

5. 100 जना विद्यार्थीमध्ये 60 जनाले खेलकुदमा र 50 जनाले सङ्गीतमा भाग लिए । कति जना विद्यार्थीले दुवै क्रियाकलापमा भाग लिए होलान् । साथै सङ्गीतमा मात्र भाग लिनेको सङ्ख्या कति होला ?

6. एउटा विद्यालयमा 55% ले स्याऊ र 70% ले केरा मन पराउँछन् । यदि दुवै फल मन पराउने 30% भए भने स्याउ मात्र मन पराउने कति प्रतिशत होलान्, कुनै पनि फल मन नपराउने कति प्रतिशत होलान्, पत्ता लगाऊ ।

7. परीक्षामा सम्मिलित 150 विद्यार्थीमध्ये 60% प्रतिशत गणितमा, 50% विज्ञानमा र 20% दुवै विषयमा उत्तीर्ण भए भने दुवै विषयमा कति जना विद्यार्थी अनुत्तीर्ण भए होलान्, भेनचित्र प्रयोग गरी पत्ता लगाऊ । साथै गणितमा मात्र उत्तीर्ण विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

पाठ 11

पूर्ण सङ्ख्याहरू (Whole Numbers)

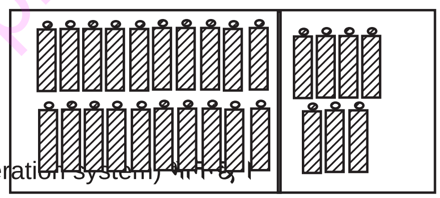
11.0 पुनरवलोकन (Review)

'गणितज्ञ Kroncker का अनुसार भगवान्ले प्राकृतिक सङ्ख्याहरू मात्र सृष्टि गरेका हुन् र बाँकी सबै सङ्ख्याहरू मानिसले नै प्रतिपादन गरेका हुन् ।' गणितमा सङ्ख्याहरूको सुरुवात गन्तीका सङ्ख्याहरू 1, 2,3, 4, ...बाट सुरुवात भएको हो । दुई ओटा गन्तीका सङ्ख्याहरू जोड्दा गन्तीको सङ्ख्या नै बन्छ । जस्तै : 3+3 = 6 हुन्छ । तर 3 - 3 कति हुन्छ ? यसलाई जनाउनका लागि थप सङ्ख्याको आवश्यकता महसुस गरियो र प्राकृतिक सङ्ख्याहरूमा शून्य (0) थप भयो । यसरी पूर्ण सङ्ख्याको समूहको विकास भयो । यसलाई (W) ले जनाइन्छ । W = { 0,1, 2,3, 4, **.......}** हुन्छ । अब, तलको क्रियाकलाप गरौँ ।

27 ओटा सिन्काहरू लेऊ ।

यसलाई 10 घातको समूहमा विभाजन गर ।

$2 \times 10 + 7 = 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

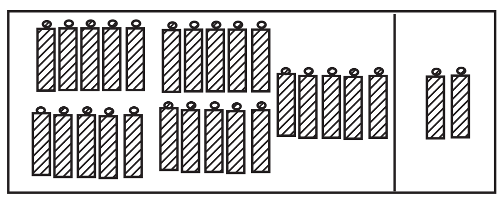


यसलाई दशमलव सङ्ख्याङ्कन पद्धति (decimal numeration system) भनिन्छ ।

फेरि, 27 लाई 5 घातको समूहमा विभाजन गर ।

$5 \times 5 + 2 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^0$

$= 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$



यसलाई पञ्चआधार सङ्ख्याङ्कन पद्धति (quinary numeration system) भनिन्छ ।

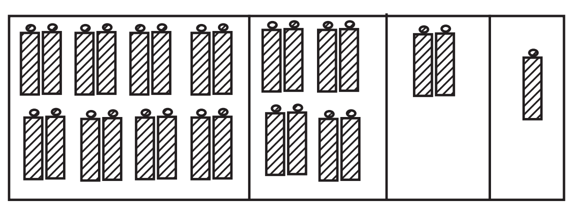
अन्त्यमा, 27 लाई 2 घातको समूहमा विभाजन गर ।

2 को घाताङ्कको समूहमा विभाजन गर्दा,

$16 + 8 + 2 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$



यसलाई द्विआधार सङ्ख्याङ्कन पद्धति (binary numeration system) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

11.1 दशमलव सङ्ख्याङ्कन पद्धति (Decimal Numeration System)

सँगैको तालिकामा 1256 लाई स्थानमान तालिकामा देखाएको छ ।

हजार	सय	दस	एक
10^3	10^2	10^1	10^0
1	2	5	6

1256 लाई विस्तारित रूपमा लेख्दा

$1256 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$

$= 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

कुनै पनि सङ्ख्यालाई 10 को घातको रूपमा लेखिन्छ र स्थानमान तालिकामा एक, दस, सय, हजार, ... वा $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$ हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्याङ्कन पद्धतिलाई दशमलव सङ्ख्याङ्कन पद्धति (decimal numeration system) भनिन्छ । यसमा 0,1,2,3,4,5,6,7,8 र 9 गरी 10 ओटा अङ्कहरू प्रयोग गरिन्छ ।

उदाहरण 1

35731_{10} लाई विस्तारित रूपमा लेख ।

समाधान

यहाँ, $35731_{10} = 3 \times 10000 + 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 1 \times 1$

$= 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

11.2 पञ्चआधार सङ्ख्याङ्कन पद्धति (Quinary Numeration System)

तलको उदाहरण हेरौँ :

179 लाई 5 को घातको समूहमा विभाजन गर्दा,

$179 = 125 + 50 + 4$

$= 125 + 2 \times 25 + 4$

$= 5 \times 5 \times 5 + 2 \times 5 \times 5 + 4 \times 1$

$= 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^0$

$= 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

यहाँ, 179 लाई आधार 5 को घातका रूपमा 1204 व्यक्त गरिएको छ । यसलाई पञ्चआधार पद्धति भनिन्छ ।

दशमलव सङ्ख्याङ्कन पद्धतिमा 0,1,2,3,4,5,6,7,8 र 9 गरी 10 ओटा अङ्कहरू प्रयोग गरे जस्तै कुनै पनि सङ्ख्यालाई 0,1, 2, 3 र 4 को मात्र प्रयोग गरी 5 को घातका रूपमा लेखिन्छ । स्थानमान तालिकामा एक, पाँच, पच्चिस, एक सय पच्चिस, छ सय पच्चिस, ... वा $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$ हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्याङ्कन पद्धतिलाई पञ्चाधार सङ्ख्याङ्कन पद्धति (quinery numeration system) भनिन्छ ।

माथिको उदाहरणलाई 1204_5 लेखिन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

33 लाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा लेख ।

33 लाई 5 को घातको समूहमा विभाजन गर्दा,

समाधान

यहाँ 33 $= 25 + 5 + 3$

$= 1 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0$ लेखिन्छ ।

$= 113_5$ हुन्छ ।

11.3 दशमलव पद्धतिलाई पञ्चआधारमा रूपान्तर

तरिका,

- दिइएको सङ्ख्यालाई 5 ले भाग गर्दै जाने
- शेषलाई दायाँतिर लेख्ने
- दायाँतिर लेखिएका शेषका अङ्कहरूलाई तलबाट माथि क्रममा मिलाउने र लेख्ने

तलको उदाहरण हेरौँ :

उदाहरण 3

तलका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर ।

(क) 512

समाधान

		शेष ($\because$ 5 ले भाग गर्दा)
5	512	
5	102	2
5	20	2
5	4	0
	0	4

अब शेषलाई तलबाट माथितिर मिलाएर राख्दा 4022 हुन्छ । तसर्थ, $512_{10} = 4022_5$ हुन्छ ।

स्थानमान तालिकामा देखाउँदा,

5^3	5^2	5^1	5^0
4	0	2	2

(ख) 7521

समाधान

		शेष
5	7521	
5	1504	1
5	300	4
5	60	0
5	12	0
5	2	2
	0	2

तसर्थ, $7521_{10} = 220041_5$ हुन्छ ।

स्थानमान तालिकामा देखाउँदा,

5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
2	2	0	0	4	1

Curriculum Development Centre

11.4. पञ्चआधार पद्धतिलाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर

तरिका,

- सर्वप्रथम स्थानमान तालिका अनुसार विस्तारित रूपमा लेख्ने
- सबै घाताङ्कहरू गुणा गरी सरल गर्ने
- पूर्ण सङ्ख्यामा व्यक्त गर्ने

उदाहरण 4

तलका पञ्चआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तर गर :

(क) 4321_5 (ख) 13320_5

समाधान

4321_5 लाई स्थानमान तालिकामा राख्दा,

एक सय पच्चिस	पच्चिस	पाँच	एक
5^3	5^2	5^1	5^0
4	3	2	1

अब विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$4321_5 = 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0$

$= 4 \times 125 + 3 \times 25 + 2 \times 5 + 1 \times 1$

$= 500 + 75 + 10 + 1$

$= 586_{10}$

त्यसकारण $4321_5 = 586_{10}$ हुन्छ

(ख) 13420_5

स्थानमान तालिकामा राख्दा,

5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
1	3	4	2	0

अब तालिकाअनुसार विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$13420_5 = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 0 \times 5^0$

$= 1 \times 625 + 3 \times 125 + 4 \times 25 + 2 \times 5 + 0$

$= 625 + 375 + 100 + 10$

$= 1110_{10}$

तसर्थ, $13420_5 = 1110_{10}$ हन्छ ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 11.1

1. **तलका सङ्ख्याहरूलाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर :**

(क) 9 (ख)13 (ग) 21 (घ) 26 (ङ) 45

(च) 86 (छ) 194 (ज) 404 (झ) 497 (ञ) 1234

2. **तलका पञ्चआधार सङ्ख्याहरूलाई दशमलव सङ्ख्याहरूमा रूपान्तरण गर :**

(क) 24_5 (ख)101_5 (ग) 300_5 (घ) 4321_5

(ङ) 441_5 (च) 2023_5 (छ) 4201_5 (ज) 3313_5

(झ) 12304_5 (ञ) 2014_5 (ट) 10123_5 (ठ) 21432_5

11.5 द्विआधार सङ्ख्या पद्धति (Binary Number System)

तल सँगैको उदाहरण हेरौँ ।

$29 = 28 + 1 \quad = 8X3 + 1 X 4 + 1 = 8 X2 + 8 X 1 + 1 X 4 + 1$

$= 16 + 8 + 4 + 1 \quad = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$\therefore 29 \quad = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ हुन्छ ।

त्यस्तै, कुनै सङ्ख्यालाई 0, 1, 2, 3 र 4 मात्र प्रयोग गरेझैं कुनै पनि सङ्ख्यालाई 0 र 1 मात्र प्रयोग गरी 2 को घातको रूपमा लेखिन्छ । स्थानमान तालिकामा एक, दुई, चार, आठ , सोर, बत्तिस, ... वा $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 5^4$, ... हुन्छ भने त्यस सङ्ख्याङ्कन पद्धतिलाई द्विआधार सङ्ख्याङ्कन पद्धति (binary numeration system) भनिन्छ । माथिको उदाहरणलाई $29 = 11101_2$ लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

43 लाई द्विआधार पद्धतिमा विस्तारित रूपमा लेख ।

समाधान

43 लाई 2 को घातको समूहमा विभाजन गर्दा,

$43 \quad = 32 + 8 + 2 + 1$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 + 2 + 1$

$\therefore 43_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

11.6 दशमलव सङ्ख्यालाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तरण

आधार 10 भएको सङ्ख्यालाई आधार 2 भएको सङ्ख्यामा कसरी रूपान्तरण गर्न सकिन्छ हेर ।

उदाहरण 2

75_{10} लाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर ।

समाधान

2	75	शेष
2	37	1
2	18	1
2	9	0
2	4	1
2	2	0
2	1	0
	0	1

- आधार 10 मा शेष 0 देखि 9 सम्म हुन्छ ।
- आधार 2 मा शेष 0 र 1 मात्र हुन्छ ।
- तसर्थ कुनै सङ्ख्यालाई द्विआधारमा रूपान्तरण गर्न 2 ले भाग गर्ने र शेष लेख्दै जाने गर्नुपर्छ ।

अब शेषहरूलाई क्रमश: तलबाट माथिको क्रममा लेख्दा 1001011 हुन्छ ।

तसर्थ $75_{10} = 1001011_2$ हुन्छ ।

द्विआधार पद्धतिमा स्थानमान तालिकालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256…	128	64	32	16	8	4	2	1

प्रस्तुत तालिकाको प्रयोगले द्विआधार सङ्ख्यालाई विस्तृत रूपमा लेख्न सकिन्छ र द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव वा अन्य प्रणालीमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ ।

11.7 द्विआधार पद्धतिलाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण

हामीलाई थाहा छ कि द्विआधार पद्धतिमा कुनै पनि सङ्ख्यालाई आधार 2 मा र 2 को घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गरिन्छ । अब यसलाई आधार 10 वा दशमलव पद्धतिमा कसरी रूपान्तरण गर्ने, तलको उदाहरण हेरौँ ।

उदाहरण 4

तलका द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर :

(क) 1001011_2 (ख) 1100101_2

तरिका :
- आधार 2 को घाताङ्कको रूपमा विस्तारित रूपमा लेख्ने
- सरल गर्ने
- उत्तर लेख्ने

Curriculum Development Centre

समाधान

(क) $1001011_2 = 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 02^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$

$= 2^6 + 0 + 0 + 2^{3+} + 0 + 2^1 + 1$

$= 64 + 8 + 2 + 1$

$= 75_{10}$

$\therefore 1001011_2 = 75_{10}$

अत : $1100101_2 = 1\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

$= 2^6 + 2^5 + 0 + 0 + 2^2 + 0 + 2^1$

$= 64 + 32 + 4 + 1$

$= 101_{10}$

$\therefore 1100101_2 = 101_{10}$

अभ्यास 11.2

1. **तलका सङ्ख्याहरू कुन सङ्ख्या पद्धतिमा छन्, लेख :**

   (क) 10011_2 (ख) 350 (ग) 1001_2 (घ) 42

   (ङ) 555 (च) 77532 (छ) 10010011_2 (ज) 257903

2. **तलका दशमलव पद्धतिका सङ्ख्यालाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर :**

   (क) 4 (ख) 9 (ग) 12 (घ) 25 (ङ) 35

   (च) 65 (छ) 94 (ज) 135 (झ)190 (ञ) 275

   (ट) 220 (ठ) 512 (ड) 530

3. **तलका द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर :**

   (क) 1100_2 (ख) 10010_2 (ग) 11110_2 (घ) 100001_2

   (ङ) 111111_2 (च) 1100011_2 (छ) 1110011_2 (ज) 1100110011_2

   (झ)1010101110_2 (ञ) 100001000_2 (ट) 101110111_2 (ठ) 11011011001_2

4. **यदि कुनै सङ्ख्याको दशमलव पद्धतिमा 723 ले जनाइन्छ भने उक्त सङ्ख्याको मान द्विआधार पद्धतिमा कति होला ?**

5. **100000001_2 लाई दशमलव पद्धतिमा लेख ।**

Curriculum Development Centre

पाठ 12

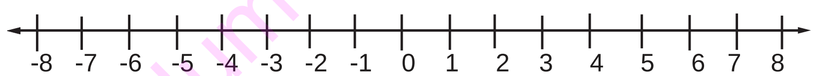
पूर्णाङ्कहरू (Integers)

12.1 पुनरवलोकन (Review)

पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह W = {0,1,2,3,4,5,……} मा तलका उदाहरणहरूको अध्ययन गर ।

3 + 4 = ?, 3 – 3 = ? 3 – 4 = ?

माथिको तेस्रो उदाहरणमा एउटा सानो प्राकृतिक सङ्ख्याबाट ठुलो प्राकृतिक सङ्ख्या घटाउँदा नयाँ प्राकृतिक सङ्ख्या वा पूर्ण सङ्ख्या हुन सक्दैन (किन ?) । त्यसकारण पूर्ण सङ्ख्याको समूहले मात्र सबै सङ्ख्याहरूलाई जनाउन सकिएन । नयाँ सङ्ख्याहरूको आवश्यकता महसुस भयो र ऋणात्मक पूर्ण सङ्ख्यारूको आविष्कार भयो । प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह, शून्य र ऋणात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह मिलेर बनेको सङ्ख्याहरूको समूहलाई पूर्णाङ्कहरूको समूह भनिन्छ । यसलाई (Z) ले जनाइन्छ । Z = {…………-4, -3 ,-2, -1, 0, 1, 2,, 3, 4, ………} हुन्छ । साथै, {1, 2, 3, 4, ………} लाई धनात्मक पूर्णसङ्ख्याहरूको समूह र {-1,- 2, -3, -4, ………} लाई ऋणात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह भनिन्छ । पूर्णसङ्ख्याहरूको समूहलाई सङ्ख्या रेखाद्वारा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



पूर्ण सङ्ख्याहरूका क्रियाहरूका नियमहरू (Laws of Operation of Integers):

माथिको सङ्ख्यारेखाबाट कुनै तिन सङ्ख्या लेऊ । जस्तै : -2 , 3 र 4

-2 + 4 = ?; 4+ (-2) = ?; 4+0 = ?; 0+4=?; -2+ (4 +3) =?; (-2+4) +3 =?; -2+2=?

माथिका प्रश्नहरूबाट के थाहा हुन्छ ?

माथिका प्रश्नहरूका उत्तरहरूबाट निम्न लिखित नियमहरूमा सामान्यकरण गर्न सकिन्छ :

पूर्णाङ्कहरूको जोडका नियमहरू (Laws of addition of Integers)

यदि a, b, c, तिन ओटा पूर्णाङ्कहरू भए

(क) बन्दी नियम (closure law) : a+b र a+b+c पनि पूर्णाङ्क नै हुन्छन् ।

Curriculum Development Centre

(ख) **विनियम नियम** (cummutative law) : a+b= b+a, a+c=c+a, b+c= c+b हुन्छ ।

(ग) **सङ्घीय नियम** (associative law) : (a+b) +c = a+ (b+c) हुन्छ ।

(घ) **एकात्मक नियम** (identity law) : a+0 =0+a = a हुन्छ ।

(ङ) **विपरीत परिणामको नियम** (inverse law): सबै a का लागि पूर्णाङ्कको समूहमा -a हुन्छ ।

साथै a + (–a) = (-a) + a = 0 हुन्छ ।

यदि, + + + = +	जस्तै :	2 + 3 = 5
– + + = – (– ठुलो अङ्क भएमा)		-3 + 2 = -1
+ + – = + (+ठुलो अङ्क भएमा)		3 + (-2) = 1
– + – = – हुन्छ ।		-3 + (-2) = -5

त्यस्तै, तलका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाऊ र कापीमा लेख :

-3 X 2 = ? ; 2 X (-3) = ? ; 2 X 1= ?; 1 X 2 =?; -3X (2 X 4) =? ;(-3 X 2) X 4 =?

माथिका प्रश्नहरूबाट के थाहा हुन्छ, पत्ता लगाऊ ।

पूर्णाङ्कहरूको गुणनलाई निम्न लिखित तालिकाबाट स्पष्ट पार्न सकिन्छ :

×			-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		
-4			16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16		
-3			12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12		
-2			8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8		
-1			4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4		
0			0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1			-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		
2			-8	–6	–4	-2	0	2	4	6	8		
3			-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12		
4			-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16		

माथिका प्रश्नहरू र तालिकाका आधारमा पूर्णाङ्कहरूको गुणनका निम्न लिखित नियमहरू बनाउन सकिन्छ :

Curriculum Development Centre

पूर्णाङ्कको गुणनका नियमहरू [Law of Multiplication of Integrs]

यदि a, b, c तिन ओटा पूर्णाङ्कहरू भए

(क) **बन्दी नियम** (closure law) :

$a \times b, b \times c, c \times a$ पूर्णाङ्क हुन्छ ।

(ख) **विनियमको नियम** (commutative law) :

$a \times b, = b \times a$ हुन्छ ।

(ग) **सङ्घीय नियम** (associative law) :

$(a\times b)\times c = a \times (b\times c)$ हुन्छ ।

(घ) **पदविच्छेदन/वितरणात्मक नियम** (distributive law) :

$a\times(b+c)= a \times b + a \times c$ हुन्छ । **अथवा** $a (b+c) = ab+ac$

(ङ) **एकाइ नियम** (Identity law) :

$a \times 1 = 1 \times a = a$ हुन्छ ।

[+ x + = + , − x + = − , + x − = −, र − x − = + हुन्छ ।
त्यसैगरी कुनै पूर्णाङ्कले अर्को पूर्णाङ्कलाई भाग गर्दा,
[+ ÷ + = +, + ÷ − = −, − ÷ + = − र − ÷ − = + हुन्छ ।

यसरी पूर्ण सङ्ख्याहरू र तिनीहरूका साधारण क्रियाहरू एवम् तिनीहरूको नियमहरूका बारेमा हामीहरूले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी पूर्ण सङ्ख्याहरूका सरलीकरणका बारेमा अध्ययन गर्दछौँ ।

12.1 पूर्णाङ्कहरूको सरलीकरण (Simplification of Integers)

हामीले जोड (+), घटाउ (–), गुणन (×) र भाग (÷) सम्मिलित सरल गर्दा सर्वप्रथम भागको, त्यसपछि क्रमश: गुणन, जोड र घटाउको क्रिया गर्नुपर्छ । यस्तै :

उदाहरण 1

सरल गर : $25–24 \div 8 + 3\times2$

समाधान

यहाँ, $25 - 24 \div 8 + 3 \times 2$

$= 25 – 3 + 3 \times 2$ (÷)

$= 25 – 3 + 6$ (×)

$= 25 + 6 – 3$ (+)

$= 31 – 3$ (–)

$= 28$

सानो कोष्ठबाट क्रमश: मझौला कोष्ठ र ठुलो कष्ठका क्रियाहरू गर्नुपर्ने हुन्छ । त्यसपछि कोष्ठभित्र क्रमश: मेलबन्द (—) भाग (÷) ,गुणन (*), जोड (+) र घटाउ (–) को काम गरिन्छ ।

उदाहरण 2

सरल गर : $-19 + [27 - \{14 + (5-2) \times 4 \div 2\}]$

समाधान

$-19 + [27 - \{14 + (5-2) \times 4 \div 2\}]$	
$= -19 + [27 - \{14 + 3 \times 4 \div 2\}]$	[( ) को क्रिया]
$= -19 + [27 - \{14 + 3 \times 2\}]$	[÷ को क्रिया]
$= -19 + [27 - \{14 + 6\}]$	[x को क्रिया]
$= -19 + [27 - 20]$	[{} को क्रिया]
$= -19 + 7$	([ ] को क्रिया)
$= -12$	

अभ्यास 12.1

1. **सरल गर** :

(क) $17-\{19-2(1+3)\}$ (ख) $20-\{8-(15+2)\}$

(ग) $25-\{16\div(17-9)\}$ (घ) $-16 + \{8 \times (2+4)\}$

(ङ) $50\div\{18 - (4 \times 10 \div 2)\}$ (च) $[-20\div\{40-6(7-2)\}] +16$

(छ) $5[152 - \{7-8(9-2)\}]$ (ज) $11 \times 11\div[-11\div\{12-(13-12)\}]$

(झ) $24\div[18-3\{5+(6-9)\}]+8$ (ञ) $[-2+\{11 \times (8+4)\div3\}]+21$

(ट) $64\div8-2[3+\{7-3(3+\overline{4-2})\}]$ (ठ) $-64 \div16+[12 \times \{6\div(16\div\overline{10-2})\}]$

(ड) $80\div4[400\div4\{7+(19+\overline{8-24})\}]$

2. दिइएको तालिकामा 1 देखि 9 सम्मका अङ्कहरू नदोहोरिने गरी भर जसमा प्रत्येक पङ्क्तिबाट र रेखीयबाट विकर्णहरूको योगफल 15 हुन्छ ।

		6
	5	1
4		

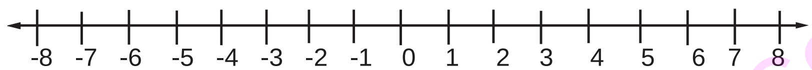
3. 4 को तिन गुणाबाट 7 घटाएर 5 जोड्दा कति हुन्छ ?
4. 15 को 4 गुणाको 6 भागको 1 भागबाट 3 घटाएर 5 ले गुणा गर्दा कति हुन्छ ?
5. 20 को एक चौथाइलाई 6 ले गुणा गरेर 5 जोडी 4 घटाउँदा कति हुन्छ ?
6. 8 को 5 गुणालाई 4 ले भाग गरी 10 जोडेर 20 घटाउँदा कति होला ?
7. 5 र 3 को योगफलबाट 6 घटाइ 9 ले गुणा गर्दा कति हुन्छ ?
8. 64 लाई 13 र 9 को फरकमा 4 जोडी भाग गरेर 8 घटाउँदा कति हुन्छ ?
9. 72 मा यसैको एक चौथाइ जोडी आएको योगफलमा 72 कै 8 भागको 1 भाग र 1 जोड्दा कति हुन्छ ?
10. 36 मा फेरि त्यही सङ्ख्या, त्यसको आधा र फेरी आधाको आधा जोडी 1 जोड्दा कति हुन्छ ?

Curriculum Development Centre

पाठ 13 आनुपातिक सङ्ख्याहरू

(Rational Numbers)

13.0. पुनरवलोकन (Review)



माथिको सङ्ख्यारेखाबाट कुनै दुई पूर्णाङ्कहरू लेऊ, जस्तै : 2 र -3 । तिनीहरूबिचका चार गणितीय क्रियाहरू गर । उत्तरलाई साथीको उत्तरसँग तुलना गरेर निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर ।

-3+2 = ? -3-2 = ? 2 x -3 = ? -3 ÷ 2 = ?

यसरी पूर्णाङ्कका नियमानुसार कुनै छुट्टै पूर्णाङ्कहरू गुणा गर्दा, जोड्दा र घटाउँदा फेरि नयाँ पूर्णाङ्क नै हुन्छ तर एउटा पूर्णाङ्कलाई अर्को पूर्णाङ्कले भाग गर्दा सधैँ पूर्णाङ्क नहुन पनि सक्छ । त्यस कारण अरू थप सङ्ख्याहरूको आवश्कता महसुस भयो र दशमलव सङ्ख्या वा भिन्न सङ्ख्याको आविष्कार गरियो । ती सङ्ख्याहरूलाई आनुपातिक सङ्ख्याहरू भनिन्छ । माथिको प्रश्नमा $\frac{-3}{2}$ आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

> यदि कुनै पनि सङ्ख्यालाई $\frac{p}{q}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (rational number) भनिन्छ जहाँ p र q दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् र $q \neq 0$ छ । यसलाई Q ले जनाइन्छ । साथै, $N \subset Z \subset Q$ हुन्छ ।

आनुपातिक सङ्ख्याहरूका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरीसक्यौं । यसअन्तर्गत हामी अब सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतका बारेमा जानकारी लिन्छौँ ।

13.1 सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत (Scientific Notation of Numbers)

तलका उदाहरणहरू हेर :

6 $= 6 \times 1 = 6 \times 10^0$ हुन्छ ।

16 $= 1.6 \times 10 = 1.6 \times 10^1$

160 $= 16 \times 10 = 1.6 \times 100 = 1.6 \times 10^2$

160000 $= 1600 \times 100 = 160 \times 1000 = 16 \times 10000 = 1.6 \times 100000 = 1.6 \times 10^5$

त्यसै गरी, $7 = 7 \times 1 = 7 \times 10^0$

Curriculum Development Centre

$0.7 = \frac{7}{10} = \frac{7}{10^1} = 7\times10^{-1}$ $0.07 = \frac{7}{100} = \frac{7}{10^2} = 7\times10^{-2}$

$0.00071 = \frac{71}{100000} = 7.1\times10^{-4}$

सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

दशमलवभन्दा बायाँ 1 ओटा मात्र अङ्क भएको सङ्ख्या (N)	→ $N\times10^n$ ←	10 लाई कति पटक गुणा गरियो ? (n)

तलका उदाहरणमा पृथ्वीको तौल र हाइड्रोजन परमाणु प्रोटोनको तौललाई कसरी लेख्न सकिन्छ, हेरौँ :

पृथ्वीको तौल = 5, 972, 000 ,000, 000, 000, 000, 000, 000 kg

= 5.972 x 1,000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 kg

= 5.972 x 10^{21} kg हुन्छ ।

त्यसै गरी, हाइड्रोजन परमाणुको तौल = 0.000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 001, 673 kg

$= \frac{1673}{1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000}$ kg

$\because \frac{1.673\times10^3}{10^{30}}$

$= \frac{1.673\times1000}{10^{30}}$ kg [$1.673\times1000 = 1673$]

= kg

= 1.673 x 10^{3-30} kg = 1.673 x 10^{-27} kg हुन्छ ।

> यदि कुनै पनि सङ्ख्या ज्यादै ठुलो अथवा ज्यादै सानो दशमलव सङ्ख्या भएमा त्यसलाई एउटा दशमलव सङ्ख्या (जसमा दशमलव भन्दा अगाडि एउटा अङ्क मात्र हुन्छ) र 10 को घाताङ्को गुणनका रूपमा व्यक्त गरिन्छ भने उक्त सङ्केतलाई सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केत भनिन्छ ।

उदाहरण 1

वैज्ञानिक सङ्केतमा रूपान्तरण गर ।

(क) 1234.56 (ख) 0.00657

Curriculum Development Centre

समाधान

(क) $1234.56 = 1234.56 \times 1 = 1234.56 \times 10^0$

$234.56 \times 10^0 = 123.456 \times 10^1$

$123.456 \times 10^1 = 12.3456 \times 10^2$

$12.3456 \times 10^{2n} = 1.23456 \times 10^3$

$1234.56 = 1.23456 \times 10^3$ हुन्छ ।

- प्रत्येक पटक दशमलवको स्थान 1 स्थान अगाडि सरेको छ ।
- प्रत्येक पटक 10 को घाताङ्क 1 ले बढ्दै गएको छ ।

(ख) $0.00657 = 0.00657 \times 1 = 0.00657 \times 10^0$

$0.00657 \times 10^0 = 00.0657 \times 10^{-1}$

$00.0657 \times 10^{-1} = 000.657 \times 10^{-2}$

$000.657 \times 10^{-2} = 0006.57 \times 10^{-3} = 6.57 \times 10^{-3}$

$\therefore 0.00657 = 6.57 \times 10^{-3}$

- प्रत्येक पटकमा दशमलवको स्थान एक स्थान पछाडि सरेको छ ।
- प्रत्येक पटक 10 को घाताङ्क 1 ले घटेको छ ।

उदाहरण 2

तलका सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख :

(क) 759 (ख) 39000 (ग) 0.00037

पहिले बायाँबाट दायाँ 1 अङ्क गन्ने र दशमलव राख्ने । त्यसपछि 1 मा दशमलव भन्दा पछाडिको अङ्कको सङ्ख्या बराबर 0 (शून्य) थप्ने । जस्तै : 759 = 7.59 x 100 भयो र 10 को घाताङ्कका रूपमा लेख्ने ।

समाधान

(क) $759 = 7.59 \times 100 = 7.59 \times 10^2$

(ख) $39000 = 3.9 \times 10000 = 3.910 \times 10^4$

(ग) $0.00037 = \frac{37}{100000} = \frac{3.7 \times 10}{100000} (\because 3.7 \times 10 = 37)$ ($\because$ भिन्नमा लैजादा)

$= \frac{3.7 \times 10^1}{10^5} =$ $\left[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\right]$

$\therefore 0.00037 = 3.7 \times 10^{-4}$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

तलका वैज्ञानिक सङ्केतहरूलाई दशमलव पद्धतिमा लेख :

(क) 6.3×10^3 (ख) 4.579×10^6

(ग) 7.4×10^{-5} (घ) 3.579×10^{-4}

तरिका

पहिले 10 को घाताङ्कलाई विस्तारित रूपमा लेख्ने, जस्तै : $10^3 = 1000$

त्यसपछि गुणा गरी लेख्ने

Curriculum Development Centre

समाधान

(क) $6.3 \times 10^3 = 6.3 \times 1000 = 6300.0 = 6300$

(ख) $4.579 \times 10^6 = 4.579 \times 1000000$

$= 4579000.000 = 4579000$

(ग) $7.4 \times 10^{-5} = \frac{7.4}{10^5} = \frac{7.4}{100000} = 0.000074$

(घ) $3.579 \times 10^{-4} = \frac{3.579}{10^4}$

$= \frac{0.3579}{1000} = \frac{0.03579}{100}$

$= \frac{0.003579}{10} = 0.0003579$

तरिका :

ऋणात्मक चिह्न भएको घाताङ्कलाई हरमा लैजाने

10 को घाताङ्कलाई विस्तारित रूपमा लेख्ने

त्यसपछि सङ्ख्याको अगाडि हरमा भएको शून्य बराबरको शून्य थपी दशमलव चिह्नलाई अगाडि बढाउने

अभ्यास 13.1

1. तलका दशमलव सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख :

(क) 45	(ख) 3400	(ग) 0.000023	(घ) 101000
(ङ) 0.010	(च) 45.01	(छ) 7000000	(ज) 0.00671
(झ) 625.6	(ञ) 0.07882	(ट) 118000	(ठ) 87200
(ड) 0.00000272	(ढ) 0.000037	(ण) 74171.7	(त) 3456.78

2. तलका वैज्ञानिक सङ्केतहरूलाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर :

(क) 2.30×10^4	(ख) 5.40×10^1	(ग) 1.76×10^0	(घ) 1.76×10^{-3}
(ङ) 7.4×10^{-5}	(च) 1.901×10^{-7}	(छ) 1.525×10^6	(ज) 6.58157×10^7
(झ) 5.256×10^8	(ञ) 5.23×10^{-7}	(ट) 8.71×10^{-8}	(ठ) 7.75763×10^{-9}

3. एउटा सामानसहितको ट्रकको तौल 12,000 kg छ भने उक्त तौललाई वैज्ञानिक सङ्केत लेख ।

4. आर्गनको परमाणुको अर्धव्यास 0.000,000,000,098 मिटर भए यसको वैज्ञानिक सङ्केत लेख ।

5. 3×10^8m/s ले प्रकाशको हावामा गति जनाउँछ भने त्यसको दशमलव मान कति हुन्छ ?

6. 30 दिन भएको महिनामा 6480000 सेकेन्ड हुन्छ भने यसको वैज्ञानिक सङ्केत कति हुन्छ ?

Curriculum Development Centre

13.2 वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखिएका सङ्ख्याहरूको सरलीकरण

(Simplification of Numbers with Scientific Notations)

(I) **वैज्ञानिक सङ्केत भएका सङ्ख्याहरुको जोड र घटाउ (Addition and Subtraction)**

तलका उदाहरण हेर :

उदाहरण 4

सरल गर :

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$ (ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

समाधान

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$

यहाँ दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर छैन । तसर्थ यिनीहरूलाई जोड्न मिल्दैन र दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर बनाउनुपर्ने हुन्छ ।

> यदि दुवै पदको घाताङ्क बराबर छैन भने सङ्ख्याका वैज्ञानिक सङ्केतहरू जोड्न र घटाउन मिल्दैन ।

यहाँ, $3.4 \times 10^2 = 0.34 \times 10^3$ हुन्छ ।

अब, $3.4 \times 10^2 = 4.57 \times 10^3$

$= 0.34 \times 10^3 + 4.57 \times 10^3$

$= (0.34 + 4.57) \times 10^3$

$= 4.91 \times 10^3$

> वैज्ञानिक सङ्ख्याहरू जोड्दा/घटाउँदा गुणाङ्क जोडिन्छ/घटाइन्छ र 10 को घाताङ्क जस्ताको तस्तै राखिन्छ ।

(ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

$= (4.54 - 2.4) \times 10^{-3}$ [दुवैमा समान घाताङ्क –3 भएकाले]

$= 2.14 \times 10^{-3}$

(II) वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखिएका सङ्ख्याहरूको गुणन र भाग
(Multiplication and Division of Numbers with Scientific Notations)

तलका उदाहरण हेरौँ :

उदाहरण 5

सरल गर :

(क) $(2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$ (ख) $\dfrac{9.60\times10^7}{1.60\times10^4}$

समाधान

(क) $(2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$
$= 2.00 \times 4.12 \times 10^{3+4}$
$= 8.24 \times 10^7$

(दुई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखिएका सङ्ख्यालाई गुणन गर्दा गुणाङ्कहरूको गुणन गरिन्छ र घाताङ्क जोडिन्छ ।)

(ख) $\frac{9.60 \times 10^7}{1.60 \times 10^4}$
$= \frac{9.60}{1.60} \times 10^{7-4}$
$= 6.0 \times 10^3$

(कुनै वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखिएको सङ्ख्यालाई अर्को वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखिएको सङ्ख्याले भाग गर्दा गुणाङ्कले भाग गरिन्छ र घाताङ्क घटाइन्छ ।)

अभ्यास 13.2

1. **सरल गर र वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख :**

   (क) $(1.2 \times 10^5) + (5.35 \times 10^6)$ (ख) $6.91 \times 10^{-2} + 2.4 \times 10^{-3}$
   (ग) $9.70 \times 10^6 + 8.3 \times 10^5$ (घ) $3.67 \times 10^2 - 1.6 \times 10^1$
   (ङ) $8.41 \times 10^{-5} - 7.00 \times 10^{-6}$ (च) $1.33 \times 10^5 - 4.9 \times 10^4$

2. **सरल गर र वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख :**

   (क) $(4.3 \times 10^8) \times (2.0 \times 10^6)$ (ख) $(6.0 \times 10^3) \times (1.5 \times 10^{-2})$
   (ग) $(1.5 \times 10^{-2}) \times (8.0 \times 10^{-1})$ (घ) $(5.23 \times 10^{11}) \times (3.0 \times 10^{-10})$
   (ङ) $\frac{1.20 \times 10^{-8}}{3.0 \times 10^{-3}}$ (च) $\frac{7.8 \times 10^{-12}}{1.3 \times 10^{-13}}$ (छ) $\frac{8.4 \times 10^4}{1.2 \times 10^{-3}}$
   (ज) $\frac{5.6 \times 10^{-18}}{1.4 \times 10^{-8}}$ (झ) $\frac{8.1 \times 10^9}{9.0 \times 10^8}$ (ञ) $\frac{3.25 \times 10^{-10}}{1.625 \times 10^{-15}}$

3. **सरल गर :**

   (क) $\frac{(1.1 \times 10^3) + 2.3 \times 10^3}{1.7 \times 10^{-6}}$ (ख) $\frac{9.8 \times 10^8 - 4.9 \times 10^8}{7.0 \times 10^7}$
   (ग) $\frac{(2.1 \times 10^6) \times (4.0 \times 10^{-3})}{4.2 \times 10^{-4}}$ (घ) $\frac{6.48 \times 10^5}{(2.4 \times 10^4) \times (1.8 \times 10^{-2})}$

4. एउटा ट्याङ्कीमा 3.2×10^4 लिटर पानी छ र दोस्रो ट्याङ्कीमा 1.3×10^3 लिटर पानी छ भने दुवै ट्याङ्कीमा गरी जम्मा कति पानी होला ?

5. 2.7×10^9 km पार गर्नुपर्ने एउटा रकेटले 1.35×10^9 दुरी पार गरिसक्यो भने अब कति दुरी पार गर्न बाँकी रह्यो ?

6. 9.6×10^6 लिटर पेट्रोललाई 1.6×10^3 लिटरका कति ओटा बराबर ट्याङ्कीमा राख्न सकिएला ?

Curriculum Development Centre

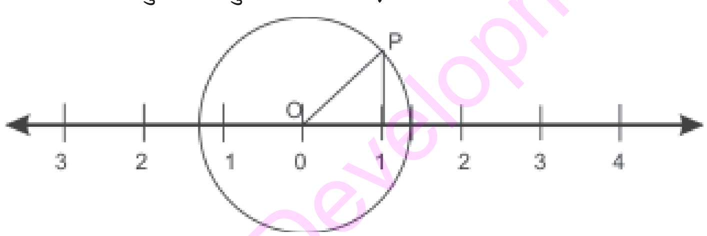
पाठ 14

वास्तविक सङ्ख्याहरू

(Real Numbers)

14.0. पुनरवलोकन (Review)

सङ्ख्याहरूको विकास क्रमको लामो समयसम्म कुनै दुई सङ्ख्याहरूबिचका चार क्रियाहरू गर्दा आनुपातिक सङ्ख्याहरू नै पर्याप्त थिए । जस्तै : कुनै दुई सङ्ख्याहरू जोड्दा, घटाउँदा, गुणन गर्दा वा भाग गर्दा आनुपातिक सङ्ख्या नै हुन्छ । त्यसै क्रममा 2 को वर्गमूल पत्ता लगाउन, $x^2 - 2 = 0$ मा x को मान पत्ता लगाउन आनुपातिक सङ्ख्याहरूबाट मात्र सम्भव भएन र अन्त्य नहुने वा पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्याहरूको आवश्यकता देखियो । साथै एक एकाइ भुजा भएको वर्गको बिकर्णको लम्बाइ पत्ता लगाउनका लागि नयाँ सङ्ख्याहरूको आगमन आवश्यक देखियो र तिनको खोजी भयो । जसलाई अनानुपातिक सङ्ख्या (irrational number) भनिन्छ । जस्तै : वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपात, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ आदि । $\sqrt{2}$ लाई सङ्ख्या रेखामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :



O लाई उद्गम बिन्दु मानी P(1,1) बिन्दु लिऊ र OP जोड । त्यसपछि OP को दुरी निर्देशाङ्क ज्यामितीद्वारा पत्ता लगाऊ ।

यहाँ, $OP = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ हुन्छ ।

OP बराबरको अर्धव्यास लिई O लाई केन्द्र मानेर एउटा अर्धवृत्त खिच । त्यस अर्धवृत्तको परिधिले सङ्ख्या रेखालाई काटेको ठाउँमा $\sqrt{2}$ पर्छ (कसरी ?) । यसरी एउटा अनानुपातिक सङ्ख्यालाई पनि सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

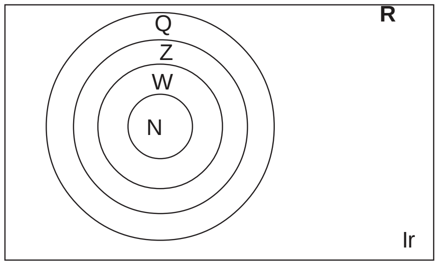
14.1. वास्तविक सङ्ख्याहरूको परिचय (Introduction to Real Numbers)

आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह (Q) र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह (Irr) को संयोजन समूहलाई वास्तविक सङ्ख्याको समूह भनिन्छ । यसलाई R ले जनाइन्छ र $R = Q \cup Irr$ हुन्छ ।

अर्थात, कुनै पनि सङ्ख्यालाई सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ भने सो सङ्ख्यालाई वास्तविक सङ्ख्या भनिन्छ ।

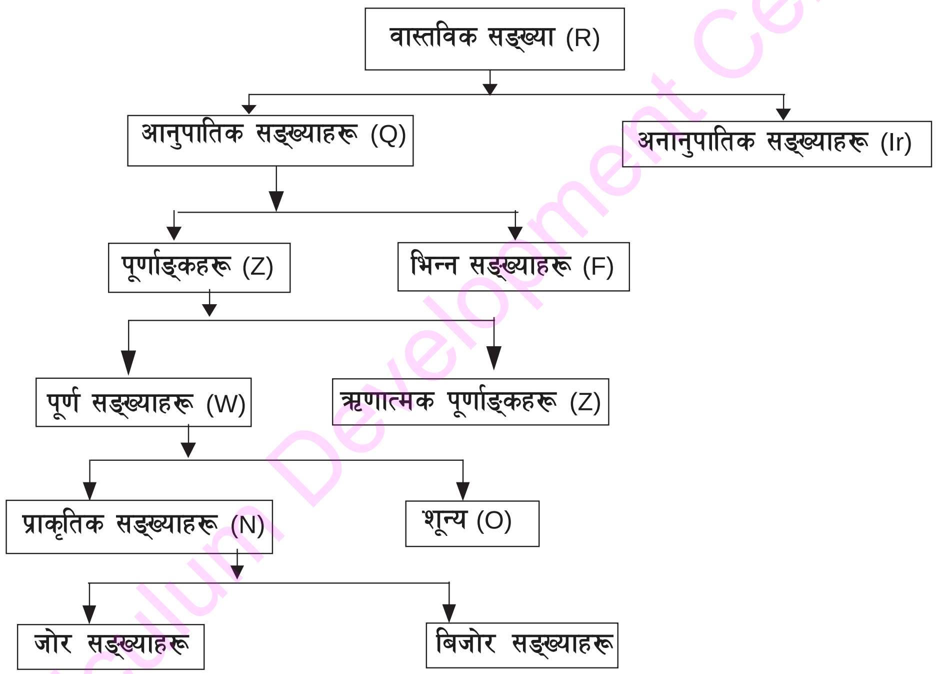
Curriculum Development Centre

वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहलाई भेनचित्रमा निन्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



यहाँ, $N \subset W \subset Z \subseteq Q \subset R, Ir \subset R$ हुन्छ ।

वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई निन्नानुसार प्रवाह तालिका (flow chart) बाट देखाउन सकिन्छ :



14.1.2. दशमलव र अनानुपातिक सङ्ख्याहरू (Decimal and Irrational Numbers)

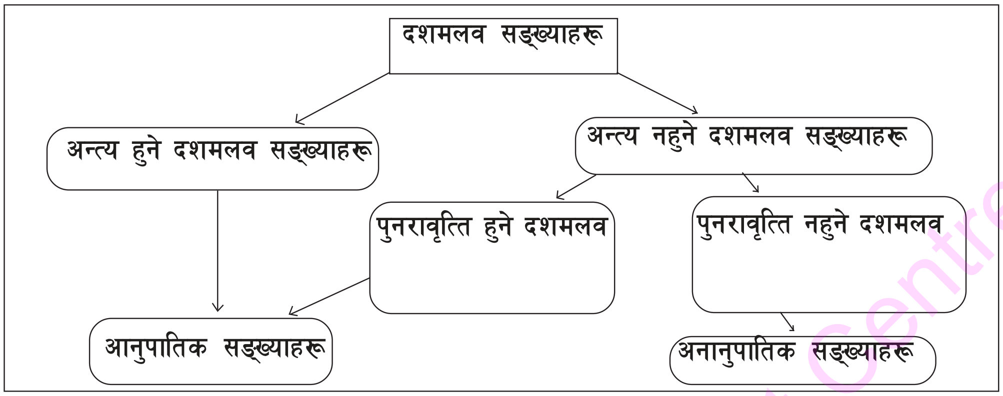
तलका सङ्ख्याहरूलाई हेर :

$\frac{23}{4} = 4.75$; $\frac{20}{6} = 3.3333....$; $\pi = 3.14285....$

दिइएका दशमलव सङ्ख्याहरूमा कुन कुन अन्त्य हुने, कुन दोहोरिने वा पुनरावृत्ति हुने र कुन अन्त्य नहुने र पुनरावृत्ति नहुने दशमलव सङ्ख्या हुन्, छुट्याऊ ।

Curriculum Development Centre

यहाँ, पहिलो (4.75) र दोस्रो (3.33333……) आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् भने तेस्रो (3.14285……) अनानुपातिक सङ्ख्या हो । तलको तालिकामा हेर :



उदाहरण 1

तल दिइएका सङ्ख्याहरू कुन आनुपातिक हुन् र कुन अनानुपातिक हुन्, लेख :

(क) 0.35 (ख) (ग) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (घ) $\frac{9}{4}$ (ङ) 1.732 ... (च) 0.414141

समाधान

$\sqrt{6}$

(क) आनुपातिक सङ्ख्या (अन्त्य भएको दशमलव)

(ख) अनानुपातिक सङ्ख्या (निश्चित मान नभएको वर्गमूल)

(ग) आनानुपातिक सङ्ख्या (निश्चित मान नभएको वर्गमूल)

(घ) आनुपातिक सङ्ख्या (अन्त्य भएको दशमलव)

(ङ) अनानुपातिक सङ्ख्या (नदोहोरिएको र अन्त्य नभएको दशमलव)

(च) आनुपातिक सङ्ख्या (दोहोरिएको दशमलव)

14.1.3. दशमलवलाई भिन्नमा रूपान्तर (Convertion of Decimal into Fraction)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गर :

(क) $\frac{2}{3} = 0.666........... = 0.\overline{6}$ (ख) $\frac{17}{12} = 1.416666....... = 0.4\overline{16}$

(ग) $\frac{4}{7} = 0.5714285714\,28 = 0.\overline{571428}$

Curriculum Development Centre

उदाहरणहरूमा अङ्कको वा अङ्कहरूको माथिको मेलबन्द (Bar) ले उक्त सङ्ख्या दोहोरिरहन्छ भन्ने जनाउँछ ।

उदाहरण 2

तलका दशमलवहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

(क) $0.\overline{3}$ (ख) $0.\overline{41}$

समाधान

(क) $0.\overline{3}$

मानौँ $x = 0.\overline{3}$

$x = 0.33....$ (i)

(i) लाई 10 ले गुणा गर्दा,

$10x = 3.33......$(ii)

अब, (ii) बाट (i) घटाउँदा,

$10x - x = 3.33 - 0.33$

अथवा $9x = 3.0$

अब, $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore 0.\overline{3} = \frac{1}{3}$

(ख) $0.\overline{41}$

मानौँ, $x = 0.\overline{41}$

$x = 0.4141$ — (1)

(1) लाई 100 ले गुणा गर्दा,

$100x = 41.4141$ .... (2)

अब, (2) बाट (1) घटाउँदा,

$100x - x = 41.4141 - 0.4141$

अथवा, $99x = 41$

अथवा, $x = \frac{41}{99}$

$\therefore 0.\overline{41} = \frac{41}{99}$

अभ्यास 14.1

1. **तलका तथ्यहरू ठिक भए कोष्ठमा (✓) र बेठिक भए कोष्ठमा (x) चिह्न लेख :**

(क) वास्तविक सङ्ख्याको समूह भनेको आनुपातिक सङ्ख्या र आनुपातिक सङ्ख्याको संयोजन हो । [ ]

(ख) आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहको पुरक समूह अनानुपातिक सङ्ख्याको समूह हो । [ ]

(ग) पूर्ण सङ्ख्याको समूह र पूर्णाङ्कको समूह एउटै हो । [ ]

घ) $Z \subset Q \subset R$ [ ] (ङ)

(च) (छ)

Curriculum Development Centre

(ज) (झ)

(ञ)

2. तलका सङ्ख्याहरू कुन अनानुपातिक हुन् र कुन आनुपातिक हुन्, किन ?

(क) (ख) 3.57 (ग) 3.141312 (घ) $\frac{22}{3}$

(ङ) $3\sqrt{3}$ (च) 4.95 (छ) $-\sqrt{169}$ (ज) $\frac{\sqrt{11}}{3}$

(झ) $\sqrt{9}$ (ञ) $\sqrt{26}$ (ट) $\frac{2}{3}$ (ठ) $\frac{27}{4}$

3. तलका दशमलव सङ्ख्याहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

(क) $0.\overline{5}$ (ख) $0.\overline{7}$ (ग) $0.\overline{24}$ (घ) $0.\overline{132}$

(ङ) $0.\overline{27}$ (च) $1.\overline{57}$ (छ) $0.\overline{365}$ (ज) $4.\overline{78}$

(झ) $0.\overline{445}$ (ञ) $1.\overline{525}$

4. भेनचित्रद्वारा R, Z र Irr को सम्बन्ध प्रस्तुत गर ।

5. Q, R, Irr को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

14.2. सर्डको परिचय (Introduction to Surd)

कक्षामा विद्यार्थीहरू बेन्चअनुसारको समूह बनाएर प्रत्येक समूहले $\sqrt{2}, \frac{5}{13}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{50}$ को मान पत्ता लगाऊ ।

कुन सङ्ख्याका वर्गमूल पत्ता लगाउन सकियो, कुन सङ्ख्याका पत्ता लगाउन सकिएन, वा कुन सङ्ख्याका वर्गमूल पूर्ण सङ्ख्या हुन् र कुन सङ्ख्याका वर्गमूल पूर्ण सङ्ख्या होइनन्, छुट्याऊ र समूहका प्रत्येक सदस्यहरूसँग छलफल गरी प्रस्तुत गर ।

कुनै पनि सङ्ख्याको पूर्ण वर्गमूल पत्ता लगाउन सकिँदैन र सो सङ्ख्याको वर्गमूलको निश्चित मान हुँदैन र मूल चिह्नसहित लेखिन्छ भने त्यस्ता सङ्ख्याहरूलाई सर्ड (surd) भनिन्छ, जस्तै : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}$ आदि ।

उदाहरण 1

तलका कुन कुन सङ्ख्याहरू सर्ड (surd) हुन्, लेख :

(क) $\sqrt{4}$ (ख) $\sqrt{18}$ (ग) $\sqrt{196}$ (घ) $\sqrt{56}$ (ङ) $\frac{3}{\sqrt{45}}$

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ,

(क) $\sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2} = 2$, यो सर्ड होइन ।

(ख) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$, यो सर्ड हो ।

(ग) $\sqrt{196} = \sqrt{2 \times 2 \times 7 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 7^2} = 2 \times 7 = 14$, यो सर्ड होइन ।

(घ) $\sqrt{56} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 7} = 2\sqrt{14}$, यो सर्ड हो ।

(ङ) $\frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{3}{\sqrt{3 \times 3 \times 5}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 \times 5}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, यो सर्ड हो ।

नोट : सबै सर्डहरू अनानुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

14.2.1. अनुपातीकरण (Rationalization)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ कस्तो सङ्ख्या हो, यसको मानमा कुनै फरक नपर्ने गरी हरको मूल चिहन कसरी हटाउन सकिएला, विचार गर र लेख ।

त्यसै गरी $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$ लाई सरल गरेर हेर, के हुन्छ ?

कुनै पनि मूल चिहन समावेश भएको सङ्ख्यालाई त्यसैमा पुनः गुणन गर्दा मूल चिहन हट्छ, जस्तै :

$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5 \times 5} = \sqrt{5^2} = 5$ हुन्छ ।

फेरि $\frac{3}{\sqrt{2}}$ लाई हेरौँ ।

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ हुन्छ ।}$$

यसरी सर्डको हरमा भएको मूल चिहनलाई हटाउने प्रक्रिया नै आनुपातीकरण हो ।

कुनै पनि सर्डको हरमा भएको मूल चिहनलाई सो सर्डको मानमा घटबढ नहुने गरी हटाउने प्रक्रियालाई आनुपातीकरण (rationalization) भनिन्छ । हरमा रहेको सर्डले अंश र हर दुवैलाई गुणा गरेर हरबाट मूल चिहन हटाइन्छ ।

उदाहरण 2

तलका सङ्ख्याहरूको अनुपातीकरण गर :

(क) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (ख) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$ (ग) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ (घ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ (ङ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ, (क) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (यहाँ हरमा $\sqrt{2}$ छ र $\sqrt{2}$ लाई हटाउन हर र अंश दुवैमा $\sqrt{2}$ ले गुणा गर्ने)

$=\frac{\sqrt{3\times2}}{\sqrt{2\times2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(ख) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{2\times2\times3}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ (हर अंश दुवैमा $\sqrt{5}$ ले गुणन गर्दा)

$=\frac{2\sqrt{3\times5}}{\sqrt{5\times5}}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

(ग) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5\times2}}{\sqrt{2\times2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ (हर अंश दुवैमा $\sqrt{2}$ ले गुणन गरेको)

(घ) $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3\times3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

(ङ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-1\times\sqrt{2}}{3-1}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

14.2.2 मूल चिह्न ($\sqrt{\ }$) समावेश भएका सरल

एउटै सङ्ख्यामा मूल चिह्न भएका अभिव्यञ्जकहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जकहरू जस्तै जोड र घटाउ गर्न सकिन्छ, जस्तै :

उदाहरण 3

सरल गर :

(क) $3\sqrt{5}+\sqrt{5}$ (ख) $7\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ (ग) $9\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{8}$

समाधान

यहाँ, (क) $3\sqrt{5}+\sqrt{5}$

$= (3+1)\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{5}$

(ख) $7\sqrt{2}-5\sqrt{2}$

$= (7-5)\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

Curriculum Development Centre

(ग) $9\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{8}$

$=9\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{2\times2\times2}$
$=9\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\times2\sqrt{2}$
$=9\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6\sqrt{3}+10\sqrt{2}$
$=(9-6)\sqrt{3}+(3+10)\sqrt{2}$
$=3\sqrt{3}+13\sqrt{2}$

उदाहरण 6

गुणन गर :

(क) $2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}$

समाधान

यहाँ,
$2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}$
$=2\times3\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=6\times\sqrt{3\times2}$
$=6\sqrt{6}$

(ख) $3\sqrt{5}\times\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$

समाधान

यहाँ,
$3\sqrt{5}\times\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$
$=3\sqrt{5}\times2\sqrt{2}+3\sqrt{5}\times5\sqrt{5}$
$=6\sqrt{10}+15\sqrt{5^2}$
$=6\sqrt{10}+15\times5$
$=75+6\sqrt{10}$

मूल चिह्न सम्मिलित गुणन गर्दा मूल चिह्नबाहिरको अङ्कसँग मूल चिह्नबाहिरको सङ्ख्या र मूल चिह्नभित्रको सङ्ख्यासँग मूल चिह्नभित्रको सङ्ख्या गुणा गरिन्छ ।

उदाहरण 5

सरल गर: (क) $\sqrt{125}+\sqrt{80}$ (ख) $2\sqrt{28}-3\sqrt{49}+10\sqrt{7}$

समाधान

(क) $\sqrt{125}+\sqrt{80}$

$=\sqrt{5\times5\times5}+\sqrt{2\times2\times2\times2\times5}$
$=\sqrt{5^2\times5}+\sqrt{2^2\times2^2\times5}$
$=5\sqrt{5}+4\sqrt{5}$
$=9\sqrt{5}$

(ख) $2\sqrt{28}-3\sqrt{49}+10\sqrt{7}$

$=2\sqrt{2\times2\times7}-3\sqrt{7\times7}+10\sqrt{7}$
$=2\times2\sqrt{7}-3\times7+10\sqrt{7}$
$=4\sqrt{7}-21+10\sqrt{7}$
$=14\sqrt{7}-21$
$=7(2\sqrt{7}-3)$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 14.2

1. तलका सङ्ख्याहरूको हरको आनुपातीकरण गर :

(क) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (ख) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (ग) $\frac{7}{\sqrt{8}}$ (घ) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ (ङ) $\frac{22}{\sqrt{11}}$

(च) $\frac{10}{\sqrt{48}}$ (छ) $\frac{11}{\sqrt{44}}$ (ज) $\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (झ) $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$ (ञ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

(ट) $\frac{3}{4-\sqrt{7}}$ (ठ) $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$

2. सरल गर :

(क) $3\sqrt{5}+6\sqrt{5}$ (ख) $3\sqrt{10}-3\sqrt{10}$ (ग) $7\sqrt{7}+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

(घ) $10\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ (ङ) $3\sqrt{20}+2\sqrt{45}$ (च) $21\sqrt{7}-3\sqrt{28}+\sqrt{63}$

(छ) $\sqrt{125}+\sqrt{5}-3\sqrt{5}$ (ज) $-\sqrt{11}+\sqrt{121}+\sqrt{44}$

(झ) $\sqrt{128}-\sqrt{50}$ (ञ) $\sqrt{63}-2\sqrt{28}+5\sqrt{7}$

(ट) $\sqrt{288}-\sqrt{72}+\sqrt{8}$ (ठ) $3\sqrt{17}-\sqrt{68}+\sqrt{153}$

(ड) $12\sqrt{24}-3\sqrt{216}-5\sqrt{54}+\sqrt{600}$

3. सरल गर :

(क) $(2\sqrt{3}\times3\sqrt{5})+5\sqrt{15}$ (ख) $(3\sqrt{7}+2\sqrt{28})\times4\sqrt{7}$

(ग) $(9\sqrt{125}-6\sqrt{180})\times3\sqrt{6}$ (घ) $(8\sqrt{6}\times3\sqrt{2})-8\sqrt{48}$

(ङ) $(5\sqrt{7}\times3\sqrt{5})\times4\sqrt{3}$ (च) $9\sqrt{13}\times(4\sqrt{52}-3\sqrt{117})$

4. आनुपातीकरण गरी सरल गर :

(क) $\frac{3}{\sqrt{2}}+5$ (ख) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+2\sqrt{2}$ (ग) $\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}$

(घ) $\sqrt{45}+\sqrt{125}-\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ङ) $\frac{7}{\sqrt{75}}+\sqrt{300}-3\sqrt{48}$

Curriculum Development Centre

पाठ 15

अनुपात, समानुपात र प्रतिशत
(Ratio, Proportion and Percentage)

15.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका वाक्यहरू पढ र मिल्ने वाक्यलाई एक ठाउँमा लेख :

(क) रामसँग रु. 450 छ ।

(ख) पोखरा - काठमाडौँको बस भाडा रु. 500 छ ।

(ग) पेम्बाको तौल 50 kg छ ।

(घ) विपनासँग रु. 500 छ ।

(ङ) काठमाडौँ - धरानको बस भाडा रु. 950 छ ।

(च) रविलालको तौल 55 kg छ ।

माथिका वाक्यहरूमा (ख) र (ङ) दुवै भाडँ दर हुन् । जसमा काठमाडौँबाट पोखरा र धरानको भाडा दर दिइएको छ । पोखरा र धरानको भाडा दर क्रमश: रु. 500 र रु. 950 छ । काठमाडौँबाट पोखरा र धरानको भाडा अनुपात $=\frac{500}{950}=\frac{10}{19}$ छ । यसलाई 10:19 लेखिन्छ ।

त्यस्तै, अन्य एउटै गुण भएका परिमाणहरू के के हुन्, पत्ता लगाई अनुपात निकाल ।

15.1. अनुपात (Ratio)

दुई ओटा समान एकाइ भएका परिमाणलाई तुलना गर्न प्रयोग गरिने भिन्नलाई अनुपात भनिन्छ । यदि a र b को एउटै एकाइ छ भने तिनीहरूको अनुपातलाई $\frac{a}{b}$ वा a:b लेखिन्छ । जहाँ a लाई पहिलो पद (antecedent) र b लाई दोस्रो पद (consequent) भनिन्छ ।

जस्तै : प्रमिलाको उचाइ 5 फिट छ र रमिलाको उचाइ 4 फिट छ भने उनीहरूको उचाइको अनुपात 5:4 भयो । अनुपातलाई न्यूनतम (लघुत्तम) भिन्नमा लेखिन्छ ।

पेम्बा र सोनामको उचाइको अनुपात 4:5 छ । अब पेम्बाको उचाइ 40 इन्च भए सोनामको उचाइ कति होला ?

पेम्बाको उचाइ : सोनामको उचाइ = 4:5

अथवा, $\frac{\text{पेम्बाको उचाइ}}{\text{सोनामको उचाइ}}=\frac{4}{5}$

अथवा, $\frac{40 \text{ इन्च}}{\text{सोनामको उचाइ}}=\frac{4}{5}$

सोनामको उचाइ $=\frac{40\times 5}{4}=50$ इन्च ।

यसरी कुनै अनुपात र एउटा परिमाण थाहा छ भने अर्को परिमाण पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

तलका परिमाणहरूलाई अनुपातमा रूपान्तरण गर :

(क) 200 पैसा र 200 रुपियाँ

(ख) 4 kg र 5000 gm

समाधान

(क) यहाँ, 200 पैसा र 200 रुपियाँ दुवैमा एउटै एकाइ छैन । तसर्थ, 200 पैसा = रु. 2 हुन्छ ।

अतः अनुपात = $\frac{\text{2 रुपियाँ}}{\text{200 रुपियाँ}} = \frac{1}{100}$ = 1:100

(ख) 4 kg र 5000 gm

यसमा पहिलो परिमाण = 4 kg

दोस्रो परिमाण = 5000 gm = 5kg

अतः अनुपात $= \frac{4\text{kg}}{5\text{kg}} = 4:5$

उदाहरण 2

ऋतु र रश्मीले एउटा वस्तुमा 10:13 को अनुपातमा लगानी गरे । यदि ऋतुले रु. 5000 लगानी गरिन् भने रश्मीले कति गरिन् होला ?

समाधान

यहाँ, ऋतु र रश्मीको लगानीको अनुपात 10:13

ऋतुको लगानी = रु. 5000

रश्मीको लगानी = ?

अब, $\frac{\text{ऋतुको लगानी}}{\text{रश्मीको लगानी}} = \frac{10}{13}$

अथवा, $\frac{\text{रु. 5000}}{\text{रश्मीको लगानी}} = \frac{10}{13}$

रश्मीको लगानी रु. $= \frac{13 \times 5000}{10} = 6500$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 3

रोहन, बिन्दु र रामविलासले एउटा व्यवसायमा 3:4:5 को अनुपातमा लगानी गरे । यदि उनीहरूले रु. 36,000,000 जम्मा गरेछन् भने प्रत्येकले कति कति रुपियाँ लगानी गरेका रहेछन् ?

समाधान

यहाँ, जम्मा रकम = रु. 36,000,000

र अनुपातलाई x मान्दा प्रत्येकको लगानी $3x$, $4x$ र $5x$ हुन्छ ।

अब, प्रश्नअनुसार $3x, + 4x + 5x$ = रु. 36,000,000

अथवा, $12x = 36,000,000$

अथवा, $x = \frac{36000000}{12}$ = रु. 3,000,000

त्यसकारण, रोहनको लगानी = $3x = 3 \times$ रु. 3,000,000 = रु. 9,000,000

बिन्दुको लगानी = $4x = 4\times$ रु. 3,000,000 = रु. 12,000,000

रामविलासको लगानी = $5x = 5 \times$ रु. 3,000,000 = रु. 15,000,000

अभ्यास 15.1

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा पहिलो र दोस्रो परिमाणको अनुपातलाई न्यूनतम भिन्नका रूपमा लेख :

   (क) 5 hrs र 10 hrs　　(ख) 3 ft र 9 ft

   (ग) 750 gram र 1.5 kg　　(घ) 20 cm र 25 cm

   (ङ) 375 ml र 1l　　(च) Rs. 75 र 750 paisa

2. नेपाल मा. वि. को शिक्षक र विद्यार्थी अनुपात 1:32 छ । यदि उक्त विद्यालयमा जम्मा 25 जना शिक्षक भए विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?

3. 1:4000 को स्केलमा खिचिएको नक्सामा दुई ठाउँबिचको दुरी 4 cm छ भने उक्त स्थानहरूबिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

4. दुई सङ्ख्याहरु 3:4 को अनुपातमा रहेका छन् । यदि दुवै सङ्ख्यामा 3 जोड्दा 2:3 को अनुपातमा हुन्छन् भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाऊ ।

5. सुशान्त र एन्जलले रु. 600 लाई 5:7 को अनुपातमा बाँड्दा दुवैले कति कति रुपियाँ पाउलान्, पत्ता लगाऊ ।

6. एउटा परिवारमा खाना र शिक्षामा खर्चको अनुपात 4:5 छ । यदि शिक्षामा मासिक रु. 6750 खर्च हुन्छ भने खानामा कति खर्च चाहिएला ?

Curriculum Development Centre

7. 8, 9 र 10 वर्षका बालिकाहरूलाई रु. 216 उनीहरूको उमेरको अनुपातमा बाँड्दा प्रत्येकले कति कति रुपियाँ पाउलान् ?

8. विपिन, अमृत र आषिशले 2:5:6 को अनुपातमा लगानी गरी एउटा व्यवसाय सञ्चालन गरे । एक वर्षपछि उनीहरूले रु. 65,000,000 आम्दानी गरे भने प्रत्येकले कति कति रकम आम्दानी गरे होलान् ?

9. A ले भन्दा B ले दोब्बर र B ले भन्दा C ले तेब्बर रकम जम्मा गर्दा रु. 98460 जम्मा भयो भने प्रत्येकले कति कति रकम जम्मा गरे होलान् ?

15.2. समानुपात (Proportion)

कक्षा 8 मा 24 जना छात्रा र 27 जना छात्र छन् । त्यस्तै कक्षा 9 मा 32 जना छात्र र 36 जना छात्रा छन् भने दुई ओटा कक्षामा कति कति अनुपातमा छात्र र छात्रा रहेछन्, पत्ता लगाऊ ।

दुवै कक्षामा छात्र र छात्राबिचको अनुपात कस्तो छ, बराबर छ कि छैन हेर ।

कुनै दुई अनुपातलाई न्यूनतम भिन्नमा लेख्दा अनुपात बराबर हुन्छ भने त्यस्ता अनुपातहरूलाई समानुपात भनिन्छ । यदि a:b = c:d छ भने a:b र c:d समानुपात हुन्छन् र a, b, c र d समानुपातिक हुन्छन् । यसलाई a:b::c:d पनि लेखिन्छ ।

माथिको उदाहरणमा $\frac{24}{27}$ र $\frac{32}{36}$ समानुपातिक छन् ।

Extremes

यसलाई 24:27 = 32:36 लेखिन्छ ।

Means

यसलाई 24:27::32:36 पनि लेखिन्छ । जसमा बाहिरका दुई पदलाई extremes भनिन्छ, जस्तै : 24 र 36 भित्रका दुई पदलाई means भनिन्छ, जस्तै : 27 र 32

extremes र means को छुट्टा छुट्टै गुणनफल बराबर हुन्छ ।

अर्थात्, $\frac{a}{b}$ र $\frac{c}{d}$ समानुपातमा छन् यो $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हुन्छ ।

अथवा, $a \times d = b \times c$ हुन्छ ।

यसलाई प्रयोग गरेर समानुपातमा रहेका तिन ओटा पद दिएमा बाँकी पद पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरण 1

समानुपातमा रहेका पदहरूमध्ये दोस्रो, तेस्रो र चौथो पद क्रमशः 4, 6 र 8 भए पहिलो पद पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ पहिलो पद x मानौँ ।

x, 4, 6 र 8 समानुपातकि छन् । तसर्थ, $\frac{x}{4}=\frac{6}{8}$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अथवा, 8x = 24

$$x = \frac{24}{8} = 3$$

उदाहरण 2

4 घण्टामा 170 km दुरी पार गर्ने बसलाई सोही गतिमा 680 km दुरी पार गर्न कति समय लाग्ला ?

समाधान

680 km दुरी पार गर्न लाग्ने समय x घण्टा मानौँ ।

अब, $\frac{4}{170} = \frac{x}{680}$ हुन्छ ।

अथवा, $x = \frac{4 \times 680}{170} = 16\text{hrs}$

$\therefore$ 680 km दुरी पार गर्न 16 घण्टा लाग्छ ।

अभ्यास 15.2

$\frac{1}{5} : \frac{1}{6}$

1. तलका सङ्ख्याहरू समानुपातमा छन् वा छैनन् जाँच र लेख :

(क) 3, 5, 12, 20 (ख) 7, 8, 14, 20

(ग) 5m, 3m, 25m, 25m (घ) 3ft, 8ft, 12ft, 32ft

2. तलका समानुपात सङ्ख्याहरूमा थाहा नभएका पद पत्ता लगाऊ :

(क) x, 2, 6, 4 (ख) 3, a, 9, 21

(ग) 16, 4, 4, y (घ) 7, 9, z, 18

3. x को मान पत्ता लगाऊ :

(क) x:5 = 10:25 (ख) 3:7 = 21:x

(ग) 10:x = 2:11 (घ) 25:15 = x:3

4. राष्ट्रिय प्रा. वि. मा सिसाकलम र कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थीको अनुपात 10:11 छ । यदि सिसाकलम प्रयोग गर्ने 110 जना विद्यार्थी भए कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

5. 3:5 को अनुपातलाई 5:6 बनाउन पर्दा दुवैमा कति जोड्नुपर्ला ?

6. रु. 880 लाई को अनुपातमा बाँड्दा कति कति हुन्छ ?

Curriculum Development Centre

7. 7 मिनेटमा 21 kg मकै पिस्ने घट्टलाई 15kg मकै पिस्न कति समय लाग्छ होला ?

8. अनिताको गणित र विज्ञानको प्राप्ताङ्कको अनुपात 10:12 छ । यदि उसको विज्ञानको प्राप्ताङ्क 80 भए गणितको प्राप्ताङ्क कति होला ?

9. कोपीलाले नैतिक शिक्षा र व्यावसायिक शिक्षा तथा अङ्ग्रेजी र विज्ञानमा समानुपातिक अङ्क प्राप्त गरिन् । यदि ती विषयहरूमा क्रमश: 25, 30, 75 र x प्राप्त गरिन् भने x को मान कति होला ?

10. रु.180 मा 12 ओटा कापी पाइन्छ भने रु. 225 मा कति ओटा कापी पाइन्छ ?

11. चन्द्रमा र पृथ्वीको गुरुत्वाकर्षणको अनुपात 1:6 छ । पृथ्वीमा 90 N तौल भएका वस्तुको तौल चन्द्रमामा कति होला, पत्ता लगाऊ ।

12. परीक्षामा सम्मिलित 153 जना विद्यार्थीहरूमध्ये 2:4:5 को अनुपातमा पहिलो, दोस्रो र तेस्रो श्रेणीमा उत्तीर्ण भए र 21 जना अनुत्तीर्ण भए भने पहिलो, दोस्रो र तेस्रो श्रेणीमा कति कति जना उत्तीर्ण भए ?

13. एउटा मिठाईमा दुध र चिनीको अनुपात 5:3 छ । यदि दुध 750 gm छ भने चिनीको भाग कति होला ?

15.3 प्रतिशत (Percentage)

तलका भिन्नलाई हेरौँ :

कक्षाका सबै विद्यार्थीलाई दुई समूहमा विभाजन गरी तालिकामा दिएका उदाहरणहरूबारे छलफल गर :

तालिका क	तालिका ख
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100}$	$0.33 = 0.33 \times \frac{100}{100} = \frac{33}{100}$
$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{60}{100}$	$0.80 = 0.80 \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100}$

यहाँ, $\frac{1}{2}$ भनेको 100 भागमा 50 भाग रहेछ, यसलाई 50 प्रतिशत भनिन्छ ।

त्यस्तै $\frac{3}{5}$ भनेको 100 भागमा 60 भाग रहेछ, यसलाई कति प्रतिशत भनिन्छ ?

0.33 भनेको 33 प्रतिशत भयो भने 0.80 बराबर प्रतिशत कति होला ?

$33\% = \frac{33}{100} = 0.33$ हुन्छ ।

नोट : भिन्न वा दशमलवलाई प्रतिशतमा रूपान्तरण गर्न 100 ले गुणा गरी % चिह्न राख्ने ।

Curriculum Development Centre

प्रत्येक विद्यार्थीले तलका दुई ओटा तालिकामा भएका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाई समूहमा छलफल गर ।

तालिका (क)	तालिका (ख)
50 को 16 = कति	50 को 20 = ?
100 को 16 = ?	125 को 8 = ?
320 को 16 = ?	250 को 4 = ?
500 को 16 = ?	500 को 2 = ?
1020 को 16 = ?	1000 को 1 = ?

> प्रतिशतलाई भिन्न वा दशमलवमा रूपान्तरण गर्न 100 ले भाग गरी % चिह्न हटाउने ।

माथिको तालिकाबाट के थाहा हुन्छ निष्कर्ष पत्ता लगाऊ ।

त्यसकारण प्रतिशत एउटा मापन हो, जसमा कुनै परिमाणलाई 100 को भागका रूपमा व्यक्त गरिन्छ ।

15.3.1 दिइएको प्रतिशत बराबर सङ्ख्या पत्ता लगाउने (To find the number of given percentage)

उदाहरण 1

560 जना सम्मिलित कक्षा ८ को अन्तिम परीक्षामा 40% प्रथम श्रेणीमा, 30% द्वितीय श्रेणीमा, 20% तृतीय श्रेणीमा उत्तीर्ण भए भने जम्मा कति जना विद्यार्थी अनुत्तीर्ण भए, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी = 560

प्रथम श्रेणीमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी = 560 को 40%

$= \frac{560 \times 40}{100} = 224$ जना

द्वितीय श्रेणीमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी = 560 को 30%

$= \frac{560 \times 30}{100} = 168$ जना

तृतीय श्रेणीमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी = 560 को 20%

$= \frac{560 \times 20}{100} = 112$ जना

जम्मा उत्तीर्ण सङ्ख्या = 224+168+112 = 504 जना

अब अनुत्तीर्ण सङ्ख्या = 560 - 504 = 56 जना

अर्को तरिका, जम्मा उत्तीर्ण प्रतिशत = 40% + 30% + 20% = 90%

अनुत्तीर्ण प्रतिशत = 100% - 90% = 10%

अब, अनुत्तीर्ण सङ्ख्या = 560 को 10% $= \frac{560 \times 10}{100} = 56$ जना

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

दिइएको तालिकामा एउटा पसलमा विभिन्न सामग्रीको मूल्य सूची दिइएको छ । एउटा सर्ट, पाइन्ट र ज्याकेट किन्नका लागि जम्मा कति रुपियाँ आवश्यक पर्छ होला ?

मूल्य सूची	
वस्तु	मूल्य
सर्ट	रु. 250
पाइन्ट	रु. 475
ज्याकेट	रु. 1200
हरेक सामानमा 20% छुट ।	

समाधान

यहाँ जम्मा किन्नुपर्ने सामानको मूल्य

सर्ट	रु. 250
पाइन्ट	रु. 475
ज्याकेट	रु. 1200
जम्मा	रु. 1925

छुट प्रतिशत = 20%

अब, छुट रकम = 1975 को 20%

$= \frac{1975 \times 20}{100} = 395$

= रु. 395

जम्मा आवश्यक रुपियाँ = रु. 1975 - छुट

= रु. 1975 - रु. 395

= रु. 1580

नोट : यसलाई छुट्टा छुट्टै सामानको छुट घटाएर पनि गर्न सकिन्छ ।

15.3.2. दिइएको सङ्ख्याको प्रतिशत निकाल्ने (To find the Percentage of Given Number)

उदाहरण 3

गत वर्षको प्रति बोरा जिरा मसिनो चामलको मल्य रु. 1200 थियो । अहिले उक्त चामल बढेर रु. 1500 भयो भने उक्त चामलको मूल्य कति प्रतिशत बढ्यो ?

समाधान

यहाँ, गत वर्षको चामलको मूल्य = रु. 1200

अहिले चामलको मूल्य = रु. 1500

बढेको मूल्य = रु 1500 - रु. 1200 = रु. 300

बढेको प्रतिशत = ?

Curriculum Development Centre

अब, बढेको प्रतिशत = x मान्दा

रु.1200 को x = रु.300

अथवा, $\frac{1200 \times x}{100} = 300$

$\therefore x = \frac{300}{12} = 25\%$

तसर्थ उक्त चामलको मूल्य 25% ले वृद्धि भयो ।

(नोट : प्रतिशत निकाल्दा पुरानो परिमाणको सापेक्षमा निकालिन्छ । जस्तै : चामलको मूल्य रु. 1200 को निकालियो तर रु. 1500 को आधारमा होइन ।)

अभ्यास 15.3

1. तलका भिन्न वा दशमलवलाई प्रतिशतमा रूपान्तरण गर :

   (क) $\frac{3}{4}$ (ख) 0.34 (ग) $\frac{5}{8}$ (घ) 0.59 (ङ) $\frac{2}{3}$

2. दिइएका प्रतिशतलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

   (क) 45% (ख) 70% (ग) $\frac{25}{4}\%$ (घ) 91% (ङ) 53%

3. मान पत्ता लगाऊ :

   (क) 250 को 10% (ख) 150 को 90% (ग) 180 को 12.5% (घ) 220 को 20%

4. कति परिमाणको

   (क) 15% ले रु 225 हुन्छ ? (ख) 21% ले 42 मिटर हुन्छ ?

   (ग) 25% ले 12.5 दिन हुन्छ ? (घ) 12% ले 72 जना विद्यार्थी हुन्छ ?

5. दसैं बजारमा एउटा च्याङ्ग्राको मूल्य रु. 12,000 थियो, जसमा 12% छुट थियो भने कति रूपैयाँ छुट रहेछ, छुटपछि उक्त च्याङ्ग्रो किन्न कति तिर्नु पर्ला ?
6. कक्षा 7 का 75 विद्यार्थीहरूमा 8% अनुत्तीर्ण भए भने कति जना उत्तीर्ण भए ?
7. रु. 18,500 तलब भएको एक जना कर्मचारीले 13% रकम कर तिर्नुपर्छ भने कति रकम कर तिर्नुपर्ला ?
8. कक्षा 8 का 80 विद्यार्थीहरूमध्ये 5 जना अनुपस्थित भए भने कति प्रतिशत विद्यार्थी उपस्थित भए ?

Curriculum Development Centre

9. एउटा सहरको जनसङ्ख्या 2,666,200 छ र वृद्धि दर 1.50% छ भने एक वर्षपछि उक्त जनसङ्ख्या कतिले बढ्ला, पत्ता लगाऊ ।

10. रु. 17,000 आम्दानी भएको एउटा शिक्षकले 15% आयकर तिर्नुपर्छ भने कर तिरेपछि कति रकम प्राप्त गर्छन् होला, पत्ता लगाऊ ।

11. एउटा सहरको जनसङ्ख्या जम्मा 3,40,000 छ । तिनीहरूमध्ये 25,500 जनाले कम्प्युटर प्रयोग गर्छन् भने कति प्रतिशतले कम्प्युटरको प्रयोग गर्दा रहेछन् ?

12. तलको तालिकामा विभिन्न वस्तुहरूको मूल्य र छुटपछिको मूल्य दिइएको छ :

वस्तु	मूल्य (रु.)	छुटपछिको मूल्य (रु.)
टोपी	350	315
सर्ट	500	420
जुत्ता	950	900
पाइन्ट	800	720
ज्याकेट	1250	1100
झोला	600	500

माथिको तालिका प्रयोग गरी तलका वस्तुहरूको छुट प्रतिशत पत्ता लगाऊ ।

(क) टोपी (ख) सर्ट (ग) जुत्ता

(घ) पाइन्ट (ङ) ज्याकेट (च) झोला

13. आइतबार चिडियाघर घुम्नेको सङ्ख्या 840 थियो । सोमबार उक्त सङ्ख्या घटेर 420 भयो भने कति प्रतिशतले घट्यो होला, पत्ता लगाऊ ।

14. रु. 4500 मूल्य भएको मोबाइल सेटलाई रु. 4200 मा किन्न सस्तो पर्छ कि 7% छुटमा किन्दा सस्तो पर्ला, पत्ता लगाऊ ।

15. विकासले एउटा रङ्गीन TV सेट लाई 13% छुटमा किन्दा रु. 30,00 छुट पायो भने उक्त TV सेटको अङ्कित मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाऊ ।

16. रविनले 900 पूर्णाङ्कमा 780 अङ्क प्राप्त गरे र विपनाले 800 पूर्णाङ्कमा 700 प्राप्त गरिन् भने कसले धेरै प्रतिशत अङ्क प्राप्त गऱ्यो होला, पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

पाठ 16

नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

16.0. पुनरवलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरौँ :

(क) एउटा घडीलाई रु. 450 मा किनेर रु. 500 मा बेच्दा कति नाफा वा घाटा हुन्छ ?

(ख) एउटा कलमलाई रु. 50 मा किनेर रु. 40 मा बेच्दा कति नाफा वा घाटा हुन्छ ?

प्रश्न नं. (क) मा नाफा भयो किनकि यसमा विक्रय मूल्य धेरै छ। यस्तो अवस्थामा नाफा भनेको विक्रय मूल्य र क्रय मूल्यको फरक हो।

अर्थात नाफा (profit) = विक्रय मूल्य (selling price) - क्रय मूल्य (cost price) हुन्छ।

त्यस्तै दोस्रोमा क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य कम छ।
तसर्थ नोक्सान भयो र नोक्सान = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य हुन्छ।

पहिलोमा,	दोस्रोमा
नाफा = रु. 50	नोक्सान = रु. 10
क्रय मूल्य = रु. 450 छ	क्रय मूल्य = रु. 50
अब, $\frac{50}{450}\times 100\%$ नाफा प्रतिशत हो।	अब, नोक्सान प्रतिशत $=\frac{10}{50}\times 100\% = 20\%$ भयो।
∴ नाफा प्रतिशत = $\frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मु}}$ x 100%	∴ नोक्सान प्रतिशत = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्र.मु}}$ x 100%

उदाहरण 1

रु. **3450** मा किनेको एउटा बाख्रालाई **2** महिनापछि बेच्दा रु. **1450** नोक्सान भयो भने उक्त बाख्राको विक्रय मूल्य पत्ता लगाऊ।

समाधान

यहाँ क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 3450

नोक्सान (L) = रु. 1450

विक्रय मूल्य (S.P.) = ?

Curriculum Development Centre

हामीलाई थाहा छ, नोक्सान (L) = C.P. - S.P.

रु. 1450 = रु. 3450 - S.P.

अथवा, S.P. = रु. (3450 - 1450) = रु. 2,000

$\therefore$ विक्रय मूल्य (S.P.) = रु 2,000

उदाहरण 2

स्मीताले रु. 1500 मा 50 ओटा बल्ब ल्याइन् । जसमा 4 ओटा फ्युज गइसकेका रहेछन् । बाँकी बल्बहरूलाई उनले प्रति बल्ब रु. 35 का दरले बेच्दा उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

समाधान

यहाँ 50 ओटा बल्बको क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 1500

फ्युज गएका बल्ब सङ्ख्या = 4

ठिक अवस्थामा भएका बल्ब = 50 - 4 = 46

एउटा बल्बको विक्रय मूल्य = रु. 35

46 ओटा बल्बको विक्रय मूल्य (S.P.) = 35×46 = रु. 1610

यहाँ, क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य धेरै भयो । यस कारण उनलाई नाफा भयो ।

अतः नाफा = S.P. - C.P.

= रु. 1610 - रु.1500 = रु. 110

अब, नाफा प्रतिशत = $\dfrac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$

$= \dfrac{110}{1500} \times 100\%$

$= \dfrac{22}{3}\%$

$= 7\dfrac{1}{3}\%$

= 7.33%

अतः उनलाई 7.33% नाफा भयो ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 16.1

1. **तलका आँकडाहरू प्रयोग गरेर नाफा वा नोक्सान पत्ता लगाऊ :**

क्रय मूल्य (रु.)	विक्रय मूल्य (रु.)
(क) 300	330
(ख) 5000	4500
(ग) 7000	7700
(घ) 10,000	9,990

2. प्रश्न नं 1 का आँकडाहरूबाट नाफा वा नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाऊ ।
3. अमृताले एउटा साडी रु 1350 मा बेच्दा रु 150 नाफा भयो भने उक्त साडीको क्रय मूल्य कति होला ?
4. रु. 760 मा किनेको एउटा क्याल्कुलेटर बेच्दा रु. 50 नोक्सान भयो भने उक्त क्याल्कुलेटरको विक्रय मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाऊ ।
5. रु. 1450 मा किनेको एउटा बाख्रालाई रु. 1740 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो ?
6. रु. 15000 को साइकलबाट 10% नाफा लिन कतिमा बेच्नु पर्ला ?
7. रु. 13000 मा किनेको गोरुलाई रु. 14300 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान हुन्छ ?
8. रु. 58,500 मा किनेको एउटा मोटरसाइकल बेच्दा 8% घाटा भयो भने उक्त मोटरसाइकलको विक्रय मूल्य पत्ता लगाऊ ।
9. रोजीले 100 ओटा अन्डा रु 900 मा किनिन् जसमा 8 ओटा अन्डा फुटेका रहेछन् । बाँकी अन्डालाई उनले प्रति गोटा रु 10.50 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?
10. प्रभुले 500 ओटा कुखुरा किनेकामा 75 ओटा चिसोले मरे । बाँकी कुखुरा प्रति एकको रु. 120 मा बेच्दा उसले 2% नाफा भयो भने कुखुराको जम्मा क्रय मूल्य कति रहेछ ?
11. एक जना खाद्यान्न पसलेले रु. 40 प्रति केजीको 50 केजी र रु. 50 प्रति केजीको 50 केजी चामल मिलाएर प्रति केजी रु. 48 मा बेच्यो भने उसलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो ?
12. एउटा कम्प्युटर सेट रु. 40,000 मा बिक्री गर्दा 25% नाफा भयो भने यसको क्रय मूल्य कति होला ?
13. एन्जलले दुई ओटा किताब प्रत्येकको रु. 500 का दरमा किन्यो । उक्त किताब बिक्री गर्दा उसलाई क्रमश: एउटा किताबमा 25 % नाफा र अर्को किताबमा 25 % नोक्सान भयो भने उसलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

Curriculum Development Centre

16.1 छुट (Discount) र मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax)

16.1.1 छुट (Discount)

दिइएको बिलको अध्ययन गरी तलका प्रश्नको उत्तर खोजी गर :

(क) किताबको अङ्कित मूल्य कति छ ?

(ख) छुट कति प्रतिशत रहेछ ?

(ग) कति रकम छुट पाइयो ?

(घ) विपनाले उक्त शब्द कोशलाई कति रकम तिरिन् ?

माथिका प्रश्नहरूका उत्तरहरूबारेमा समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाऊ ।

आचार्य पुस्तक पसल

बगर, पोखरा

नाम : विपना भण्डारी

क्र.सं.	किताबको नाम	मूल्य (रु.)	परिमाण	रकम(रु.)
1.	शब्दकोश	350	1	350
छुट : 12% ले आउने रकम				42
जम्मा रकम(रु.)				308

अक्षरुपी रु. तिन सय आठ मात्र ।

बिक्रेता

व्यापारीले सामानको मूल्य निर्धारण गरी ग्राहकलाई बताउने मूल्यलाई अङ्कित मूल्य (marked price) भनिन्छ । कुनै वस्तुको अङ्कित मूल्य मा केही रकम कम गरी बिक्री गरिएको छ भने उक्त कम गरिएको रकमलाई छुट (discount) भनिन्छ । छुट अङ्कित मूल्यको सापेक्षमा हुन्छ ।

अर्थात, छुट रकम = अङ्कित मूल्य (M.P.) को छुट प्रतिशत

= M.P. $\times$ छुट प्रतिशत हुन्छ ।

अङ्कित मूल्यमा केही छुट गरेर सामान किनिन्छ भने छुटपछिको मूल्यलाई वास्तविक मूल्य भनिन्छ ।

वास्तविक मूल्य = M.P. - छुट रकम हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा झोलाको अङ्कित मूल्य रु. 750 छ । यदि उक्त झोला किन्दा 8% छुट पाइन्छ भने झोलाको वास्तविक मूल्य कति होला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ अङ्कित मूल्य (M.P.) = रु 750

छुट प्रतिशत = 8%

अब, छुट रकम = M.P. को 8%

= रु. 750 को 8

Curriculum Development Centre

$= \frac{750 \times 8}{100}$ = रु. 60

त्यस कारण, विक्रय मूल्य = अङ्कित मूल्य — छुट

= रु. 750 - 60

= रु. 690

16.1.2 मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax)

दिइएको बिलको अध्ययन गरी र के के पाउँछौ, साथीहरूबिच छलफल गर ।

तुलसी बिजुली पसल जनकपुरधाम				
नाम : कल्पना राय यादव				
क्र.सं.	सामानको नाम	मूल्य (रु.)	परिमाण	रकम (रु.)
1.	हिटर	1700	1	1700
मु.अ.क. 13% ले आउने रकम				221
जम्मा रकम (रु.)				रु. 1921

अक्षरुपी *एक हजार नौ सय एक्काइस मात्र ।*

विक्रेता

यहाँ,

हिटरको अङ्कित मूल्य रु. 1700 छ ।

मू.अ.क = 13%

तिर्नुपर्ने रकम = रु. 1921

मू.अ.क. = रु. 1921 - रु. 1700

= रु. 221

बढेको रकम प्रतिशत $= \frac{221}{1700} \times 100\% = 13\%$

वस्तु तथा सेवा बिक्री गर्दा प्रत्येक चरणमा वृद्धि हुने मूल्यमा लाग्ने करलाई मूल्य अभिवृद्धि कर **(VAT)** भनिन्छ । आफूले किनेको वस्तुमा ढुवानी, बिमा, कमिसन आदि जोडेर सेवा शुल्क र छुट घटाएर मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) लाग्ने मूल्य कायम गरिन्छ । साथै छुट दिएको वस्तुमा छुट घटाएर आएको मूल्यमा मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) लाग्ने गर्दछ । मूल्य अभिवृद्धि कर वस्तुको विक्रय मूल्यमा जोडिन्छ । मूल्य अभिवृद्धि कर जोडेपछिको मूल्यलाई वास्तविक मूल्य भनिन्छ ।

$$\text{VAT\%} = \frac{\text{VAT रकम}}{\text{विक्रय मूल्य}} \times 100 \qquad \text{VAT रकम} = \text{वास्तविक मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

उदाहरण 2

रु. **1500** बजार मूल्य भएको एउटा रेडियो सेट किन्दा **10%** छुट पाइन्छ र **13%** मूल्य अभिवृद्धि कर **(VAT)** तिर्नुपर्छ भने उक्त रेडियो सेटलाई कति रुपैयाँ तिर्नुपर्ला ?

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ, अङ्कित मूल्य (M.P) = रु. 1500

छुट = 10%

छुट रकम = रु. 1500 को 10% $= \frac{1500 \times 10}{100}$ = रु. 150

त्यस कारण, छुटपछिको रकम = रु. 1500 - रु. 150 = रु. 1350

VAT = 13%

अब, VAT रकम = रु.1350 को 13%

$= \frac{1350 \times 13}{100}$ = रु. 175.50

अब रेडियोको विक्रय मूल्य = रु. 1350 + रु. 175.50 = रु. 1525.50

त्यसकारण उक्त रेडियो सेट किन्न रु. 1525.50 तिर्नुपर्छ ।

नोटः *छुटलाई अङ्कित मूल्य (M.P) बाट घटाइन्छ भने, VAT लाई* **विक्रय मूल्य** *(S.P.) मा जोडिन्छ ।*

अभ्यास 16.2

1. रु. 210 अङ्कित मूल्य भएको किताबमा 12% छुट छ भने सो किताबलाई कति तिर्नुपर्ला ?
2. एउटा ज्याकेटको अङ्कित मूल्य रु. 2250 छ । यदि पसलेले उक्त ज्याकेटमा 8% छुटमा बिक्री गर्छ भने उक्त ज्याकेट किन्नका लागि कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?
3. तलका वस्तुहरुको वास्तविक मूल्य पत्ता लगाऊ :

वस्तु	अङ्कित मूल्य (MP)	छुट
दराज	रु. 9950	12%
कम्प्युटर	रु. 25,500	8%
घडी	रु. 1250	5%
क्याल्कुलेटर	रु. 1500	7%

4. यदि 10% छुटमा किन्दा एउटा रङ्गिन टिभी सेटलाई रु. 13950 पर्‍यो भने सो TV सेटको अङ्कित मूल्य कति होला, पत्ता लगाऊ ।
5. एउटा आइरनको अङ्कित मूल्य रु. 500 छ । पसलेले उक्त आइरनलाई रु. 460 मा बिक्री गर्दा उसले कति प्रतिशत छुट दियो, पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

6. तलका वस्तुहरूको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाऊ :

वस्तु	छुट	छुटपछिको मूल्य वा वास्तविक मूल्य
(क) स्याउ	3%	रु. 116.40 प्रति कि.ग्रा.
(ख) आलु	4%	रु. 144 प्रति धार्नी
(ग) दाल	7%	रु. 186 प्रति 2kg
(घ) च्याउ	9%	रु. 409.50 प्रति kg

7. तलका वस्तुहरूको छुट प्रतिशत पत्ता लगाऊ :

वस्तु	अङ्कित मूल्य	छुटपछिको मूल्य
(क) मोबाइल	रु. 7,000	रु. 6440
(ख) रेडियो	रु. 1160	रु. 1044
(ग) टि.भी.	रु. 6400	रु. 6080
(घ) हिटर	रु. 5950	रु. 5355

8. 14% छुटमा किन्दा एउटा स्वीटरलाई रु. 1075 पऱ्यो भने सो स्वीटरको अङ्कित मूल्य कति होला ?

9. एउटा टर्चलाइटको क्रय मूल्य रु. 1400 छ । त्यस टर्चको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 40% ले बढी छ । यदि पसलेले उक्त टर्चलाई 20% छुटमा बेच्यो भने,

(क) उक्त टर्चको अङ्कित मूल्य कति होला ?

(ख) क्रेताले कति रुपियाँ छुट पायो ?

(ग) क्रेताले कति रुपियाँमा उक्त टर्च किन्यो ?

(घ) पसलेले उक्त टर्चबाट कति रुपियाँ नाफा गऱ्यो ? पत्ता लगाऊ ।

10. तलका वस्तुहरू किन्दा तिर्नुपर्ने बिल रकम पत्ता लगाऊ :

वस्तु	अङ्कित मूल्य	छुट	मू.अ.क.
(क) विद्युतीय जग	रु. 980	5%	13%
(ख) टि.भी. सेट	रु. 22,500	11%	13%
(ग) मोबाइल फोन	रु. 6,800	14%	13%
(घ) कम्प्युटर	रु. 10,500	13%	13%

11. रु. 1600 को विद्युतको बिलमा 3% छुट लिई 13% मू.अ.क. जोड्दा जम्मा कति तिर्नुपर्ला ?

12. प्रति व्यक्ति 200 को 6 जनाको जम्मा बिलमा 8% छुटपछि 13% VAT जोड्दा कति रकम तिर्नुपर्छ ?

13. रु. 4500 अङ्कित मूल्य भएको साइकललाई 13% छुटपछि 13% मू.अ.क. तिर्दा कति रुपियाँ पर्ला ?

Curriculum Development Centre

पाठ 17

ऐकिक नियम

(Unitary Method)

17.0. पुनरवलोकन (Review)

तलको तालिका हेरौँ र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गरौँ :

तालिका 1

टिकट सङ्ख्या	12	8	4	6	1
जम्मा मूल्य (रु.)	60	40	20	30	?

प्रश्नहरू

(क) 12 ओटा टिकटको मूल्य कति रुपियाँ छ ?

(ख) 6 ओटा टिकटको मूल्य कति छ ?

(ग) 1 ओटा टिकटको मूल्य कति होला ?

(घ) टिकट सङ्ख्या र मूल्यबिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

तालिका 2

काम पुरा गर्न लाग्ने दिन	2	4	6	8	1
जम्मा कामदार सङ्ख्या	12	6	4	3	?

प्रश्नहरू

(क) 2 जनालाई काम पुरा गर्न कति दिन लाग्ला ?

(ख) 6 जनालाई काम पुरा गर्न कति दिन लाग्ला ?

(ग) 1 जनालाई कति दिन लाग्ला ?

(घ) कामदार सङ्ख्या र काम पुरा गर्न लाग्ने दिनबिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

17.1 प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विचरण (Direct and Indirect Variation)

माथिको तालिका 1 बाट टिकटको सङ्ख्या घट्दै जाँदा जम्मा मूल्य पनि घट्दै गएको र टिकट सङ्ख्या बढ्दा जम्मा मूल्य पनि बढेको थाहा पाउन सकिन्छ । त्यसलाई प्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

दुई ओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा भएको कमी वा वृद्धिले अर्को चरमा पनि त्यही अनुपातमा कमी वा वृद्धि देखिन्छ भने ती चरहरूबिचको सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण (direct variation) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

त्यस्तै, तालिका नं 2 मा काम गर्ने दिन बढाउँदै जाँदा जम्मा कामदार सङ्ख्या घट्दै गएको पाइन्छ । तसर्थ काम गर्ने दिन र कामदारबिचको सम्बन्ध विपरीत हुन्छ । त्यसैले काम गर्ने दिन र कामदारबिचको सम्बन्ध अप्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

दुई ओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा कमी वा वृद्धि हुँदा अर्को चरमा त्यही अनुपातमा वृद्धि वा कमी आउँछ भने ती चरहरूबिचको सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect Variation) भनिन्छ ।

कुनै एक एकाइ वस्तुको मान पत्ता लगाएर धेरै वा थोरै वस्तुको मान पत्ता लगाउने गणितीय विधिलाई ऐकिक नियम भनिन्छ ।

उदाहरण 1

10 kg स्याउको मूल्य रु. 750 पर्छ भने 6kg स्याउको मूल्य कति पर्ला ?

समाधान

स्याउको परिमाण र स्याउको मूल्यमा हेर्दा,

बढी स्याउ भए बढी मूल्य, कम स्याउ भए कम मूल्य

10 kg स्याउको मूल्य रु. 750 पर्छ ।

1 kg स्याउको मूल्य रु. $\frac{750}{10}$ पर्छ । ($\because$ प्रत्यक्ष विचरण भएकाले परिमाण घट्दा मूल्य पनि घट्छ । त्यस कारण 750 लाई 10 ले भाग गर्ने ।)

= रु. 75

6 kg स्याउको मूल्य रु. 75×6

= रु. 450 पर्छ (प्रत्यक्ष विचरणमा परिमाण बढ्दा मूल्य पनि बढ्छ । त्यस कारण 75 लाई 6 ले गुणा गर्ने ।)

त्यसैले, 6 kg स्याउको मूल्य रु. 450 पर्छ ।

उदाहरण 2

18 दिनमा कुनै काम पुरा गर्न 10 जना कामदार चाहिन्छ । त्यही काम 15 दिनमा पुरा गर्न कति जना थप कामदारको आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

यहाँ, काम गर्ने दिन र कामदार सङ्ख्या हेर्दा,

कम दिन भए बढी कामदार चाहिन्छ ।

बढी दिन भए कम कामदार चाहिन्छ ।

Curriculum Development Centre

अब, 18 दिनमा कुनै काम 10 जनाले पुरा गर्न सक्छन् ।

1 दिनमा कुनै काम 10 × 18 जनाले पुरा गर्न सक्छन् ।

= 180 (अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले दिन घट्दा कामदार सङ्ख्या बढ्छ । त्यस कारण 18 लाई 10 ले गुणा गर्ने ।)

15 दिनमा कुनै काम =12 ($\because$ अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले दिन बढ्दा कामदार सङ्ख्या घट्छ । त्यस कारण 180 लाई 15 ले भाग गर्ने ।)

$\therefore$ 12 जनाले पुरा गर्न सक्छन् ।

अब, थप कामदार सङ्ख्या = 12 जना - 10 जना

= 2 जना

वैकल्पिक तरिका

यस्ता समस्याहरूलाई वैकल्पिक तरिकाबाट अनुपात प्रयोग गरेर पनि समाधान गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 3

7 लिटर पेट्रोलले 112 km यात्रा गर्न पुग्छ भने 12 लिटर पेट्रोलले कति km यात्रा गर्न पुग्ला ?

$\frac{180}{15} = \frac{112}{x}$

समाधान

यहाँ,

परिमाण (ℓ)	यात्रा दुरी (km)
7	112
12	x

यहाँ, यात्रा दुरी र परिमाणबिच प्रत्यक्ष विचरण भएकाले यसलाई अनुपातमा निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ :

(प्रत्यक्ष विचरणमा परिमाण र यात्रा दुरी समान अनुपातमा घट्ने वा बढ्ने भएकाले अनुपातलाई $\frac{12}{7} = \frac{x}{112}$ पनि लेख्न सकिन्छ ।)

अथवा, $7x = 112 \times 12$

अथवा, $x = \frac{112 \times 12}{7}$

= 192 km

त्यस कारण 12 लिटर पेट्रोलले 192 km यात्रा गर्न पुग्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 4

20 जना कामदारलाई कुनै काम गर्न 24 दिन लाग्छ भने 15 जना कामदारलाई कति दिन लाग्ला ?

उत्तर :

यहाँ,

काम गर्ने दिन	जम्मा कामदार
24	20 जना
x	15 जना

यहाँ, काम गर्ने दिन र कामदार सङ्ख्याबिच अप्रत्यक्ष विचरण छ ।

त्यसैले, थोरै दिन भए धेरै कामदार र धेरै दिन भए थोरै कामदार चाहिन्छ ।

[अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले $\frac{x}{24}=\frac{20}{15}$ पनि लेख्न सकिन्छ ।]

$\frac{24}{x}=\frac{15}{20}$

अथवा, $15x = 480$

अथवा, $x=\frac{480}{15}=32$

अतः 15 जनाले काम गर्दा लाग्ने दिन = 32 दिन

उदाहरण 5

4 ओटा कापी र 5 ओटा किताबको जम्मा मूल्य रु. 880 पर्छ । यदि एउटा कापीको मूल्य रु. 60 भए एउटा किताबको मूल्य कति होला ?

समाधान

यहाँ, 4 ओटा कापी र 5 ओटा किताबको जम्मा मूल्य = रु. 880

एउटा कापीको मूल्य = रु. 60

4 ओटा कापीको मूल्य = रु. 4 × 60 = रु. 240

अब, 5 ओटा किताबको मूल्य = जम्मा मूल्य - 4 ओटा कापीको मूल्य

= रु. 880 – रु. 240 = रु. 640

5 ओटा किताबको मूल्य = रु. 640

1 ओटा किताबको मूल्य = रु. $\frac{640}{5}$ = रु. 128 = रु. 128

अतः एउटा किताबको मूल्य रु. 128 पर्छ ।

Curriculum Development Centre

अभ्यास 17.1

1. 12 ओटा कक्षा कोठा भएको विद्यालयमा जम्मा 300 जना विद्यार्थी क्षमता थियो । यदि 375 जना विद्यार्थी भर्ना भए भने थप कति ओटा कक्षाकोठा चाहिएला ?
2. यदि 4 दर्जन कलमको मूल्य रु. 576 पर्छ भने रु. 228 मा कति ओटा कलम पाइएला ?
3. एक जना धावकले 45 मिनेटमा 18 km दौड पुरा गर्न सक्छ भने 30 km दुरी पार गर्न कति समय लाग्ला ? पत्ता लगाऊ ।
4. एउटा मालबाहक ट्रक 48 km प्रति घण्टाले गुड्दा कुनै दुरी 6 घण्टामा पुरा गर्दछ । यदि उक्त ट्रकको गति घटेर 36 km प्रति घण्टा भयो भने उक्त दुरी कति घण्टामा पार गर्ला ?
5. कुनै एउटा काम पुरा गर्न 20 जना कामदारलाई 15 दिन लाग्छ । उक्त काम 12 दिनमा सिध्याउन कति जना कामदार थप्नुपर्ला ?
6. एक किलो पिठोको मूल्य रु. 28 हुँदा एउटा रोटीको तौल 496 ग्राम थियो । यदि पिठोको मूल्य रु. 32 प्रति के.जी. हुँदा रोटीको तौल कति होला ? (मानौँ, रोटीको मूल्य यथावत् रहन्छ ।)
7. कुनै काम पुरा गर्न 12 जनालाई 14 दिन लाग्छ । यदि कामदार थपेर 21 जना बनाइयो भने उक्त काम कति दिनमा सकिएला ?
8. कुनै एउटा ब्यारेकमा 200 जना सिपाहीलाई 30 दिन पुग्ने रासन छ । उक्त रासन 40 दिनलाई पुऱ्याउन कति जना सिपाहीलाई अन्यत्र सार्नुपर्ला ?
9. एउटा मोटरसाइकल 50 km प्रति घण्टाका दरले गुड्दा कुनै दुरी पार गर्न 7 घण्टा लाग्छ । यदि उसलाई 5 घण्टामा उक्त दुरी पार गर्नुपऱ्यो भने उक्त मोटरसाइकलको गति कतिले बढाउनु पर्ला ?
10. 3 ओटा कुर्सी र 4 ओटा टेबलको जम्मा मूल्य रु. 7,540 पर्छ । यदि एउटा कुर्सीको मूल्य रु. 220 पर्छ भने एउटा टेबलको मूल्य पत्ता लगाऊ ।
11. 5 ओटा गाई र 2 ओटा गोरुको जम्मा मूल्य रु. 1,35,000 छ । यदि एउटा गोरुको मूल्य रु. 17,500 भए एउटा गाईको मूल्य कति होला ?

Curriculum Development Centre

पाठ 18

साधारण ब्याज

(Simple Interest)

18.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका वाक्यको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर खोज :

रामले रु. 2500 बैङ्कमा राख्दा वार्षिक 10% ब्याजका दरले 2 वर्षपछि रु. 500 थपी जम्मा रु. 3000 प्राप्त गऱ्यो ।

रामले कति रकम बैङ्कमा जम्मा गऱ्यो, बैङ्कको वार्षिक ब्याजका दर कति रहेछ ?

कति वर्षपछि रामले रु. 3000 प्राप्त गऱ्यो ?

2 वर्षपछि थपिएको रकमले के जनाउँछ ?

माथिको वाक्यअनुसार साँवा [Principal (P)] रु. 2500, समय [Time (T)] 2 वर्षसम्म, वार्षिक 10% ब्याजदर [Rate (R)] ले जम्मा गर्दा ब्याज [Interest (I)] रु. 500 प्राप्त भयो र जम्मा मिश्रधन [Amount (A)] रु. 3000 हुन्छ ।

$\frac{P\times T\times R}{100}$ $\frac{P\times T\times R}{100}$ $T=\frac{I\times 100}{P\times R}$

18.1 साधारण ब्याज (Simple Interest)

रु. 100 को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. 1 हुन्छ ।

रु. 1 को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. $\frac{1}{100}$ हुन्छ ।

रु. P को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. $\frac{P}{100}$ हुन्छ ।

रु. P को T वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. $\frac{P\times T}{100}$ हुन्छ ।

रु. P को T वर्षमा R% का दरले ब्याज रु. हुन्छ ।

$\therefore$ ब्याज (I) = हुन्छ ।

त्यस्तै $P=\frac{I\times 100}{T\times R}, R=\frac{I\times 100}{P\times T}$ र हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

2% वार्षिक ब्याजदरले 3 **वर्षमा ब्याज** रु. **120 पाउन कति रुपैयाँ जम्मा गर्नुपर्ला ?**

समाधान

यहाँ, **ब्याज दर** (R) = 2%

समय (T) = 3 **वर्ष**

ब्याज (I) = **रु.** 120

साँवा (P) = ?

हामीलाई थाहा छ, $P = \frac{I \times 100}{T \times R} =$ **रु** $\frac{120 \times 100}{3 \times 2} =$ **रु.** 2000

= **रु.** 2000 **जम्मा गर्नुपर्छ ।**

उदाहरण 2

रु. **1500 लाई 4 वर्षसम्म ब्याजमा लगाउँदा** रु. **200 ब्याज पाइन्छ भने ब्याज दर कति होला ?**

समाधान

यहाँ, **साँवा** (P) = **रु.** 1500

समय (T) = 4 **वर्ष**

ब्याज (I) = **रु.** 200

ब्याज दर (R) = ?

हामीलाई थाहा छ, ब्याज दर (R)

$= \frac{I \times 100}{P \times T}$

$= \frac{200 \times 10}{1500 \times 4}$

$= \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$

त्यसकारण, ब्याज दर (R) = $3\frac{1}{3}\%$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 18.1

1. **साधारण ब्याज (I) पत्ता लगाऊ :**

(क) साँवा = रु. 500 ब्याज दर (R)= 3% समय = 3 वर्ष

(ख) साँवा = रु. 9500 ब्याज दर (R) = $\frac{11}{2}\%$ समय = 2 वर्ष

(ग) साँवा = रु. 12600 ब्याज दर (R) = $\frac{15}{2}\%$ समय = 4 महिना

(घ) साँवा = रु. 9990 ब्याज दर (R) = $\frac{24}{5}\%$ समय = 1 महिना

2. **समय (T) पत्ता लगाऊ :**

(क) साँवा = रु. 1260 ब्याज दर (R) = 5% ब्याज = रु. 378

(ख) साँवा = रु. 1250 ब्याज दर (R) = 13% ब्याज = रु. 650

(ग) साँवा = रु. 4500 ब्याज दर (R) = 4% ब्याज = रु. 900

(घ) साँवा = रु. 2400 ब्याज दर (R) = $\frac{25}{3}\%$ ब्याज = रु. 350

3. **ब्याज दर (R) पत्ता लगाऊ :**

(क) साँवा = रु. 1460 समय (T)= 30 महिना ब्याज = रु. 292

(ख) साँवा = रु. 7,200 समय (T)= 5 वर्ष ब्याज = रु. 1080

(ग) साँवा = रु. 6,000 समय (T)= 3 वर्ष 6 महिना ब्याज = रु. 1155

(घ) साँवा = रु. 2,160 समय (T)= 4 वर्ष ब्याज = रु. 648

4. **साँवा पत्ता लगाऊ :**

(क) ब्याज दर (R) $\frac{24}{5}\%$ समय (T)= 1 महिना ब्याज = रु. 39.96

(ख) ब्याज दर (R) $6\frac{2}{3}\%$ समय (T)= 5 वर्ष ब्याज = रु. 400

(ग) ब्याज दर (R) $4\frac{1}{6}\%$ समय (T)= 15 वर्ष ब्याज = रु. 2062.50

Curriculum Development Centre

(घ) ब्याज दर (R) = 9%　　　समय (T)= 9 वर्ष　　　ब्याज = रु. 810

5. मन्जुले वार्षिक 7% का दरले ब्याज पाउने गरी रु. 3500 नेपाल बैङ्क लिमिटेडमा जम्मा गरिन् भने 4 वर्षपछि उनले कति ब्याज पाउँछिन्, पत्ता लगाऊ ।

6. माइला दाइले वार्षिक 6.6% ब्याज दरमा बैङ्कबाट रु. 18000 ऋण लिए भने 30 महिनापछि उनले बैङ्कमा कति ब्याज बुझाउनुपर्ला, पत्ता लगाऊ ।

7. काजीले राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कबाट 4 वर्षपछि रु 550 ब्याज प्राप्त गर्न चाहन्छ । उसले अहिले 5.5% ब्याज दरमा कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला, पत्ता लगाऊ ।

8. बिनालाई रु. 7600 बैङ्कमा राखे बापत बैङ्कले 3 वर्षपछि रु. 1254 ब्याज दियो भने ब्याज दर कति रहेछ, पत्ता लगाऊ ।

9. रु. 12, 000 लाई बैङ्कमा $\frac{25}{2}\%$ ब्याजदरले राख्दा कति वर्षमा साँवा बराबर ब्याज हुन्छ ?

10. 7 वर्षपछि ब्याज रु. 4200 पाउनका लागि 6% ब्याज दरमा अहिले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?

11. 10% ब्याज दरले रु. 1080 को 4 वर्षमा कति ब्याज आउला र कति वर्षमा रु. 900 को 12% का दरले उत्तिनै ब्याज आउँछ ?

18.2. मिश्रधन (Amount)

रोजिनाले बैङ्कमा रु. 10000 जम्मा गर्दा 3 वर्षपछि जम्मा रु. 12100 प्राप्त गरिन् । यसमा जम्मा रकम भन्नाले के बुझिन्छ, साथीहरूबिच छलफल गरी लेख ।

निश्चित समयपश्चात कुनै पनि साँवा रकममा ब्याज थप गरी एकमुष्ट प्रदान गरिने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । यसलाई A ले जनाइन्छ ।

मिश्रधन [Amount (A)] = साँवा [Principal (P)] + ब्याज [Interest (I)] हुन्छ ।

अर्थात, मिश्रधन = साँवा + ब्याज

$A = P + I$ ....(i)

हामीलाई थाहा छ $I = \frac{PTR}{100}$ ....(ii)

(i) र (ii) लाई मिलाउँदा,

$A = P + \frac{PTR}{100}$

Curriculum Development Centre

$$A = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right)$$ हुन्छ ।

अथवा, $A = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right)$

अथवा, $A = P\left(\frac{100 + TR}{100}\right)$

अथवा, Ax100=P(100+TR)

अथवा, $P = \left(\frac{A \times 100}{100 + TR}\right)$ हुन्छ ।

अत: सावाँ (P)= $\frac{A \times 100}{100 + TR}$

उदाहरण 1

वार्षिक 5.5% ब्याज दरले रु. 7500 जम्मा गर्दा 42 महिनापछि जम्मा कति रकम प्राप्त होला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

$\frac{42}{12}$

यहाँ, ब्याजदर (R) = 5.5%

साँवा (P) = रु 7500

समय (T) = 42 महिना = वर्ष = $\frac{7}{2}$ वर्ष

मिश्रधन (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, मिश्रधन (A) = $P\left(\frac{100 + TR}{100}\right)$

$$= 7500\left(\frac{100 + 5.5 \times 7/2}{100}\right)$$

$$= 7500\left(\frac{200 + 38.5}{200}\right) = 8943.75$$

अत: मिश्रधन (A) = रु. 8943.75

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

कुनै साँवा रकम $\frac{9}{2}$ % ब्याज दरले जम्मा गर्दा 40 महिनापछि जम्मा रकम रु 69000 हुन्छ भने कति रकम जम्मा गरेको होला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, मिश्रधन (A) = रु 69000

समय (T) = 40 महिना = $\frac{40}{12}$ वर्ष = $\frac{10}{3}$ वर्ष

ब्याजदर (R) = $\frac{9}{2}$ %

साँवा (P) = ?

हामीलाई थाहा छ, साँवा

$$(P) = \frac{A \times 100}{100 + TR}$$

$$= \frac{6900 \times 100}{100 + \frac{9}{2} \times \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{69100}{\frac{600+90}{6}}$$

$$= 60,000$$

अत: जम्मा गरेको रकम (P) = रु. 60000

उदाहरण 3

रु. 5,000 लाई 8% ब्याजदरमा 2 वर्ष बैङ्कमा राख्दा आउने ब्याजको 5% बैङ्कलाई आयकर तिर्नुपर्छ भने 2 वर्षपछि जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?

समाधान

यहाँ, साँवा (P) = रु 5,000

समय (T) = 2 वर्ष

ब्याजदर (R) = 8 %

मश्रधन (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, ब्याज $I = \frac{PTR}{100}$

$$= \frac{5,000 \times 2 \times 8}{100}$$

= रु. 800

फेरि, आयकर = रु 800 को 5%

$$= \frac{800 \times 5}{100}$$ = रु 40

तसर्थ, शुद्ध ब्याज = रु. 800– रु 40 = रु. 760

अब, मिश्रधन (A) = P + I

= रु. 5,000 + रु. 760

= रु. 5,760

Curriculum Development Centre

अभ्यास 18.2

1. मिश्रधन पत्ता लगाऊ :

(क) साँवा = रु. 50000 समय = 7 वर्ष ब्याज दर = 3%

(ख) साँवा = रु. 2160 समय = 4 वर्ष ब्याज दर = $3\frac{1}{2}$%

(ग) साँवा = रु. 25,000 समय = 7 महिना ब्याज दर = 126gv%

(घ) साँवा = रु. 55,500 समय = 2 वर्ष ब्याज दर = 7.5%

(ङ) साँवा = रु. 524,000 समय = 3 महिना ब्याज दर = 11%

2. रु. 35000 को 3% ब्याज दरले 54 महिनामा जम्मा कति रकम होला, पत्ता लगाऊ ।
3. 4 महिनामा जम्मा रकम रु 56610 प्राप्त गर्न 6% ब्याज दरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?
4. कति रुपैया जम्मा गर्दा 5% का दरले $\frac{9}{2}$ वर्षमा जम्मा रु. 1225 हुन्छ, पत्ता लगाऊ ।
5. 40 महिनामा एकमुष्ट रु. 2375 प्राप्त गर्न $\frac{15}{2}$ % ब्याज दरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?
6. वार्षिक 10% ब्याज दरले रु 5500 को 1 वर्षमा मिश्रधन कति हुन्छ, पुनः उक्त मिश्रधनलाई उही ब्याज दरमा जम्मा गर्दा अर्को वर्ष जम्मा रकम कति होला ?
7. छिरिङ्ले बार्षिक 5% ब्याज दरले रु. 40,000 बैङ्कमा वचत गर्दा आउने ब्याजको 5% आयकर तिर्नुपर्छ भने 4 बर्षपछि उसले जम्मा कति रकम प्राप्त गर्छ होला ? पत्ता लगाऊ ।
8. रु. 75,000 को वार्षिक 5.6% ब्याज दरले 6 महिनामा प्राप्त हुने ब्याजमा बैङ्कले 5% कर लिन्छ भने 6 महिनापछि एकमुष्ट जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?
9. रु. 10,800 को वार्षिक 10% ब्याज दरमा 4 वर्षमा आउने ब्याजको 5% कर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि एकमुष्ट कति रकम प्राप्त होला ?
10. करुणाले भैंसीपालनका लागि बैङ्कबाट 12% ब्याज दरमा रु. 200,000 लिइन् । यदि उनले 30 महिनापछि साँवा र ब्याज गरी एकमुष्ट रकम तिरिन् भने जम्मा कति रुपियाँ तिरिन् होला ?

Curriculum Development Centre

पाठ 19

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

19.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षा 8 का 40 जना विद्यार्थीहरूले कक्षा 7 को वार्षिक परीक्षामा गणित विषयमा निम्नानुसारको अङ्क प्राप्त गरे :

40,	45,	49,	53,	56,	45,	40,	53,	65,	73,
49,	75,	83,	89,	92,	48,	73,	45,	63,	75,
73,	94,	92,	90,	89,	45,	82,	75,	73,	65,
40,	49,	56,	60,	65,	60,	63,	73,	82,	48

माथिको प्राप्ताङ्कलाई तलको जस्तै तालिका बनाएर भर र तालिका पुरा गर :

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता
40	|||	3	3
45	||||	4	3+4=7
49	|||	3	7+3=10
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

अब माथिको तालिकालाई कस्तो तालिका भनिन्छ, साथीहरूबिच छलफल गरी उत्तर लेख ।

माथिको तालिकालाई बारम्बारता तालिका भनिन्छ । यसका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा नै अध्ययन गरिसकेका छौँ । यसरी निश्चित नियमअनुसार तथ्याङ्कहरूको बारम्बारतासहित प्रस्तुत गरिन्छ भने त्यसलाई खण्डित श्रेणी (discrete series) भनिन्छ । अब हामी यस्ता तथ्याङ्कहरूको मध्यक, मध्यिका, रित र विस्तारका बारेमा अध्ययन गर्छौं ।

19.1 मध्यक (Mean)

क्रियाकलाप 1. सर्वप्रथम तिमीहरू प्रत्येकले आफूले कक्षा 7 मा प्राप्त गरेका सबै विषयको प्राप्ताङ्क तलको तालिकामा भर :

विषय	गणित	विज्ञान	सामाजिक	अङ्ग्रेजी	नेपाली	कम्प्युटर	नैतिक
प्राप्ताङ्क							

Curriculum Development Centre

अब सबै प्राप्ताङ्कको योगफल निकाल र त्यसलाई जम्मा विषय सङ्ख्याले भाग गर ।

त्यसरी प्राप्त हुने भागफल नै मध्यक प्राप्ताङ्क हुन्छ । यसलाई औसत (average) वा अङ्क गणितीय मध्यम (arithmetic mean) पनि भनिन्छ । यसलाई $(\overline{x})$ $(x\ bar)$ ले जनाइन्छ र सूत्रमा लेख्दा,

मध्यक $(\overline{x}) = \frac{\text{जम्मा तथ्याङ्कको जोड}}{\text{तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या}} = \frac{\sum x}{N}$ लेखिन्छ ।

जहाँ, N ले जम्मा तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या जनाउँछ र $\sum$ ले योगफल जनाउँछ ।

उदाहरण 1

तलका तथ्याङ्कहरूबाट अङ्क गणितीय मध्यम पत्ता लगाऊ :

4, 12, 13, 21, 12, 12, 10

समाधान

यहाँ, $\sum x = 4+12+13+21+12+12+10 = 84$ र N = 7

$\therefore$ मध्यक $(\overline{x}) = \frac{\sum x}{N} = \frac{84}{7} = 12$

उदाहरण 2

कक्षा 8 का 25 जना विद्यार्थीले दिएको 20 पूर्णाङ्कको त्रैमासिक परीक्षामा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्कहरू निम्नानुसार छन् :

7, 8, 9, 6, 10, 5, 8, 9, 12, 7, 8, 11, 14, 11, 12, 12, 13, 14, 12, 13, 12, 11, 7, 8, र 11. यी आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी मध्यक पत्ता लगाऊ :

प्राप्ताङ्क (x)	मिलान चिह्न	बारम्बारता (f)	$f \times x$
5	|	1	5 x 1 = 5
6	|	1	6 x 1 = 6
7	|||	3	7 x 3 = 21
8	||||	4	8 x 4 = 32
9	||	2	9 x 2 = 18
10	|	1	10 x 1 = 10
11	||||	4	11 x 4 = 44
12	~~||||~~	5	12 x 5 = 60
13	||	2	13 x 2 = 26
14	||	2	14 x 2 = 28
		N = जम्मा विद्यार्थी = 25	$\sum fx = 250$

यहाँ सबै प्रँप्ताङ्कको जोड $= \sum f \times x$ हुन्छ । विद्यार्थी सङ्ख्या $N = \sum f$ हुन्छ

Curriculum Development Centre

तसर्थ, मध्यक $= \dfrac{\text{प्राप्ताङ्कहरूको जोड}}{\text{विद्यार्थी सङ्ख्या}} = \dfrac{\sum fx}{N} = 250 = 10 \quad \therefore \bar{x} = 10$

तसर्थ, खण्डित श्रेणीका लागि मध्यक हुन्छ ।

$\bar{X} = \dfrac{\sum f \times X}{N}$

अभ्यास 19.1

1. तलका तथ्याङ्कहरूको अङ्क गणितीय मध्यक ($\bar{x}$) पत्ता लगाऊ :

(क) 15, 13, 18, 16, 14, 17, 12

(ख) 84, 91, 88, 94, 91, 105, 98, 85

(ग) 45, 35, 37, 32, 47, 38, 39, 36, 34, 37

(घ) 105, 108, 112, 106, 120, 108, 112, 110, 100

2. तल दिइएको बारम्बारता तालिकाबाट अङ्क गणितीय मध्यक ( ) पत्ता लगाऊ :

(क)

प्राप्ताङ्क	9	10	12	14	16	18
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	2	7	9	8	4

(ख)

उमेर (वर्षमा)	9	10	11	12	13	14	15	16
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	10	4	6	2	5	6	5

(ग)

ज्याला (रु. सयमा)	50	55	60	85	70	75
कामदार	4	8	7	6	9	6

(घ)

x	5	10	15	20	25	30
f	6	3	6	7	4	4

(ङ)

x	2	4	6	8	10	12
f	12	8	9	10	6	5

3. तिम्रो छिमेकमा भएका 20 परिवारमा कति कति सदस्य छन् सूची तयार पार र परिवारका सदस्य सङ्ख्याको मध्यक पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

19.2 मध्यिका (Median)

चित्रमा फरक फरक उचाइ भएका पाँच जना विद्यार्थीहरूलाई तिनीहरूको उचाइका आधारमा होचोबाट अग्लोसम्म मिलाएर राखिएको छ । चित्रमा तेस्रो विद्यार्थीलाई आधार मान्दा, त्यो विद्यार्थीभन्दा अगाडि र पछाडि बराबर अथवा 2 र 2 जना विद्यार्थी छन् । तसर्थ, बिचमा पर्ने विद्यार्थीको उचाइ वा तेस्रो विद्यार्थीको उचाइ नै ती विद्यार्थीहरूको उचाइको मध्यिका मान हुन्छ । यसरी पाँच जना विद्यार्थीमा तेस्रो विद्यार्थी मध्यिका भयो । तसर्थ $\frac{5+1}{2}$ औँ विद्यार्थी वा 3 औँ विद्यार्थी मध्यिका मान भयो ।

मध्यीकाले तथ्याङ्कहरूलाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्दछ । तसर्थ, मध्यिका मानबाट तल र माथि दुवैतिर बराबर तथ्याङ्क पर्दछन् । मध्यिकालाई M_d ले जनाइन्छ ।

त्यस कारण मध्यिका औँ पद हुन्छ । अर्थात्, $M_d = \frac{N+1}{2}$ औँ पद लेखिन्छ ।

फेरि माथिको क्रियाकलापमा हेरौँ । मध्यिका मानबाट तल र माथि बराबर अथवा 2/2 जना छन् ।

यदि तथ्याङ्कहरूको जम्मा सङ्ख्या जोर छ भने मध्यिका $\frac{N}{2}$ औँ र $\frac{N+2}{2}$ औँ पदको मध्यक हुन्छ ।

उदाहरण 1

(Median) $= \frac{N+1}{2}$ (M$_d$) $= \frac{N+1}{2}$

तलको आँकडाहरूबाट मध्यिक पत्ता लगाऊ :

12, 10, 13, 9, 12, 14, 16, 8

समाधान

यहाँ, तथ्याङ्कहरूलाई बढ्दो क्रममा मिलाएर राख्दा,

8, 9, 10, 12, 12, 13, 14, 16

N= 8

मध्यिका औँ पद $= \frac{8+1}{2}$ औँ पद = 4.5 औँ पद

यहाँ तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या 8 अथवा जोर छ । त्यस कारण चौँथो र पाँचौ पदको औसत मान मध्यिका हुन्छ ।

$$\text{मध्यिका} = \frac{\text{चौथो पद} + \text{पाँचौँ पद}}{2} \text{ हुन्छ ।}$$

$$M_d = \frac{12+12}{2} = 12 \text{ हुन्छ ।}$$

यदि तथ्याङ्कहरू धेरै दोहोरिएका छन् भने त्यसलाई खण्डित श्रेणीमा वा बारम्बारता तालिकाबाट मध्यिका पत्ता लगाइन्छ । यसलाई तलको उदाहरणबाट हेरौँ :

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

तलको आँकडाहरूबाट मध्यिका (median) पत्ता लगाऊ :

प्राप्ताङ्क	18	20	22	25	29	30	32
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	9	8	11	5	6	7

समाधान

माथिको तालिकालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f)
18	7	7
20	9	7 + 9 =16
22	8	16 + 8 = 24
25 ←	← 11 ←	24 +11 = 35
29	5	35 + 5 = 40
30	6	40 + 6 = 46
32	7	46 +7 = 53

अब, मध्यिका $= \frac{N+1}{2} = \frac{53+1}{2} = 27$ औँ पद हुन्छ ।

सञ्चित बारम्बारता तालिकामा 27 औँ स्थानको पद सञ्चित बारम्बारता 35 हुने प्राप्ताङ्कमा पर्छ । 35 भन्दा अघिल्लो सञ्चित बारम्बारता 24 छ र 27 औँ पद 24 भन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारतामा पर्छ । तसर्थ, मध्यिका 35 सञ्चित बारम्बारता भएको प्राप्ताङ्क हो । अत: मध्यिका $(M_d) = 25$ भयो ।

अभ्यास 19.2

1. **तल दिइएका तथ्याङ्कहरूबाट मध्यिका पत्ता लगाऊ :**

   (क) 27, 29, 18, 25, 32, 21, 26

   (ख) 34, 46, 49, 38, 56, 86, 68, 35

   (ग) 5.9ft, 5.2ft, 6.1ft, 7.2ft, 6.5ft, 5.4ft

   (घ) 112 kg, 104 kg, 108 kg, 109 kg, 111 kg, 109 kg, 114 kg, 112 kg, 110 kg, 113 kg

   (ङ) 250, 282, 211, 190, 235, 284, 237, 217, 245, 257, 281

2. **तलका बारम्बारता तालिकाहरूबाट मध्यिका (M_d) पत्ता लगाऊ :**

   (क)

प्राप्ताङ्क	25	30	35	40	45	50	55	60
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	10	12	13	3	4

Curriculum Development Centre

(ख)

उमेर	8 वर्ष	10 वर्ष	12 वर्ष	14 वर्ष	16 वर्ष	18 वर्ष
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	9	8	3	1

(ग)

x	50	100	150	200	250	300	350
f	50	22	39	41	38	30	20

(घ)

x	100	200	300	400	500	600	700
f	8	9	7	15	22	12	10

3. कक्षा 7 को अन्तिम परीक्षामा सम्मिलित जम्मा 25 जना विद्यार्थीमध्ये मध्यिका प्राप्ताङ्क 27 थियो भने मध्यिकाभन्दा धेरै प्राप्ताङ्क भएका विद्यार्थी सङ्ख्या र मध्यिकाभन्दा थोरै अङ्क प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

19.3 रित (Mode)

कक्षा 8 का 10 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ यस प्रकार छ ।

4.9 ft, 5 ft, 4.6 ft, 5.2 ft, 4.8 ft, 4.6 ft, 4.6 ft, 4.9 ft, 4.7 ft, 4.5 ft

अब माथिको आँकडामा हेरौँ । 4.6 ft उचाइ सबैभन्दा धेरै विद्यार्थी अर्थात 3 जना विद्यार्थीहरूको छ । यो नै दिइएका उचाइहरूको रित मान हुन्छ ।

अतः रित (mode) = 4.6 ft

> दिइएका तथ्याङ्कहरूमा सबैभन्दा बढी पटक दोहोरिएको तथ्याङ्कलाई रित (mode) भनिन्छ । यसलाई M_o ले जनाइन्छ ।
>
> अर्थात, खण्डित श्रेणीमा बारम्बारता तालिकामा सबैभन्दा धेरै बारम्बारता भएको तथ्याङ्क नै उक्त तथ्याङ्कको रित (mode) हुन्छ ।

अभ्यास 19.3

1. **तलका तथ्याङ्कहरूको रित (Mode) पत्ता लगाऊ :**

(क) 2, 3, 3, 2, 4, 5, 6, 3, 3, 5, 5, 4, 3, 2

(ख) 3, 7, 9, 8, 8, 9, 8, 6, 5, 8

(ग) 29 cm, 34 cm, 29 cm, 26 cm, 55 cm, 34 cm, 35 cm, 40 cm, 34 cm, 56 cm

(घ) 120, 125, 130, 125, 120, 135, 120, 140

(ङ) 99 kg, 135 kg, 182 kg, 49 kg, 189 kg, 196 kg, 78 kg, 192 kg, 182 kg

Curriculum Development Centre

2. दिइएका बारम्बारता तालिकाहरूबाट रित पत्ता लगाऊ :

(क)

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30	35	40	45
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	6	7	9	11	5	15	2	3

(ख)

ज्याला (रु.)	50	75	100	125	150	175	200	225
कामदार सङ्ख्या	8	12	17	29	11	27	20	30

(ग)

प्राप्ताङ्क	0	5	10	15	20	25	30	35
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	9	15	9	19	21	30	20

(घ)

x	10	12	14	16	18	20	22	24	26
f	7	3	9	8	12	5	9	11	8

19.4 विस्तार (Range)

तलको तालिकामा हेर । त्यहाँ विद्यार्थीहरूको तौल दिइएको छ । तालिकाबाट सबैभन्दा धेरै तौल कति छ पत्ता लगाऊ । साथै सबैभन्दा कम तौल पनि पत्ता लगाऊ ।

विद्यार्थीहरूको तौल
26 kg, 24 kg, 10 kg, 35 kg, 32.5 kg, 29 kg, 30 kg, 42 kg, 42.5 kg, 29 kg, 24.5 kg, 22.5 kg, 42 kg, 50 kg, 50.5 kg, 22 kg, 50 kg

सबैभन्दा बढी तौल =……kg सबैभन्दा कम तौल =……kg

ती तौल बिचको फरक कति छ, पत्ता लगाऊ ।

त्यो सबैभन्दा ठुलो र सबैभन्दा सानो तथ्याङ्कबिचको फरक नै तथ्याङ्कको विस्तार (range) हो ।

अत: विस्तार (Range) = H - L हुन्छ ।
जहाँ H = सबैभन्दा ठुलो तथ्याङ्क र
L = सबैभन्दा सानो तथ्याङ्क

विस्तारका लागि बारम्बारताले केही असर गर्दैन र बारम्बारता हेरिँदैन ।

अभ्यास 9.4

1. तल दिइएका तथ्याङ्कहरू विस्तार **(range)** पत्ता लगाऊ :

(क) 3, 9, 7, 5, 20, 21, 20, 23, 11, 12

(ख) 120, 130, 135, 140, 150, 115, 116, 117

(ग) 12 cm, 15 cm, 19 cm, 14 cm, 10 cm, 8 cm, 20 cm, 11 cm

Curriculum Development Centre

(घ) 4.9 ft, 5.1 ft, 6.2 ft, 5.5 ft, 4.8 ft, 6.1 ft, 4.7 ft

2. यदि कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूले अन्तिम परीक्षामा गणित विषयमा 40 र 80 को बिचमा मात्र अङ्क प्राप्त गरे भने उक्त प्राप्ताङ्कहरूको विस्तार कति होला, पत्ता लगाऊ ।

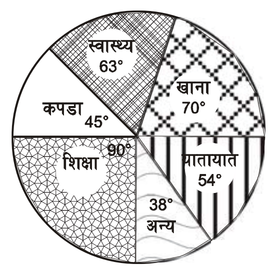
3. तलको आँकडाबाट विस्तार पत्ता लगाऊ :

ज्याला (रु.)	500	525	540	560	575	590
कामदार (सङ्ख्या)	20	25	8	15	27	29

4. तलका आँकडाहरूले शान्ति मा. वि. जुम्लेटीका कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको कक्षा 7 को अन्तिम परीक्षाको प्राप्ताङ्क प्रतिशत जनाउँछ । यी आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी रित (mode) र विस्तार (range) पत्ता लगाऊ :

कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क प्रतिशत
45, 40, 42, 45, 52, 55, 60, 55, 60, 72, 85, 78, 85, 75, 70,
72, 75, 75, 82, 75, 82, 55, 60, 72, 75, 80, 85, 72, 82, 60

रामको परिवारको मासिक खर्च विवरण



19.5 वृत्तचित्र (Circle Graph/ Pie Chart)

$\left(\frac{360}{20000}\right)^\circ$

सँगैको चित्रमा रामको परिवारको मासिक खर्च विवरणलाई देखाइएको छ । जसमा खर्चका विभिन्न शीर्षकहरूलाई वृत्तको विभिन्न क्षेत्रक वा सेक्टर (sector) मा देखाइएको छ । कुन शीर्षकमा कति खर्च भएको छ, छलफल गर ।

> यसरी कुनै पनि तथ्याङ्कलाई एउटा वृत्तको क्षेत्रक वा सेक्टर (sector) मा प्रस्तुत गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई वृत्तचित्र (pie chart) भनिन्छ ।

वृत्तचित्र बनाउने तरिका

चरण 1

वृत्तको केन्द्रमा दिइएका शीर्षकहरूको सम्बन्धित केन्द्रको कोण पत्ता लगाउने । उदाहरणका लागि माथिको चित्रमा जम्मा रु. 20,000 खर्च छ । शिक्षामा रु. 5,000 खर्च भयो भने,

ऐकिक नियमबाट हेर्दा,

रु. 20000 को 360

रु. 1 को र

Curriculum Development Centre

रु. 5000 को $\left(\frac{360}{20000}\times 5000\right)^{\circ} = 90^{\circ}$ हुन्छ ।

त्यसै गरी सबै कोणको मान पत्ता लगाउने ।

चरण 2. आवश्यकताअनुसारको सुहाउँदो अर्धव्यास भएको वृत्त खिच्ने ।

चरण 3. वृत्तमा एउटा अर्धव्यास खिची त्यसलाई आधार मानेर वृत्तको केन्द्रमा चरण 1 मा पत्ता लगाएका कोणहरू खिच्ने ।

चरण 4. फरक फरक भागलाई फरक फरक रङ लगाऊ । अब वृत्तचित्र तयार हुन्छ ।

उदाहरण 4

ज्ञान ज्योति मा. वि. छहरे पानीका कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थी सङ्ख्या तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा देखाऊ ।

कक्षा	5	6	7	8	9	10	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	42	54	51	48	45	30	270

समाधान

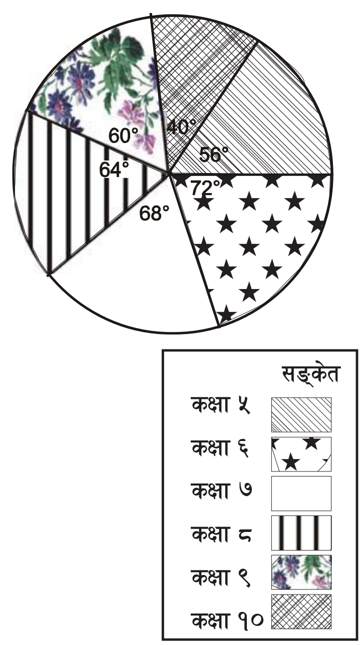
यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 270 जना

270 जना विद्यार्थी = 360° कोण

1 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{270}\right)^{\circ}$ कोण = $\left(\frac{4}{3}\right)^{\circ}$ कोण

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या	केन्द्र कोण
5	42	$42\times\frac{4}{3}=56°$
6	54	$54\times\frac{4}{3}=72°$
7	51	$51\times\frac{4}{3}=68°$
8	48	$48\times\frac{4}{3}=64°$
9	45	$45\times\frac{4}{3}=60°$
10	30	$30\times\frac{4}{3}=40°$

ज्ञानज्योति मा.वि.को विद्यार्थी सङ्ख्या



Curriculum Development Centre

अभ्यास 19.5

1. कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूलाई मन पर्ने क्रियाकलापहरू तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत तर :

नाटक	कमेडी	नृत्य	खेल	गीत/गजल
7	8	9	10	11

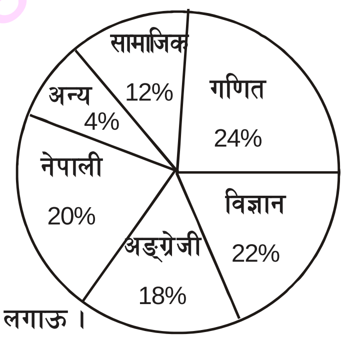
2. तलको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर :

विशिष्ट श्रेणी	प्रथम श्रेणी	द्वितिय श्रेणी	तृतिय श्रेणी
40	56	32	16

3. तलको तालिकामा पेम्बाको मासिक खर्च विवरण दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर :

शीर्षक	खाना	स्वास्थ्य	यातायात	सञ्चार	मनोरञ्जन	अन्य
प्रतिशत	40%	15%	12%	10%	13%	10%

4. दिइएको चित्रमा भारतीभवन मा.वि का कक्षा 8 का 300 विद्यार्थीहरूको मन पर्ने विषय दिइएको छ । उक्त वृत्तचित्र प्रयोग गरी निम्न लिखित प्रश्नको उत्तर देऊ :



(क) गणित विषय मनपर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?

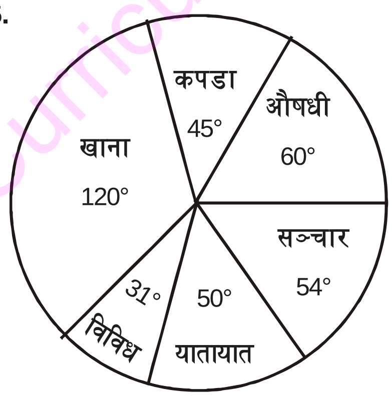
(ख) अङ्ग्रेजी विषय मन पर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

(ग) गणित र विज्ञान विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

(घ) गणित, विज्ञान र नेपाली बाहेकका विषय मन पराउने विद्यार्थीहरू सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

(ङ) वृत्तचित्रको उपयुक्त शीर्षक के होला ?

5.



सँगैको चित्रमा रमेशको परिवारको मासिक खर्च विवरणलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । चित्रमा हेर । यदि रमेशको परिवारमा खानामा मासिक रु. 3500 खर्च लाग्छ भने तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख :

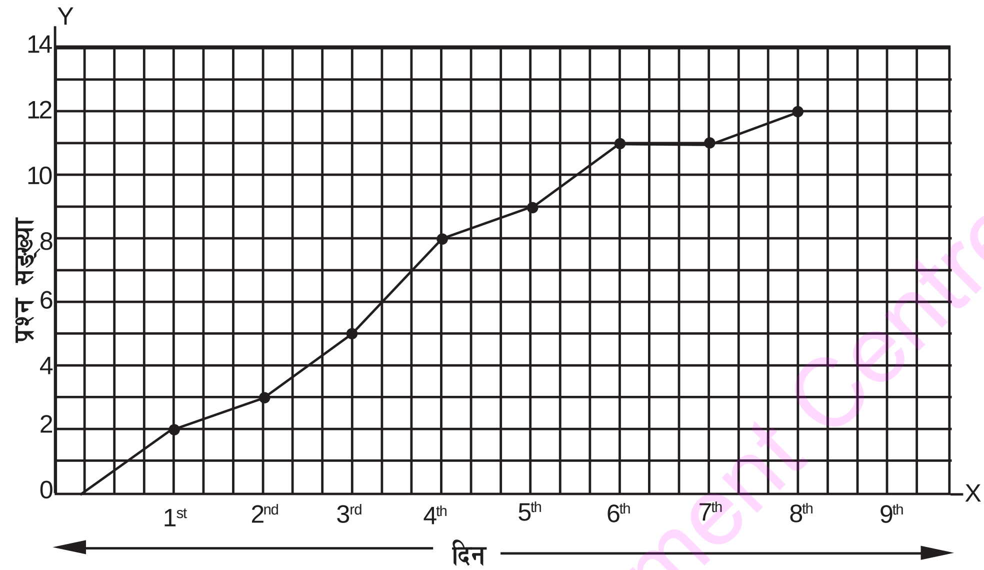
(क) औषधीमा कति खर्च लाग्ला ?

(ख) सञ्चारमा कति खर्च लाग्छ ?

(ग) रमेशको परिवार मासिक जम्मा खर्च पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

19.5 रेखाचित्र (Line Graph)



माथिको चित्रमा हेरौँ । बिनुले आफ्नो उपलब्धि (I,Q) परीक्षणमा 8 दिनसम्म ठिक उत्तर दिएका प्रश्नहरूको विवरण देखाइएको छ । तलका प्रश्नबारे छलफल गरौँ :

(क) पहिलो दिनमा कति ओटा प्रश्नको ठिक उत्तर दिइन् ?

(ख) चौथो दिनमा दिएको ठिक उत्तरको सङ्ख्या कति थियो ?

(ग) कुन दुई दिनमा बराबर सङ्ख्यामा प्रश्नहरूको ठिक उत्तर दिएको पाइयो ?

(घ) उक्त रेखाको प्रकृति कस्तो देखिन्छ ?

कुनै एउटा समय अन्तरालमा दुई चलहरूको सम्बन्ध देखाउन रेखाचित्रलाई प्रयोग गर्न सकिन्छ र यसलाई स्तम्ब रेखाचित्रको विकल्पका रूपमा लिन सकिन्छ ।

उदाहरण 1

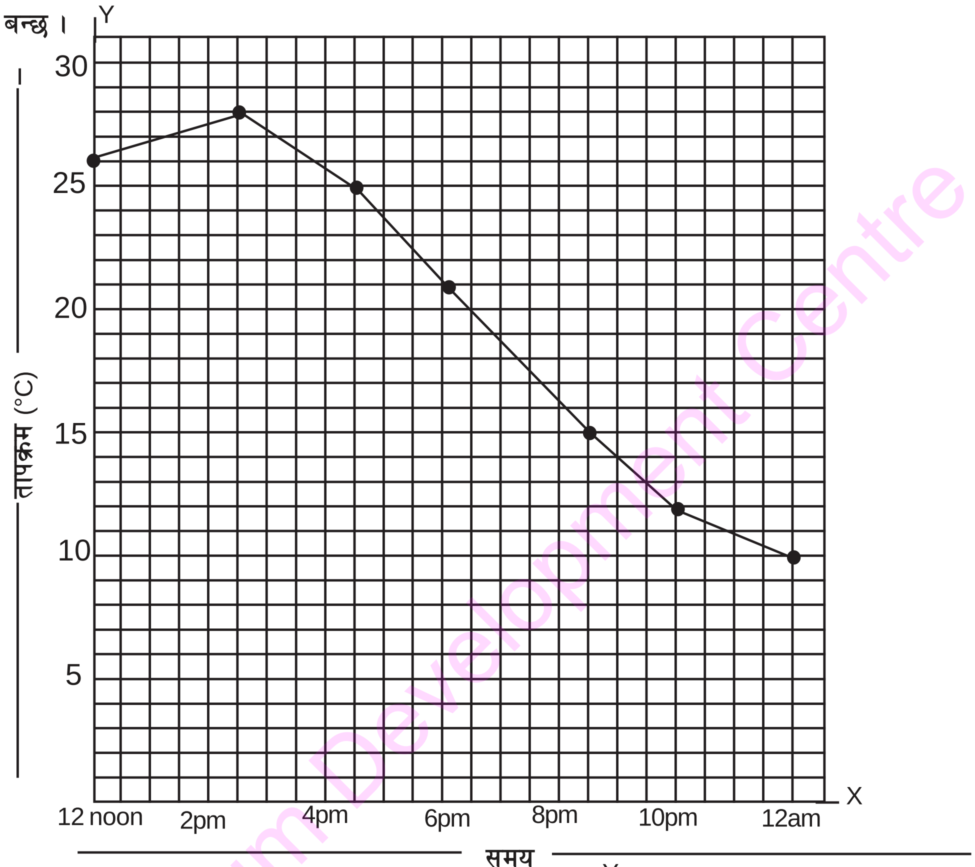
तल दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

समय	12pm	2pm	4pm	6pm	8pm	10pm	12pm
तापक्रम	26°C	28°C	25°C	21°C	15°C	12°C	10°C

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ समयलाई X- अक्षमा र तापक्रमलाई Y- अक्षमा राखी विन्दुहरू पत्ता लगाई रेखा खिच्दा निम्नानुसारको चित्र बन्छ ।



Curriculum Development Centre

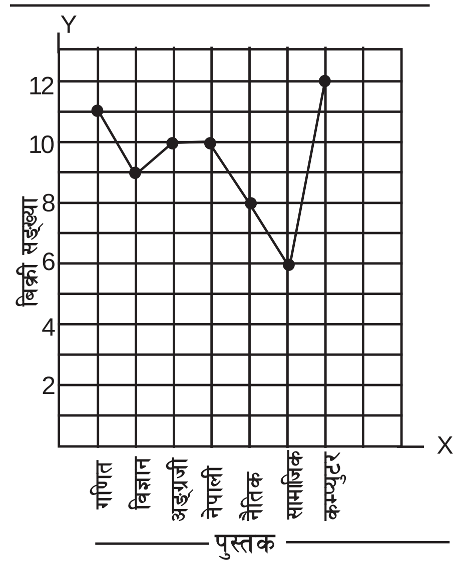
उदाहरण 2

एउटा पुस्तक बिक्रेताले एक दिनमा बिक्री गरेका पुस्तकको विवरण सँगैको रेखाचित्रमा दिइएको छ । रेखाचित्रको प्रयोग गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर देऊ ।

(क) सबैभन्दा बढी कुन पुस्तक बिक्री भएको छ ?

(ख) कुन दुई पुस्तकहरू बराबर सङ्ख्यामा बिक्री भएका छन् ?

(ग) प्रस्तुत रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा देखाऊ ।



समाधान

(क) सबभन्दा बढी 12 ओटा कम्प्युटर विषयमा किताब बिक्री भयो ।

(ख) अङ्ग्रेजी र नेपालीमा पुस्तक बराबर सङ्ख्यामा (10/10) बिक्री भए ।

(ग)

पुस्तक	गणित	विज्ञान	अङ्ग्रेजी	नेपाली	नैतिक	सामाजिक	कम्प्युटर
सङ्ख्या	11	9	10	10	8	6	12

अभ्यास 9.6

1. **तलका बारम्बारता तालिकाहरूलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर :**

(क)

कक्षा	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थी सङ्ख्या	30	40	35	44	50	45

(ख)

समय	6am	8am	10am	12pm	2pm	6pm
तापक्रम	10°c	12°c	18°c	25°c	25°c	17°c

2. हरिसिद्धि प्रा.वि को कक्षा 1 को विगत 6 वर्षको भर्ना दर यस प्रकार छ

वर्ष	2064	2065	2066	2067	2068	2069
भर्ना दर	22	24	21	18	15	12

दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी रेखाको प्रकृति लेख ।

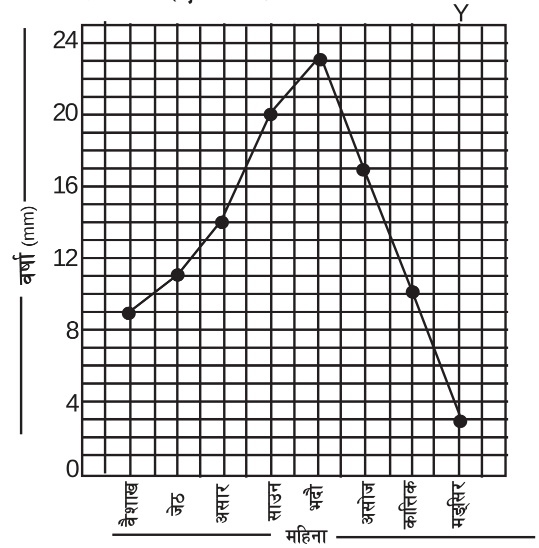
3. **दिइएको रेखाचित्रमा एउटा सहरको बर्षा विवरण देखाइएको छ । यसको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख :**

(क) सबैभन्दा कम वर्षा कुन महिनामा कति भएको थियो ?

(ख) सबैभन्दा बढी वर्षा कुन महिनामा कति भएको थियो ?

(ग) वर्षाको विस्तार पत्ता लगाऊ ।

(घ) रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर ।



Curriculum Development Centre

पाठ 20

बीजीय अभिव्यञ्जकहरू

(Algebraic Expressions)

20.0 पुनरवलोकन (Review)

एकभन्दा बढी मान हुने अक्षर वा सङ्केतलाई चल (Variable) भनिन्छ भने निश्चित वा एकमात्र मान हुने सङ्केतलाई अचल (constant) भनिन्छ । जस्तै : x चल हो भने 6 अचल हो । चल र अचलबिच गणितीय चार क्रियाहरू (+,-., ×,÷) गरी बन्ने अभिव्यञ्जकहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression) भनिन्छ । अभिव्यञ्जकमा भएको चलको सबभन्दा ठुलो घाताङ्कलाई उक्त अभिव्यञ्जकको डिग्री भनिन्छ । जस्तै : x^3+3x^2-4x+5 को डिग्री 3 हुन्छ । बीजीय अभिव्यञ्जकमा भएका पदहरूका सङ्ख्याका आधारमा उक्त बीजीय अभिव्यञ्जकको नामकरण गरिन्छ । यदि बीजीय अभिव्यञ्जकमा एउटा मात्र पद भए उक्त बीजीय अभिव्यञ्जकलाई एक पदीय अभिव्यञ्जक (monomial), दुई ओटा पदहरू भए द्विपदीय अभिव्यञ्जक (binomial), तिन ओटा पदहरू भए त्यो त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (trinomial) हुन्छ । त्यस्तै, दुई वा सोभन्दा बढी पदहरू भएमा बहु पदीय अभिव्यञ्जक (polynomial) भनिन्छ । जस्तैः x^3+3x^2-4x+5 बहुपदीय अभिव्यञ्जक हो ।

यसरी विभिन्न बीजीय अभिव्यञ्जकहरू तथा तिनीहरूको जोड, घटाउ, गुणन तथा भागका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरणका बारेमा अध्ययन गर्दछौँ ।

20.1 खण्डीकरण (Factorization)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गर :

(क) $7 \times 3 = 21$ (ख) $x(x+3) = x^2+3x$ (ग) $(x-3)(x+3) = x(x+3)-3(x+3) = x^2-9$

माथिको उदाहरण (क) मा 21 को गुणन खण्ड 7 र 3 हुन् अर्थात 7 र 3 गुणन गर्दा 21 हुन्छ ।

त्यस्तै, उदाहरण (ख) र (ग) मा गुणन खण्डहरू के के होलान्, छलफल गर ।

> कुनै बीजीय अभिव्यञ्जकलाई अन्य रुढ गुणन खण्डहरूको गुणनका रूपमा रूपान्तरण गर्ने प्रक्रियालाई खण्डीकरण (factorization) भनिन्छ ।

जस्तै : $7x + x^2 = x(7+x)$ किनकि दुवैमा x साझा छ ।

$4x^2+8x = 4x\ (x+2)$ किनकि दुवैमा $4x$ साझा छ ।

Curriculum Development Centre

20.1.1 साझा लिने र पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्ने ।

कुनै बहु पदीय अभिव्यञ्जकमा साझा गुणन खण्ड भएमा त्यसलाई साझा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ । जस्तै : $4xy^2 + 2xy = 2x(2x+y)$ हुन्छ ।

त्यस्तै, बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा सबै पदहरूमा साझा गुणन खण्ड नभएमा साझा गुणन खण्ड भएका पदहरूलाई एकत्रित गरी साझा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ । जस्तै : $2xy + 3 + 6x + y$ लाई पद एकत्रित गर्दा

$= 2xy + 6x + y + 3 = 2x(y+3) + 1(y+3) = (2x+1)(y+3)$

उदाहरण 1

तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर ।

(क) $4x^2+12xy$

समाधान

यहाँ, $4x^2+12xy$

$= 4x.x + 4.3.x.y$ [दुवैमा $4x$ साझा छ]

$= 4x(x+3y)$

(ख) $a^2-15b-5a+3ab$

समाधान

यहाँ, $a^2-15b-5a+3ab$

साझा आउने पदहरू मिलाउँदा,

$a^2-5a+3ab-15b$ [पहिलो दुई पदबाट a र

$= a(a-5)+3b(a-5)$ दोस्रो दुई पदबाट 3b

$= (a+3b)(a-5)$ साझा लिँदा]

अभ्यास 20.1.1

1. तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर :

(क) $6x+3$ (ख) x^2+4x (ग) $12a+3b$ (घ) $12p^2+6q^2$

(ङ) $14xy+7y$ (च) $x+x^3$ (छ) $12x^2+xy+xz$ (ज) x^3+x^2+x

(झ) $2x^2-2x^3+8x^4$

2. पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर :

(क) $ax+bx+ay+by$ (ख) $2ab+a^2b-2b-ab$ (ग) $x^2y-xy+2x^2y-2xy$

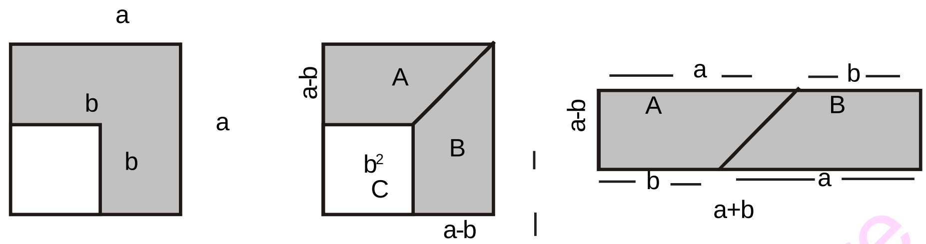
(घ) $x^2 + 3x + xy + 3y$ (ङ) $2ab+3a+2b^2+3b$ (च) $a-b+a^2-ab$

(छ) $2a^2 + 5a - 6a - 15$) (ज) $2xa-x^2a+2a-ax$ (झ) $x^2y+4xy-xy^2-4y^2$

(ञ) $3x(x+y) + 3y(x+y)$ (ट) $2x^2+3ax+2ax+3a^2$

Curriculum Development Centre

20.1.2. दुई वर्गबिचको फरकको खण्डीकरण (a^2-b^2)



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

1. चित्र (क) मा देखाए जस्तै लम्बाइ र चौडाइ a cm भएको एउटा वर्ग खिच्ने र दुवैतिर b cm घटाई अर्को सानो वर्ग बनाऊने । त्यो सानो वर्गबाहेकको भागमा छाया पार्ने । (चित्र क)
2. चित्र (ख) मा देखाए जस्तै A, B, र C भागहरू कैँचीले काट्ने ।
3. चित्रमा A र B लाई मिलाउँदा कस्तो आकृति बन्छ ? (चित्र ग)
4. चित्र (ग) को लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला, यसको क्षेत्रफल कति होला ?

   चित्र (क) मा छाँया पारेको भाग र चित्र (ग) मा के फरक छ ?

   यहाँ, चित्र (क) मा ठुलो वर्गको क्षेत्रफल = a^2 र सानो वर्गको क्षेत्रफल = b^2 हुन्छ भने

   छाया पारेको भागको क्षेत्रफल = $a^2 - b^2$ हुन्छ ।

   त्यस्तै, चित्र (ग) को क्षेत्रफल = (a+b) x (a-b) {आयत भएकाले}

$$\boxed{\text{तसर्थ } a^2-b^2 = (a+b)(a-b)}$$

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर :

(क) a^2-$16b^2$ (ख) $9x^2$-$49y^2$ (ग) $p^2-\frac{1}{81q^2}$

समाधान

(यहाँ, a^2-16b^2

$= a^2-(4b)^2$

सुत्र प्रयोग गर्दा,

$= (a-4b)(a+4b)$

समाधान

यहाँ, $9x^2-49y^2$

$=9x^2-49y^2$

$=(3x)^2-(7y)^2$

$(3x-7y)(3x+7y)$

समाधान

यहाँ, $p^2-\frac{1}{81q^2}$

$=p^2-\left(\frac{1}{9q}\right)^2$

$=\left(p-\frac{1}{9q}\right)\left(p+\frac{1}{9q}\right)$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 20.1.2

1. a^2-b^2 को सूत्र प्रयोग गरी खण्डीकरण गर :

(क) x^2-4 (ख) a^2-4b^2 (ग) $9x^2-y^2$ (घ) $5x^2-20y^2$

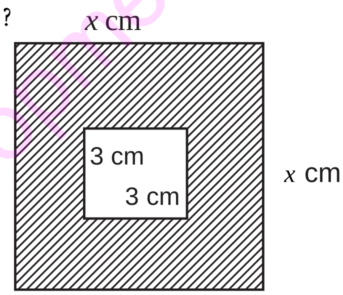
(ङ) $13a^2-117b^2$ (च) $25-\frac{1}{9y^2}$ (छ) $121x^2-\frac{1}{y^2}$ (ज) $2p^2-\frac{50}{q^2}$

(झ) $72-2b^2$ (ञ) $121-25y^2$ (ट) $\frac{15}{a^2}-60a^2$ (ठ) $81-64y^2$

(ड) $4x^3y-81xy^3$ (ढ) $169-196z^2$ (ण) ab^3-9a^3b (त) $\frac{49}{121}x^2-\frac{64}{9}y^2$

(थ) zx^2-zy^2 (द) $(x+2)^2-4$ (ध) $256-\frac{x^2}{4}$ (न) $1-\frac{81p^2}{121q^2}$

2. दिइएको चित्रमा छाया परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

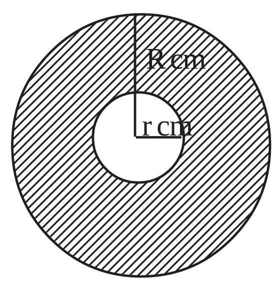


3. x मिटर लम्बाइ भएको वर्गाकार बगैँचाको बिचमा 6 मिटर किनारा भएको वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरीबाहेकको बगैँचाको क्षेत्रफल कति होला ?

4. सँगैको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

(जहाँ वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2 छ)

5. प्रश्न नं 4 मा यदि R = 10 cm र r = 3 cm भए छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।



Curriculum Development Centre

20.1.3 पूर्ण वर्ग हुने त्रिपदीयको खण्डीकरण

$(a+b)^2$ को विस्तारित रूप के हो, $(a-b)^2$ को विस्तारित रूप के हो ?

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ र $(a-b)^2 = a^2-2ab+b$ हुन्छ ।

यसका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी पूर्ण वर्गको खण्डीकरणको अध्ययन गर्दछौँ ।

उदाहरण 1

पूर्ण वर्ग बनाउन तलका खाली ठाउँमा कति राख्नुपर्ला ?

(क) $x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+36$

(ख) $49a^2\ldots\ldots\ldots\ldots+36b^2$

समाधान

(क) यहाँ,

$x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+36$

$= x^2+\ldots\ldots\ldots+(6)^2$

अब $a^2+2ab+b^2$ सँग तुलना गर्दा,

$a = x$, $b = 6$

तसर्थ, $2ab = 2 . x . 6 = 12x$

त्यसकारण, $x^2 + 12x +36 = (x + 6)^2$ भयो ।

निष्कर्ष : $x^2 + \ldots.. + 36$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा $12x$ थप्नुपर्छ ।

(ख) यहाँ,

$49a^2-\ldots\ldots\ldots\ldots+36b^2$

$=(7a)^2-\ldots\ldots\ldots+(6b)^2$

अब, $a^2-2ab+b^2$ सँग तुलना गर्दा

$a = 7a$, $b = 6b$; $2ab = 2.7a.6b = 84ab$ हुन्छ ।

अत: $49a^2-84ab+36b^2 = (7a - 6b)^2$

निश्कर्ष : $49a^2 - \ldots.. + 36b^2$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा $84ab$ थप्नुपर्छ ।

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर :

(क) $4x^2+20xy+25y^2$

(ख) $36a^2-48ab+16b^2$

समाधान

(क) यहाँ, $4x^2+20xy+25y^2$

$a^2+2ab+b^2$ को ढाँचामा लैजाँदा,

$= (2x)^2+2.2x.5y+(5y)^2$

$=(2x+5y)^2$

(ख) यहाँ, $36a^2-48ab+16b^2$

$a^2+2ab+b^2$ को ढाँचामा लैजाँदा

$=(6a)^2-2.6a.4b+(4b)^2$

$=(6a-4b)^2$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 20.1.3

1. **खाली ठाउँमा उपयुक्त पद भरी पूर्ण वर्ग बनाऊ :**

(क) $x^2+.......+16$ (ख) $4a^2+....+y^2$ (ग) $p^2-.....+36$

(घ) $9a^2-......+16b^2$ (ङ) $25p^2-......+49q^2$ (च) $p^2+.............+\frac{4}{p^2}$

(छ) $225x^2-.....+64y^2$ (ज) $1+......+36y^2$ (झ) $p^2-.............+\frac{1}{p^2}$

2. **खण्डीकरण गर :**

(क) $a^2+12a+36$ (ख) $y^2+14y+49$ (ग) $p^2+22p+121$

(घ) $4a^2+20a+25$ (ङ) $9r^2+60r+100$ (च) $36x^2+84x+49$

(छ) $x^2-8x+16$ (ज) $a^2-18a+81$ (झ) $p^2-26p+169$

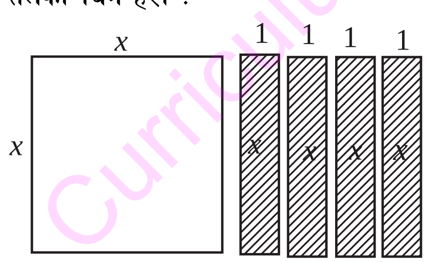
(ञ) $9a^2-30a+25$ (ट) $25y^2-60y+36$ (ठ) $49r^2-70r+25$

(ड) $4p^2+24pq+36q^2$ (ढ) $9a^2+42ab+49b^2$ (ण) $\frac{x^2}{16}+xy+4y^2$

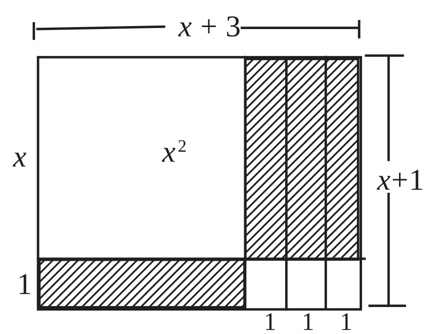
(त) $25a^2-40ab+16b^2$ (थ) $49q^2-70qr+25r^2$ (द) $25x^2-2xy+\frac{y^2}{25}$

20.1.4 $x^2 \pm bx \pm c$ **स्वरूपको खण्डीकरण**

तलको चित्र हेरौँ :



x^2+4x+3



$(x+1)(x+3)$

माथिको चित्रबाट के पायौँ छलफल गर ।

$x^2 + xa + xb + ab$ **लाई खण्डीकरण गर्दा,**

$x(x+a)+b(x+a)$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

अत: को खण्डीकरण गर्दा c का दुई ओटा गुणन खण्ड पत्ता लगाउने । जस्तै : r र s

जसमा $r \pm s = b$ र हुनुपर्छ ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर :

(क) $x^2+12x+32$ (ख) $x^2-5x-24$

समाधान

$r \times s = 32$	$r + s = 12$
32×1	$32 + 1 \neq 12$
16×2	$16 + 2 \neq 12$
8×4	$8 + 4 = 12$

(क) **यहाँ,** $x^2+12x+32$

$= x^2+(8+4)x+32$

$= x^2+8x+4x+32$

$= x(x+8)+4(x+8)$

$= (x+4)(x+8)$

$r \times s = -24$	$r - s = -5$
24×-1	$24 + (-1) \neq -5$
-24×1	$-24 + 1 \neq -5$
12×-2	$12 + (-2) \neq -5$
-12×2	$12 + 2 \neq -5$
8×-3	$8 + (-3) \neq -5$
-3×8	$-8 + 3 = 5$
6×-4	$6 + (-4) \neq -5$

(ख) **यहाँ,** $x^2-5x-24$

$r \times s = c$ $x^2 \pm bx \pm c$

$= x^2-8x+3x-24$

$= x(x-8)+3(x-8)$

$= (x-8)(x+3)$

अभ्यास 20.1.4

1. **खण्डीकरण गर :**

क) x^2+4x+3 ख) a^2+7a+6 (ग) $m^2 - 4m - 5$

(घ) $x^2 -11x -26$ (ङ) $x^2 + 7x -30$ (च) y^2-y-30

(छ) $p^2-8p-33$ (ज) $a^2+14a+48$ (झ) $x^2+10x+24$

(ञ) $x^2+11x-26$ (ट) $x^2-14x+24$ (ठ) $x^2-2x-15$

(ड) $x^2+2x-15$ (ढ) x^2-6x+8 (ण) $a^2-13a-48$

(त) $a^4+12a^3+32a^2$ (थ) x^3+12x^2+11x (द) $4x^3-8x^2-12x$

Curriculum Development Centre

20.1.5 $ax^2 \pm bx \pm c$ स्वरूपको खण्डीकरण

ax^2+bx+c मा सर्वप्रथम a र c को गुणा गर्ने र गुणनफलको दुई ओटा गुणन खण्ड पत्ता लगाउने जसको जोड वा घटाउ b हुन्छ । त्यसलाई तलको तालिकाबाट देखाउन सकिन्छ :

अभिव्यञ्जक			r र s को चिह्न
ax^2+bx+c	+	r+s = b	दुवै + ve
ax^2+bx-c	-	r-s = b	ठूलो + ve
ax^2-bx+c	+	-r-s = -b	दुवै - ve
ax^2-bx-c	-	-r+s = -b	ठूलो - ve

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर :

(क) $6x^2+17x+12$

समाधान

यहाँ, a = 6, c = 12, b = +17

a.c = 6x12 = 72

$= 6x^2+9x+8x+12$

$= 3x(2x+3) +4(2x+3)$

$= (2x+3)(3x+4)$

(ख) $3x^2-11x-20$

समाधान

यहाँ a = 3, b = -11 र c = -20

a.c = -60

$= 3x^2-15x+4x-20$

$= 3x(x-5)+4(x-5)$

$= (3x + 4)(x-5)$

-15 x 4=-60
-15+4 =-11

अभ्यास 20.1.5

खण्डीकरण गर :

(क) $3x^2+5x+2$

(ख) $3x^2-4x+1$

(ग) $7x^2-30x+8$

(घ) $4a^2-8a+3$

(ङ) $15p^2-13p+2$

(च) $12a^2-32a+5$

(छ) $5x^2-14x-3$

(ज) $10x^2-3x-1$

(झ) $15p^2-13p+2$

(ञ) $6b^2-4b-10$

(ट) $21x^2+25x+4$

(ठ) $12a^2+28ab-5b^2$

(ड) $16a^2+24ab+9b^2$

(ढ) $6x^2+xy-7y^2$

(ण) $3a^2-ab-10b^2$

(त) $(x+1)^2-6(x+1)+8$

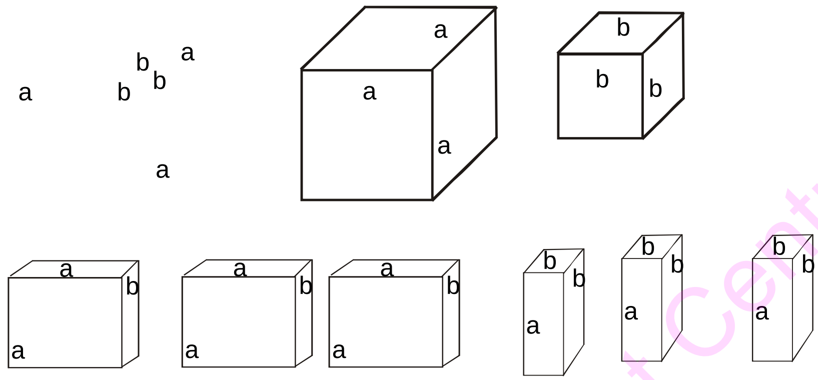
(थ) $28+27x-x^2$

(द) $6p^2q+30pq+36q$

Curriculum Development Centre

20.2 $(a \pm b)^3$ को ज्यामितीय अवधारणा

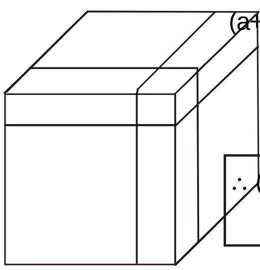
I. $(a+b)^3$ को ज्यामितीय अवधारणा



1. एउटा साबुन या काठको घनाकार वस्तु लिने जसमा प्रत्येक भुजा (a+b) छ ।
2. चित्रमा देखाए जस्तै उक्त घनाकार वस्तुलाई 8 ओटा टुक्रामा काट्ने ।
3. सबै टुक्राहरूको छुट्टा छुट्टै आयतन पत्ता लगाउने ।

अब घनको आयतन = सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल हुन्छ ।

∵ षड्मुखाको आयतन (V) = l x b x h हुन्छ ।



$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2$

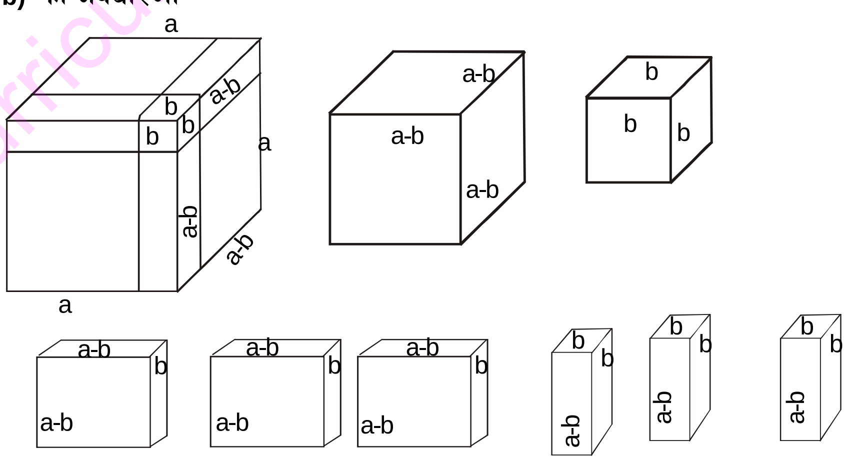
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ (दुबै पदमा 3ab साझा भएकाले)

$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

II. **$(a-b)^3$ को अवधारणा**



Curriculum Development Centre

1. चित्रमा देखाए जस्तै सबै भुजा a भएको एउटा घनाकार वस्तु लेऊ ।

2. त्यसलाई प्रत्येक भुजामा b घटाएर रेखा तान र चित्रमा देखाए जस्तै 8 ओटा टुक्रामा काट ।

3. सबै टुक्राहरूको छुट्टा छुट्टै आयतन निकाल ।

अब, पुरा घनको आयतन = सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल

$a^3 = (a-b)^3 + (a-b)^2b + (a-b)^2b + (a-b)^2b + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + b^3$

$= (a-b)^3 + 3(a-b)^2 . b + 3(a-b).b^2 + b^3$

$= (a-b)^3 + (a^2-2ab+b^2).b + 3(a-b)b^2 + b^3$

$= (a-b)^3 + 3a^2b - 6ab^2 + 3b^3 + 3ab^2 – 3b^3 + b^3$

$a^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

अथवा, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ (3ab दुवैमा साझा भएकाले)

$$\boxed{\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ &= a^3-3ab(a-b)-b^3\end{aligned}}$$

फेरि, $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

अथवा $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ र

$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

$\boxed{a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)}$ हुन्छ ।

नोट : 1. $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ हुन्छ ।

2. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

$\boxed{a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$ हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

घन पत्ता लगाऊ (सूत्र प्रयोग गरेर) :

(क) (x+2)

समाधान

यहाँ, (x+2) को घन

$= (x+2)^3$

$= x^3+3.x^2.2+3.x.2^2+2^3$

$= x^2+6x^2+12x+8$

(ख) (x-3)

समाधान

यहाँ, (x-3) को घन

$= (x-3)^3$

$= x^3 - 3.x^2.3+3.x\ 3^2 - 3^3$

$= x^3-9x^2+27x-27$

उदाहरण 2

यदि (a+b)= 5 र a.b = 6 भए a^3+b^3 को मान कति होला ?

समाधान:

यहाँ, (a+b) = 5, ab=6

$a^3+b^3 = ?$

हामीलाई थाहा छ, $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$= 5^3 - 3.6(5)$

$= 125 - 90$

$= 35$

उदाहरण 3

सरल गर :

$(x+y)^3 - (x-y)^3$

समाधान

यहाँ, $(x+y)^3 - (x-y)^3$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x^3-3x^2y+3xy^2 - y^3)$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3+3x^2y-3xy^2 + y^3$

$= 6x^2y+2y^3$

$= 2y(3x^2+y^2)$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 20.2

1. सूत्र प्रयोग गरी तलका अभिव्यञ्जकहरूको घन पत्ता लगाऊ :

   (क) $(x+1)$ (ख) $(x-3)$ (ग) $(x+4)$ (घ) $(2x-5)$

   (ङ) $(4-3b)$ (च) $(3a+2b)$ (छ) $(2a+b)$ (ज) $(1+3y)$

2. तलका घनहरूको विस्तारित रूप लेख :

   (क) $(3x-2y)^3$ (ख) $(x^2+y)^3$ (ग) $(a^2+b^2)^3$ (घ) $(4a-b)^3$

3. तलका अभिव्यञ्जकहरूलाई **$(a+b)^3$** को स्वरूपमा लेख :

   (क) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ (ख) $64x^3+240x^2y+300xy^2+125y^3$

4. यदि $(x-a)=6$ र $x.a=10$ भए x^3-a^3 को मान पत्ता लगाऊ :

5. खण्डीकरण गर :

   (क) a^3-8 (ख) $27x^3+64y^3$ (ग) $125p^3-216$ (घ) $512+343b^3$

6. यदि भए $p^3+\frac{1}{p^3}$ को मान पत्ता लगाऊ ।

$p+\frac{1}{p}=7$

7. यदि $y + z = 4$ र $yz = 3$ भए $y^3 + z^3 = ?$

8. यदि $y-\frac{1}{y}=9$ भए $y^3-\frac{1}{y^3}$ को मान कति होला ?

9. यदि $x+\frac{1}{x}=12$ भए $x^3+\frac{1}{x^3}$ को मान पत्ता लगाऊ ।

10. सरल गर :

    (क) $y^3+z^3-(y+z)^3$ (ख) $(x+a)^3+(x-a)^3$

    (ग) $(p^3-q^3)-(p-q)^3$ (घ) $(x+y)^3-3xy(x+y)$

    (ङ) $(x-y)^3+3xy(x-y)$ (च) $(a+b)^3-a^3-b^3$

Curriculum Development Centre

20.3. बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य
(HCF and LCM of Algebraic Expressions)

20.3.1. महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

दुई सङ्ख्याहरू 12 र 18 लेऊ । 12 र 18 का गुणन खण्डहरू निकाल ।

12 का गुणन खण्डहरू 1, 2, 3, 4, 6, 12 र

18 का गुणन खण्डहरू 1, 2, 3, 6, 9,18 हुन्छन् ।

12 र 18 का गुणन खण्डहरूमध्ये सबभन्दा ठुलो साझा गुणन खण्ड कुन हो, त्यो नै 12 र 18 को महत्तम समापर्वतक हो । यहाँ, 12 र 18 को सबैभन्दा ठुलो साझा गुणन खण्ड 6 हो ।

तसर्थ, 12 र 18 को म.स. 6 भयो ।

त्यस्तै, $3x^2y$ र $6xy^2$ मा हेरौँ

$3x^2y = 3.x.x.y$ र

$6xy^2 = 2.3.x.y.y$ हुन्छ ।

यी दुई अभिव्यञ्जकबिचमा साझा गुणन खण्डहरू 3, x र y छुन् ।

त्यसकारण, $3x^2y$ र $6xy^2$ को म.स. $3xy$ हुन्छ ।

दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको सबैभन्दा ठुलो साझा अभिव्यञ्जक (गुणन खण्ड) लाई ती अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा म.स. (HCF) लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

x^2-6x+8, x^2-4 र x^2+4x+4 को म.स. पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2+6x+8$

$= x^2+4x+2x+8$

$= x(x+4)+2(x+4)$

$= (x+2)(x+4)$

Curriculum Development Centre

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2-4$

$= x^2-2^2$

$= (x-2)(x+2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2+4x+4$

$= x^2+2.2x+2^2$

$= (x+2)^2$

$= (x+2)(x+2)$

$\therefore$ म.स. = तिन ओटै अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्ड $= (x+2)$

त्यस कारण, x^2-6x+8, x^2-4 र x^2+4x+4 को म.स. $(x+2)$ हुन्छ ।

अभ्यास 20.3.1

1. महत्तम समापवर्तक (म.स) पत्ता लगाऊ :

(क) $4x^2y$ र xy^2

(ख) $9x^2y^3$ र $15xy^2$

(ग) a^2bc, b^2ac र c^2ab

(घ) x^2-4 र $3x+6$

(ङ) x^2-y^2 र $xy-y^2$

(च) p^2q-q^2p, $2p^2-2pq$

(छ) $3a+b$ र $15a+5b$

(ज) $x^2+2xy+y^2$ र x^2-y^2

(झ) $x^2-11x+30$ र x^2-36

(ञ) x^3-9 र x^2-6x+9

(ट) $x^2+16x+60$ र $x^2+20x+100$

(ठ) a^2+5a+6 र a^2+a-6

(ड) $x^2-11x+10$ र x^3-x

(ढ) $a^2-2ab+b^2$ र a^4-b^4

(ण) $x^2-x^2y^2$ र y^2-y^4

2. म.स. निकाल :

(क) $(x-a)$, x^2-a^2 र $x^2-2ax+a^2$

(ख) x^2-y^2, x^2-xy र x^2y-y^2x

(ग) a^3-ab^2, a^2+ab र a^2b+ab^2

(घ) x^2+5x+6, x^2+x-6 र x^2-9

(ङ) a^2+2a-3, a^2-3a+2 र a^2-1

(च) x^2+4x+4, $x^2+7x+10$ र x^2-x-6

(छ) x^3+2x^2-15x, $x^2-7x+12$ र $3x^2-27$

(ज) a^2-3a+2, $3a^2-2a-8$ र $2a^2-9a+10$

(झ) $a^3+6a^2-4a-24$, a^2+5a+6 र a^2-4

Curriculum Development Centre

20.3.2. लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

8 र 10 का अपवर्त्यहरू लेख ।

8 का अपवर्त्यहरू (M_8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48, …………..}

10 का अपवर्त्यहरू (M_{10}) = {10, 20, 30, 40, 50, 60, ……}

अब 8 र 10 का साझा अपवर्त्यहरू कुन कनु हुन्, र सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य पत्ता लगाऊ । त्यो नै 8 र 10 को लघुत्तम समापवर्त्य हो । यहाँ, 8 र 10 को सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य 40 हो ।

त्यसकारण, 8 र 10 लघुत्तम समापवर्त्य 40 हो ।

फेरि, $8x^2$ र $10x^3$ मा हेरौँ ।

8 र 10 को साझा अपवर्त्यहरू {40, 80, ….}

सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य 40 हो ।

त्यस्तै, x^2 र x^3 का साझा अपवर्त्यहरू x^3, x^4, x^5, x^6, ….. हुन् र सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्यहरू x^3 हो ।

$8x^2$ र $10x^3$ ले भाग जाने सबभन्दा सानो अपवर्त्य $40x^3$ हुन्छ ।

त्यस कारण, $8x^2$ र $10x^3$ को ल.स. पनि $40x^3$ हुन्छ ।

अर्को तरिका

$8x^2 = 2.2.2.x.x$

$10x^3 = 2.5.x.x.x$

साझा गुणन खण्डहरू = $2.x.x. = 2x^2$

बाँकी गुणन खण्डहरू = $2.2.5.x = 20x$

ल.स. = साझा गुणन खण्डहरू x बाँकी गुणन खण्डहरू

= $2x^2 \times 20x = 40x^3$

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्डहरू र बाँकी गुणन खण्डहरूको गुणन फल उक्त अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (lowest common multiple) हो ।

दुई वा दुईभन्दा बढी बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य भनेको ती अभिव्यजकहरूले नि:शेष भाग जाने सबैभन्दा सानो बीजीय अभिव्यञ्जक हो । यसलाई छोटकरिमा ल.स. (LCM) लेखिन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

ल.स.निकाल :

$x^2-10x+25$, x^2-x-20 र x^2-25

समाधान

पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2-10x+25$

$= x^2- 2 \times x \times 5+5^2$

$= (x-5)(x-5)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2-x-20 = x^2-5x+4x-20$

$= x(x-5)+4(x-5)$

$= (x+4)(x-5)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2-25 = x^2-5^2$

$= (x-5)(x+5)$

सबै अभिव्यञ्जकमा साझा गुणन खण्ड $= (x-5)$

अब, ल.स. = साझा गुणन खण्डहरू x बाँकी गुणन खण्डहरू

$= (x-5)(x-5)(x+5)(x+4)$

$= (x-5)^2(x+5)(x+4)$

$\therefore$ ल.स. $= (x-5)^2(x+5)(x+4)$

अभ्यास 20.3.2

1. ल.स. पत्ता लगाऊ :

(क) $2x$ र 4 (ख) $3xy$ र $6xy^2$

(ग) $5xy$ र $10y^2$ (घ) $6a^2b$ र $6ab^2$

(ङ) 2a र 2a+4 (च) $3x^2-3$ र x^2-1

(छ) $x+y$ र x^2+xy (ज) x^2+4x+4 र x^2+2x

(झ) $5x-20$ र x^2-16 (ञ) p^2-pq र $pq-q^2$

(ट) $3x^3+15x^2$ र $2x^3-50x$ (ठ) x^3-4x र $x^2+7x+10$

(ड) $3x^2+7x+2$ र $2x^2+3x-2$ (ढ) $y^2+2y-48$ र $y^2-9y+18$

(ण) $a^2+4ab+4b^2$ र a^2-4b^2 (त) $9x^2-24xy+16y^2$ र $3x^2-xy-4y^2$

Curriculum Development Centre

2. ल.स. निकाल :

(क) $4x^2y$, $6xy$ र $8xy^2$
(ख) x^2-2x, $x-2$ र $x+2$
(ग) x^2-xy, x^2-y^2 र $xy-y^2$
(घ) p^2-q^2, $p^2-2pq+q^2$ र p^2q-pq^2
(ङ) a^2-1, a^2+a-2 र a^2-2a+1
(च) x^2-4, x^2+4x+4 र x^2+3x+2
(छ) x^2-3x+2, x^2+x-6 र x^2+2x-3
(ज) $4x^2+12xy+9y^2$, $4x^2-9y^2$ र $4x^2-12xy+9y^2$
(झ) $6x^3+5x^2-6x$, $2x^4+x^3-3x^2$ र $3x^3-5x^2+2x$
(ञ) x^3-x^2-42x, $x^4+4x^3-12x^2$ र $x^2-5x-14$

20.4. आनुपातिक बीजीय अभिव्यञ्जकहरू (Rational Algebraic Expressions)

20.4.1. आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरू (Rational Expressions)

तलका सङ्ख्याहरूका बारेमा छलफल गर :

$$4\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{4x}{3y}\ ,\ \frac{a}{b}$$

पहिलो र दोस्रो सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । त्यस्तै, तेस्रो आनुपातिक हो, जसमा हर र अंश दुवैमा बीजीय अभिव्यञ्जक छ । यसलाई आनुपातिक अभिव्यञ्जक भनिन्छ ।

यदि $\frac{a}{b}$ मा a र b दुवै बीजीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् भने $\frac{a}{b}$ लाई आनुपातिक अभिव्यञ्जक (rational expression) भनिन्छ ।

जस्तै : $\frac{3x}{x+1}, \frac{x^2+3x+2}{x+2}, \frac{5}{x+4}$ आदि ।

नोट : यदि आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको हरमा शून्य (0) छ भने अर्थात $\frac{a}{b}$ मा $b=0$ भए उक्त आनुपातिक अभिव्यञ्जक अपरिभाषित हुन्छ ।

जस्तै : $\frac{5}{x-3}$ मा x = 3 भए, $\frac{y^2}{x-a}$ मा x = a भए, $\frac{5q^2}{p-q}$ मा p = q भए अपरिभाषित हुन्छ ।

आनुपातिक अभिव्यञ्जकको सरल गर्ने तरिका
- *हर र अंश दुवैलाई छुट्टा छुट्टै खण्डीकरण गर्ने*
- *हर र अंशका साझा अभिव्यञ्जक हटाउने र सरल गर्ने*

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

सरल गर :

(क) $\frac{x^3+3x^2}{x^3+x^2}$

समाधान

$\frac{x^3+3x^2}{x^3+x^2}$

$=\frac{x^2(x+3)}{x^2(x+1)}$ (x^2 साझा गुणन खण्ड)

$=\frac{x+3}{x+1}$ (x^2 लाई हटाउँदा)

(ख) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

समाधान $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

$=\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-4}$

$=\frac{x(x-3)-2(x-3)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{(x-3)}{x+2}$

अभ्यास 20.4.1

1. x को मान कति हुँदा तलका अभिव्यञ्जकहरू परिभाषित हुँदैनन् ?

(क) $\frac{3}{x-11}$ (ख) $\frac{x^2-y}{x-y}$ (ग) $\frac{x^3}{x^2-4}$

(घ) $\frac{5x^3}{4-x}$ (ङ) $\frac{3x^2-2xy}{x^2-16}$ (च) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-49}$

2. सरल गर :

(क) $\frac{3x^2}{4x^3}$ (ख) $\frac{5x^2y}{10xy^2}$ (ग) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

(घ) $\frac{5a^3-45a}{4a^2-12a}$ (ङ) $\frac{(x-3)^3}{2x-6}$ (च) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

(छ) $\frac{a^2+6x+8}{a^2-16}$ (ज) $\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$ (झ) $\frac{(2x+3)^2}{(4x^2-9)}$

(ञ) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$ (ट) $\frac{x^2+5x+6}{(x+3)^2}$ (ठ) $\frac{x^2-9x+18}{x^2-7x+6}$

(ड) $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$ (ढ) $\frac{3xyz}{3x^2-12x}$

Curriculum Development Centre

20.4.2 समान हर भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाउ
(Addition and Subtraction of Rational Expressions having Same Denominator)

[यदि आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको हर उही छ भने अंशहरूको मात्र जोड वा घटाउ गरिन्छ । हर लाई जस्ताको तस्तै राख्ने र सरल गरी न्यूनतम पदमा लैजाने ।]

उदाहरण 1

सरल गर :

(क) $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x+1}$

समाधान

(**यहाँ,** $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x+1}$

$=\frac{2x+3x}{x+1}$

$=\frac{5x}{x+1}$

(ख) $\frac{3x}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

समाधान

यहाँ, $\frac{3x}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

$=\frac{3x-9}{x-3}$

$=\frac{3(x-3)}{x-3}$

$=3$

उदाहरण 2

सरल गर :

(क) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{2x+1}{x+1}$

(ख) $\frac{4a^2}{a+5b}-\frac{(12ab-9b^2)}{a+5b}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2}{x+1}+\frac{2x+1}{x+1}$

$=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

$=\frac{(x+1)^2}{(x+1)}$

$=(x+1)$

Curriculum Development Centre

यहाँ , $\frac{4a^2}{a+5b} - \frac{(12ab - 9b^2)}{a+5b}$

$= \frac{4a^2 - (12ab - 9b^2)}{(a+5b)}$

$= \frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{(a+5b)}$

$= \frac{(2a)^2 - 2.2a.3b + (3b)^2}{(a+5b)}$

$= \frac{(2a - 3b)^2}{(a+5b)}$

अभ्यास 20.4.2

1. सरल गर :

(क) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{7}$ (ख) $\frac{3x}{9} - \frac{x}{9}$ (ग) $\frac{11}{3x} + \frac{2}{3x}$

(घ) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+2}$ (ङ) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{2}$ (च) $\frac{x+y}{a+1} - \frac{y}{a+1}$

(छ) $\frac{6}{y-3} - \frac{3y}{y-3}$ (ज) $\frac{3x}{x+1} + \frac{3}{x+1}$ (झ) $\frac{mn}{m+n} - \frac{mn}{m+n}$

2. सरल गर :

(क) $\frac{(x+2)}{(x+3)} + \frac{(x-2)}{(x+3)}$ (ख) $\frac{3x+1}{x^2+2} - \frac{x+1}{x^2+2}$ (ग) $\frac{y-15}{y^2-9} + \frac{18}{y^2-9}$

(घ) $\frac{ax^2+bx}{x+a} + \frac{c}{x+a}$ (ङ) $\frac{x^2-4x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}$ (च) $\frac{y^2+3y}{y+3} + \frac{5y+15}{y+3}$

(छ) $\frac{5p^2}{4-p} - \frac{35p-60}{4-p}$ (ज) $\frac{p^4}{(p+3)^2} + \frac{81-18p^2}{(p+3)^2}$ (झ) $\frac{3x^2}{x+y} + \frac{6xy+3y^2}{x+y}$

(ञ) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} - \frac{2ab}{(a-b)^2}$ (ट) $\frac{m^2}{m^2+5m+6} + \frac{2m}{m^2+5m+6}$

Curriculum Development Centre

(ठ) $\frac{x^2}{x^2-4x+3}-\frac{3x}{x^2-4x+3}$ (ड) $\frac{x^2}{x-2y}-\frac{4xy}{x-2y}+\frac{4y^2}{x-2y}$

(ढ) $\frac{9a^2}{3a+4b}+\frac{24ab}{3a+4b}+\frac{16b^2}{3a+4b}$

20.4.3. फरक फरक हर भएका आनुपातिक अभिव्यजकहरूको जोड र घटाउ (Addition and Subtraction of Rational Expressions of Different Denominators)

$\frac{3}{5}+\frac{7}{6}=$ कति हुन्छ ? यसमा 5 र 6 को ल.स. लिने र सरल गर्ने ।

हरमा फरक फरक सङ्ख्या भएका आनुपातिक सङ्ख्याहरूको जोड र घटाउ जस्तै गरी फरक हर भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाउ गरिन्छ ।

हर वा अंशमा नै बीजीय अभिव्यञ्जक भएको आनुपातिक सङ्ख्या आनुपातिक अभिव्यञ्जक हो । यसको जोड र घटाउ पनि आनुपातिक सङ्ख्याको जोड र घटाउ झैं गरिन्छ ।

तरिका :
- फरक फरक हरको खण्डीकरण गर्ने र ल.स. निकाल्ने
- प्रत्येक आनुपातिक अभिव्यञ्जकको हरले उक्त ल.स. लाई भाग गर्ने र
- भागफलले सोही अभिव्यञ्जकको अंशलाई गुणा गरी सरल गर्ने

उदाहरण 1

सरल गर :

(क) $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}$

समाधान

2 र 5 को ल.स. 2 x 5 = 10 हुन्छ ।

$=\frac{5\times x+2\times x}{10}$

$=\frac{5x+2x}{10}$

$=\frac{7x}{10}$

(ख) $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+2}{x-3}$

समाधान

(x-2) र (x-3) को ल.स. (x-2)(x-3) हुन्छ

$=\frac{(x-3)(x+3)-(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$

$=\frac{x^2-9-(x^2-4)}{(x-2)(x-3)}$

$=\frac{x^2-9-x^2+4}{(x-2)(x-3)}$

$=\frac{-5}{(x-2)(x-3)}$

[(x-2)(x-3) / (x-2) = (x-3)

(x-2)(x-3) / (x-3) = (x-2)]

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

सरल गर : $\frac{2}{x^3+3x+2}+\frac{5x}{x^2-x-6}$

समाधान

यहाँ $\frac{2}{x^3+3x+2}+\frac{5x}{x^2-x-6}$

$=\frac{2}{(x+2)(x+1)}+\frac{5x}{(x+2)(x-3)}$

$=\frac{2(x-3)+5x(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{2x-6+5x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{5x^2+7x-6}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{5x^2+10x-3x-6}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{5x(x+2)-3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{(5x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ $=\frac{(5x-3)}{(x+1)(x-3)}$

अभ्यास 20.4.3

1. सरल गर :

(क) $\frac{3}{5}-\frac{x}{3}$ (ख) $\frac{3x}{5}+\frac{2x}{7}$ (ग) $\frac{x^2}{6}+\frac{2x^2}{8}$

(घ) $\frac{7x}{11}-\frac{2}{5}$ (ङ) $x+\frac{x}{7}$ (च) $\frac{a}{6}+\frac{b}{9}$

(छ) $4x+\frac{3x}{7}$ (ज) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$ (झ) $\frac{2}{a}-\frac{3}{ab}$

(ञ) $\frac{3}{7}-\frac{5}{3y}$ (ट) $\frac{x^2}{y}-4y$ (ठ) $\frac{x}{2-x}-\frac{2-x}{x}$

Curriculum Development Centre

2. सरल गर :

(क) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ (ख) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$ (ग) $\frac{2}{p-2q}+\frac{1}{p+2q}$

(घ) $\frac{x}{2(x-2)}-\frac{1}{x-2}$ (ङ) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$ (च) $\frac{3}{x-a}+\frac{4}{x+a}$

(छ) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}$ (ज) $\frac{x+3}{x-5}-\frac{x+5}{x-3}$ (झ) $\frac{x+7}{x-7}-\frac{x}{7-x}$

(ञ) $\frac{2x+1}{6}+2x$ (ट) (ठ) $\frac{1}{x+6}-\frac{x}{x+9}$

(ड) $\frac{x+2}{x^2+x}-\frac{3}{x^2-x-2}$ (ढ) $\frac{1}{x-3}+\frac{3x-5}{x^2-5x+6}$ (ण) $\frac{2x-1}{x^2+4x}-\frac{x-2}{x^2+2x-8}$

(त) $\frac{2a}{a-1}-\frac{a^2+3}{a^2-1}$ (थ) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$ (द) $\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{2}{x^2-1}$

(ध) $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a-2}+\frac{2}{a^2-4}$ (न) $\frac{x^2}{a-b}-\frac{y^2}{a-b}+\frac{z^2}{a^2-b^2}$

$\frac{x}{2(x+y)}-\frac{2}{3(x+y)}$

(प) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^2-1}$ (फ) $\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}+\frac{4a}{a^2+1}$

20.4.4. आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन र भाग
(Multiplication and Division if Rational Expressions)

उदाहरण 1

सरल गर : (क) $\frac{2x}{2x+y}\times\frac{2xy+y^2}{8y^2}$ (ख) $\frac{x^2-y^2}{xy}\div\frac{x-y}{y}$

समाधान

(क) $\frac{2x}{2x+y}\times\frac{2xy+y^2}{8y^2}$

$=\frac{2x}{2x+y}\times\frac{y(2x+y)}{8y^2}$

$=\frac{2x\times y\times(2x+y)}{8y^2(2x+y)}$ $=\frac{x}{4y}$

Curriculum Development Centre

(ख) $\frac{x^2-y^2}{xy} \div \frac{x-y}{y}$

$= \frac{x^2-y^2}{xy} \times \frac{y}{x-y}$

$= \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \times \frac{y}{x-y}$

$= \frac{(x+y)(x-y)\times y}{xy\times(x-y)}$

$= \frac{x+y}{x}$

आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन गर्ने तरिका :

- अंश र हरको छुट्टा छुट्टै खण्डीकरण गर्ने

- अंशलाई अंशसँगै र हरलाई हरसँगै गुणन गर्ने

- अंश र हरका साझा अभिव्यञ्जक हटाउने

- उत्तर लघुत्तम रूपमा लेख्ने

उदाहरण 2

सरल गर :

(क) $\frac{x^2+x-6}{x+1} \times \frac{2x^2+x-1}{x+3}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2+x-6}{x+1} \times \frac{2x^2+x-1}{x+3}$

$= \frac{x^2+3x-2x-6}{x+1} \times \frac{2x^2+2x-x-1}{x+3}$

$= \frac{x(x+3)-2(x+3)}{x+1} \times \frac{2x(x+1)-1(x+1)}{x+3}$

$= \frac{(x-2)(x+3)}{x+1} \times \frac{(2x-1)(x+1)}{x+3}$

$= \frac{(x-2)(x+3)\times(2x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$= (x-2)(2x-1)$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 3

सरल गर :

(क)

समाधान :

यहाँ, $\frac{a^2-25}{a^2-16} \div \frac{a+5}{a-4}$

$= \frac{a^2-25}{a^2-16} \times \frac{a-4}{a+5}$

$= \frac{a^2-5^2}{a^2-4^2} \times \frac{a-4}{a+5}$

$= \frac{(a+5)(a-5)}{(a+4)(a-4)} \times \frac{a-4}{a+5}$

$= \frac{(a+5)(a-5)(a-4)}{(a+4)(a-4)(a+5)} \quad = \frac{a-5}{a+4}$

भाग गर्ने तरिका :

$\div$ चिह्नलाई x मा बदल्ने र $\div$ पछाडिको भिन्नको हरलाई अंशमा र अंशलाई हरमा लेख्ने ।

जस्तै : $\frac{2}{3} \div \frac{4}{3}$ भए $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ बनाउने

त्यसपछि गुणनका विधिहरू प्रयोग गर्ने

$\frac{a^2-25}{a^2-16} \div \frac{a+5}{a-4}$

(ख) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3} \div \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

समाधान :

यहाँ, $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3} \div \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

$= \frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

$= \frac{x^2-3x-3x+9}{x^2-3x+x-3} \times \frac{x^2-2x-x+2}{x^2-3x-2x+6}$

$= \frac{x(x-3)-3(x-3)}{x(x-3)+1(x-3)} \times \frac{x(x-2)-1(x-2)}{x(x-3)-2(x-3)}$

$= \frac{(x-3)(x-3)}{(x+1)(x-3)} \times \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

Curriculum Development Centre

$$= \frac{(x-3)(x-3)\times(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)\times(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x-1}{x+1}$$

अभ्यास 20.4.4

1. सरल गर :

(क) $\frac{x^2}{y}\times\frac{2}{y}$ (ख) $\frac{3x^2}{4y^2}\times\frac{4y}{3x}$ (ग) $\frac{7a^2b}{8c}\times\frac{4c^2}{14ab^2}$

(घ) $\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x}{y}$ (ङ) $\frac{a-3}{3}\times\frac{6}{a-3}$ (च) $\frac{x-3}{x+2}\times\frac{(x+2)^2}{(x-3)^2}$

2. सरल गर :

(क) $\frac{x^2}{y^2}\div\frac{x}{y}$ (ख) $\frac{3xy}{4ab}\div\frac{6y}{5b}$ (ग) $\frac{x}{7}\div\frac{x^2}{14}$

(घ) $\frac{6a^2b}{7x^2y}\div\frac{6ab^2}{7y^2}$ (ङ) $\frac{a^2-b^2}{a}\div\frac{a-b}{b}$ (च) $\frac{x^2-1}{y^2}\div\frac{x-1}{y}$

3. सरल गर :

(क) $\frac{x^2-y^2}{x+y}\times\frac{x+y}{(x-y)^2}$ (ख) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{x-y}{x+y}$

(ग) $\frac{x^2-4x+4}{3y-xy}\times\frac{4x-12}{x-2}$ (घ) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2a+ab+2b}\times\frac{a+2}{a+3}$

(ङ) $\frac{y^2+10y+24}{y^2+2y-8}\times\frac{y-3}{y+6}$ (च) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-5x+6}\times\frac{bx-3b}{cx-5c}$

(छ) $\frac{x^2-11x+30}{x^2-7x+10}\times\frac{5x-10}{x^2-8x+12}$ (ज) $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\times\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$

(झ) $\frac{x^2-9}{x^2+4x}\times\frac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$ (ञ) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}\times\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}$

Curriculum Development Centre

4. **सरल गर :**

(क) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\div\dfrac{x-y}{x+y}$

(ख) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}\div\dfrac{x-3}{x+3}$

(ग) $\dfrac{x^2+12x+36}{x^2-16}\div\dfrac{3x+18}{2x^2+8x}$

(घ) $\dfrac{3x^2-4x-7}{3x^2-7x}\div\dfrac{x^2-1}{x-4}$

(ङ) $\dfrac{x^2+2x-15}{x-2}\div\dfrac{3(x^2+4x-5)}{x^2-3x+2}$

(च) $\dfrac{x^2+12x+27}{x^2+x-6}\div\dfrac{x^2+4x-45}{9(x^2-4x-5)}$

(छ) $\dfrac{xy-x+2y-2}{3y+2x+xy+6}\div\dfrac{xy-x+5y-5}{x^2+8x+15}$

(ज) $\dfrac{y^2+4y-12}{y^2-5y+6}\div\dfrac{y^2+3y-18}{y^2-9}$

(झ) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-14x+45}\div\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-8x-9}$

(ञ) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-4a-12}\div\dfrac{a^2-a-6}{a^2-9a+18}$

5. **सरल गर :**

(क) $\dfrac{2x}{5y}\times\left(\dfrac{2y}{5}+\dfrac{y}{3}\right)$

(ख) $\left(\dfrac{x}{(x-1)}-\dfrac{1}{(x+1)}\right)\div\dfrac{x-1}{x^2-1}$

(ग) $\left(\dfrac{3x}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}\right)+\dfrac{3}{x^2-1}$

(घ) $\dfrac{x-4}{x+4}\times\dfrac{x-3}{x+3}\div\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+7x+12}$

(ङ) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\times\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$

Curriculum Development Centre

पाठ 21

घाताङ्क (Indices)

21.0. पुनरवलोकन (Review)

तलको उदाहरण हेरौँ र सिकौँ :

$a\times a\times a\times a$ बराबर कति हुन्छ ?

यहाँ, a लाई a ले 4 पटक गुणन गरिएको छ । तसर्थ, $a \times a \times a \times a = a^4$ मा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

यहाँ, a^4 मा a लाई आधार (base) भनिन्छ भने 4 लाई a को घाताङ्क (index) भनिन्छ ।

> यसरी, एउटै सङ्ख्या वा चललाई सोही सङ्ख्या वा चलले दुई वा सोभन्दा बढी पटक गुणन गर्दा उक्त गुणनलाई छोटकरीमा लेख्ने सङ्केतलाई घाताङ्क भनिन्छ ।

त्यसै गरी a लाई n पटकसम्म गुणन गरेमा, $a \times a \times a \ldots\times\ldots n$ times $= a^n$ हुन्छ ।

21.1. घाताङ्कका नियमहरू (Laws of Indices)

(क) **एउटै आधार भएका घाताङ्कहरूको गुणन** (Multiplication Law of Indices with same base)

यहाँ, $x^2.x^3 = (x \times x) \times (x \times x \times x) = x \times x \times x \times x \times x = x^5 = x^{2+3}$

तसर्थ, यदि आधार एउटै भए घाताङ्कहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ र घाताङ्क जोडिन्छन् ।

> त्यस कारण, यदि $x \neq 0$ र m र n धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या भएमा $x^m.x^n = x^{m+n}$ हुन्छ ।

(ख) **एउटै आधार भएमा घाताङ्कहरूको भाग** (Division law of Indices with same base)

यहाँ, $=\dfrac{x^3}{x^2}=\dfrac{x\times x\times x\times x\times x}{x\times x} = x \times x \times x = x^3 = x^{5-2}$

> त्यस कारण, यदि आधार एउटै भएमा घाताङ्कहरूको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ र भाजकको घाताङ्कलाई भाज्यको घाताङ्कबाट घटाइन्छ । त्यसकारण $x \neq 0$ र $m > n$, m,n दुवै धनात्मक सङ्ख्या भएमा $x^m \div x^n = x^{m-n}$ हुन्छ ।

(ग) **शून्य घाताङ्क (Law of Zero Index)**

तलको उदाहरण हेरौँ :

यहाँ, $x^2 \div x^2 = \dfrac{x\times x}{x\times x} = 1$ ……………. (a)

Curriculum Development Centre

त्यस्तै, घाताङ्कको भाग विधिबाट हेर्दा,

$\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^{\circ}$ .... (b)

अब, (a) र (b) बाट हेर्दा $x^0 = 1$

यदि $x \neq 0$ र x को घाताङ्क शून्य (0) छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ । त्यस कारण $x^0 = 1$

(घ) **ऋणात्मक घाताङ्कको नियम (Law of Negative Indices)**

तलको उदाहरण हेरौँ :

यहाँ , $x^2 \div x^4 = \frac{x^2}{x^4} = \; = x^{2-4} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

त्यसैगरी, $x^{-3} =$ र $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ हुन्छ । साथै, $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$ हुन्छ ।

यदि $x \neq 0$ र x^{-m} भए, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ हुन्छ । त्यसै गरी $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$ पनि हुन्छ ।

$\frac{1}{x^3} = x^n$

(ङ) **घाताङ्कको पनि घाताङ्कहरुको नियम (Law of Index of Indices)**

तलको उदाहरण हेरौँ :

$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2$ ($\therefore$ आधार एउटै छ तसर्थ घाताङ्क जोडिन्छ ।)

$= x^{2+2+2} = x^6 = x^{2\times 3}$

त्यस्तै $(x^3)^4 = x^{3\times 4} = x^{12}$ हुन्छ ।

यदि m र n दुवै पूर्णाङ्क भए र $x \neq 0$ भए $(x^m)^n = x^{m\times n} = x^{m.n}$ हुन्छ ।

(च) **गुणनको र भागको घाताङ्कको नियम (Law of Indices of Multiplication and Division)**

हामीलाई थाहा छ,

$(2a^2)^3 = 2a^2 \times 2a^2 \times 2a^2$

$= 2 \times 2\times 2\times a^2 \times a^2 \times a^2$

$= 2^3 \times a^{2\times 3}$

$= 8 \times a^6$

$(2a^2)^3 = 2^3 \times a^{2\times 3} = 8a^6$

यदि दुई ओटा आधारहरूको (गुणन/भाग) को घाताङ्क एउटै छ भने त्यो घाताङ्क दुवैमा छुट्याएर लेख्न सकिन्छ । $(xy)^m = x^m \times y^m \qquad x, y \neq 0$ र $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \qquad y \neq 0$

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $x^2 \times x^4$ (ख) $3^3 \times 3^2$ (ग) $p^3 \times p^4 \times p^{-2}$

समाधान

यहाँ, $x^2 \times x^4$

$= x^{2+4}$

$= x^6$

समाधान

यहाँ, $3^3 \times 3^2$

$= 3^{3+2}$

$= 3^5$

$= 243$

समाधान

यहाँ, $p^3 \times p^4 \times p^{-2}$

$= p^{3+4} \times p^{-2}$

$= p^7 \times \frac{1}{p^2}$

$= \frac{p^7}{p^2} = p^{7-2} = p^5$

उदाहरण 2

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $x^5 \div x^3$ (ख) $8x^3 \div 2x^{-4}$ (ग) $x^{n-1} \div x^{2n-3}$

समाधान

यहाँ, $x^5 \div x^3$

$= x^{5-3}$

$= x^2$

समाधान

यहाँ, $8x^3 \div 2x^{-4}$

$= 2^2 \times x^{3-(-4)}$

$= 2^2 \times x^{3+4}$

$= 4 \times x^7$

$= 4x^7$

समाधान

यहाँ, $x^{n-1} \div x^{2n-3}$

$= \frac{x^{n-1}}{x^{2n-3}}$

$= x^{(n-1)-(2n-3)}$

$= x^{n-1-2n+3}$

$= x^{-n+2}$

$= x^{2-n}$

उदाहरण 3

घाताङ्कको नियम प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $(x^2 y)^3$ (ख) $(3a)^2 \times (2a)^3$ (ग) $[3x^2y]^3$

समाधान :

यहाँ, $(x^2 y)^3$

$= x^2y \times x^2y \times x^2y$

$= x^2 \times x^2 \times x^2 \times y \times y \times y$

$= x^{2\times3}\, y^3$

$= x^{2\times3} \cdot y^3$

$= x^6y^3$

यहाँ, $(3a)^2 \times (2a)^3$

$= 3a \times 3a \times 2a \times 2a \times 2a$

$= 3^2 \times a^2 \times 2^3 \times a^3$

$= 9 \times 8 \times a^{2+3}$

$= 72a^5$

यहाँ, $[3x^2y]^3$

$= 3^3x^{2\times3}y^3$

$= 3^3 \cdot x^6\, y^3$

$= 27x^6y^3$

Curriculum Development Centre

उदारण 4

सरल गर :

(क) $\left(\dfrac{x^2 y}{xy^2}\right)^3$

समाधान

यहाँ, $\left(\dfrac{x^2 y}{x^2 y^2}\right)^3$ $\left[\because \left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}\right]$

$= \dfrac{(x^2 y)^3}{(xy^2)^3}$ $[\because (x^m)^n = x^{mn}]$

=

$= \dfrac{x^6 y^3}{x^3 y^6}$

$= x^{6-3} . y^{3-6}$ $\left[\because \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\right]$

$\because \dfrac{x^{2\times3} y^3}{x^3 y^{2\times3}}$

$= x^3\, y^{-3}$

$= \dfrac{x^3}{y^3}$

(ख) $(-2x^3y^3)^2\,(x^3y^2)^{-2}$

समाधान

यहाँ, $(-2x^3y^3)^2\,(x^3y^2)^{-2}$ $[\because (x^m)^n = x^{mn}]$

$= (4x^6y^6) \times x^{3\times-2} \cdot y^{2(-2)}$

$= 4x^6.y^6 . x^{-6}.y^{-4}$

$= 4 \times x^{6-6} \cdot y^{6-4}$

$= 4x^0y^2$

$= 4 \times 1.\ y^2$ $[\ \ x^0 = 1]$

$= 4y^2$

उदाहरण 5

घाताङ्कको नियम प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $2x^{2a} \times (x^2\, y^2)^{-2}$

समाधान

यहाँ, $2x^{2a} \times (x^2\, y^2)^{-2}$

$= 2x^{2a} \times x^{2\times-2} \cdot y^{2\times-2}$

$= 2x^{2a} \times x^{-4} \times y^{-4}$

$= \dfrac{2x^{2a-4}}{y^4}$

(ख) $3p^{n-1}\, q^m \times (2p^{2n+1}\, q^{-2})$

समाधान

यहाँ, $3p^{n-1}\, q^m \times (2p^{2n+1}\, q^{-2})$

$= 3p^{n-1}\, q^m \times 2 \times p^{2n+1} \times q^{-2}$

$= 3 \times 2\, p^{n-1+2n+1} \cdot q^{m-2}$

$= 6p^{3n}\, q^{m-2}$

उदाहरण 6

यदि $x = 2$ $y = 3$, $m = 1$ र $n = 4$ भए $= \dfrac{x^{m+n} Y^{m-n}}{x^{m-n} y^{m+n}}$ को मान कति हुन्छ ?

Curriculum Development Centre

समाधान

यहाँ $x = 2, y = 3, m = 1$ र $n = 4$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{2^5 \times 3^{-3}}{2^{-3} \times 3^5} = \frac{2^{5+3}}{3^{5+3}} = \frac{2^8}{3^8} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

अभ्यास 21.1.

1. **घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :**

(क) $8^4 \times 8^3$ (ख) $x^6 \times x^7$ (ग) $(p^2q) \times (pq)$

(घ) $(3x^3) \times (2x^2)$ (ङ) $(a^3b) \times (ab) \times (a^2b)$ (च) $(4y^{-2}) \times (-3y^4)$

2. **घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :**

(क) $3^5 \div 3^3$ (ख) $16^5 \div 4^5$ (ग) $12x^7 \div 3x^5$

(घ) $-36a^8 \div 9a^5$ (ङ) $-125p^7 \div (-25p^6)$

3. **घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :**

(क) $(2^3)^4$ (ख) $(-5^3)^2$ (ग) $(5x^3)^4$

(घ) $(-7p^3)^4$ (ङ) $(xy^2)^3 \times xy$ (च) $(4x^4)^3 \times (3x^3)^4$

(छ) $(a^2b)^c \times (ab^2)^c$ (ज) $\left(\frac{xy^2}{y^3}\right)^2$ (झ) $\frac{(3p^2q)^2}{9p^2q^2}$

4. **घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर मान पत्ता लगाऊ :**

(क) $\frac{2^3 \times 4^2}{8^2}$ (ख) $\frac{5^3 \times 125^3}{25^3}$ (ग) $\frac{4^4 \times 5^5}{25^2 \times 16^2}$

5. **घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :**

(क) $\frac{a^{m+n+2} \times a^{m+n+2}}{a^{m+n}}$ (ख) $\frac{x^{p-q+1} x^{q-r+1} \times x^{r-p+1}}{x^2}$

6. **यदि** $a= 5$ $b = 4$ $c = 2$ $m = 2$ र $n = 3$ **भए**

$\frac{a^{m.n} \times b^{m+n} \times c^{m-n}}{a^{m+n} \times b^{m-n} \times c^{m.n}}$ **को मान कति हुन्छ ?**

$\frac{x^{m+n}y^{m-n}}{x^{m-n}y^{m+n}} =$

Curriculum Development Centre

पाठ 22 समीकरण, असमानता र लेखाचित्र

(Equation, Inequalities and Graph)

22.0 **पुनरवलोकन (Review)**

A	P	D	F
G	I	B	M
J	L	C	E
O	H	N	K

सबै मिली तलको खेल खेलौँ ।

सबैले आआफ्नो कापीमा सँगै दिए जस्तै 4 x 4 को बिङ्गो टेबल बनाऊ । र A देखि P सम्म क्रम नमिलाइकन लेख ।

जस्तै, A, P, D, F, G, I, B, H, J, L, C, E, O, M, N, K

अब शिक्षकले एउटा तरिकाले तल दिइएका प्रश्नहरू बोर्डमा एक एक गरी लेख्नुहोस् :

A. $x + 31 = -5$	E. $\frac{x}{6} = -20$	I. $x - 2 < 14$	M. $\frac{x}{3} \le 8$
B. $y + (-11) = 40$	F. $13x = 39$	J. $x + 5 > 7$	N. $36 < 12x$
C. $12 = k - 7$	G. $\frac{y}{-3} = -14$	K. $-7 + x < -5$	O. $-45 > -15x$
D. $16 = h - (-4)$	H. $15y = 105$	L. $x + 16 > 26$	P. $\frac{x}{6} \le -4$

विद्यार्थीले उक्त प्रश्नको समाधान गर्ने र आफ्नो बिङ्गो तालिकामा त्यस अक्षरलाई क्रस गर्दै जाने । यसरी जुन विद्यार्थीको पहिला बिङ्गो टेबलका पङ्क्तिका क्रमशः 8 ओटा कोठाहरू पुरा क्रस हुन्छ, त्यो विद्यार्थी विजेता हुन्छ । अब विजेतालाई पुरस्कृत गर्ने ।

समीकरण र एक चलयुक्त रेखीय समीकरणका बारेमा सामान्य जानकारी अघिल्ला कक्षाहरूमा लिइसकेका छौँ । अब हामी अझ विस्तृत रूपमा अध्ययन गर्दछौँ ।

Curriculum Development Centre

22.1 एक चलयुक्त रेखीय समीकरण (Linear Equation of one Variable)

तलका प्रश्नहरूको उत्तर प्रत्येकले आआफ्नो कपीमा लेख्ने र सँगैको साथीसँग छलफल गरी उत्तरको निचोडमा पुगौं ।

रेखीय समीकरण भनेको के हो ?

चल भनेको के हो ?

$x+5 = 9$ मा x को डिग्री कति छ ?

के यसमा x को मान दुई ओटा वा सोभन्दा बढी हुन सक्छ, यसबारे हामीले अघिल्ला कक्षामा अध्ययन गरि सकेका छौं ।

एक चलयुक्त समीकरणहरू हल गर्ने तरिका :

$x+4 = -3$ भए x को मान कति होला ?

समाधान

$x+4 = -3$ (पहिले चलसँग भएको अचललाई हटाउने)

अथवा, $x + 4 - 4 = -3 - 4$

अथवा, $x = -7$

जाँच :

$x + 4 = -3$

$-7 + 4 = -3$

$-3 = -3$ मान्य भयो ।

उदाहरण 1

हल गर र उत्तर जाँचेर हेर :

$9x-19 = 8$

समाधान

यहाँ, $9x-19 = 8$

अथवा, $9x-19+19 = 8+19$ (दुवैतिर +19 गर्दा)

अथवा, $9x-0 = 27$

अथवा, $\frac{9x}{9} = \frac{27}{9}$

अथवा, $x = 3$

जाँच :

$9x-19 = 8$

$9 \times 3-19 = 8$

$27-19 = 8$

$8 = 8$ मान्य भयो ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

हल गर

$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

समाधान :: **यहाँ**

अथवा, (दुवैतर्फ घटाउने)

अथवा,

अथवा, (2, 3,र 4 को ल.स. 12 हुन्छ।)

अथवा,

अथवा,

$-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

जाँच

$-1=\frac{-4}{4}$

- 1 = -1 मान्य भयो।

उदाहरण 3

हल गर र जाँचेर हेर :

$5x-6 = 3x+10$

समाधान

यहाँ, $5x-6 = 3x+10$

अथवा, $5x-6+6 = 3x+10+6$ (दुवैतर्फ 6 जोड्दा)

अथवा, $5x = 3x+16$

अथवा, $5x-3x = 3x-3x+16$ (दुवैतर्फ $-3x$ गर्दा)

अथवा, $2x = 16$

अथवा,

जाँच :

5 x 8-6 = 3 x 8+10

40 - 6 = 24 +10

34 = 34 मान्य भयो।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 4

हल गर : $\frac{7x-9}{2x+1}=\frac{3}{2}$

समाधान

यहाँ $\frac{7x-9}{2x+1}=\frac{3}{2}$

अथवा, $2(7x-9)=3(2x+1)$ (**क्रस गुणा गर्दा**)

अथवा,

अथवा, (दुवैतर्फ 18 जोड्दा)

अथवा,

अथवा, (दुवैतर्फ -6x गर्दा)

अथवा,

अथवा, (8 ले भाग गर्दा)

$\therefore x=\frac{21}{8} \quad =2\frac{5}{8}$

उदाहरण 5

एउटा आयतकार खेतको लम्बाइ र चौडाइ 5:3 को अनुपातमा छ। यदि उक्त खेतको परिमिति 400 मिटर भए उक्त खेतको

(क) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ग) क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ लम्बाइ र चौडाइको अनुपातको साझा गुणन खण्डलाई x मान्दा,

लम्बाइ = 5x भए चौडाइ = 3x हुन्छ ।

(क) प्रश्नानुसार, परिमिति = 400m

हामीलाई थाहा छ, आयतकार वस्तुको परिमिति = 2(लम्बाइ + चौडाइ)

अथवा, 2(5x+3x) = 400

Curriculum Development Centre

अथवा, $\frac{2\times(5x+3x)}{2}=\frac{400}{2}$

अथवा, $5x+3x = 200$

अथवा, $8x = 200$

अथवा, $\frac{8x}{8}=\frac{200}{8}=25$

$\therefore x = 25$

(ख) खेतको लम्बाइ (ℓ) = $5x = 5 \times 25 = 125$ m

खेतको चौडाइ (b) = $3x = 3 \times 25 = 75$ m

(ग) खेतको क्षेत्रफल (A) = $\ell \times b$ वर्ग एकाइ

= (125×25) m^2

= 3125 m^2

अभ्यास 22.1

1. हल गर :

(क) $7x = 21$ (ख) $x - 8 = 9$ (ग) $3x+4 = 13$

(घ) $5x-14 = 8$ (ङ) (च)

(छ) $8x+9 = 10$ (ज) $13x-14 = 12$ (झ)

2. हल गर र जाँचेर हेर :

(क) $5x+3 = 2x+6$ (ख) $4x+7 = 3x+10$ (ग) $9+14x = 27-11x$

(घ) $4(x+4) = 3(x-1)$ (ङ) $17-8y = 5-20y$ (च)

3. हल गर :

(क) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{4}{3}$ (ख) $\frac{3-4x}{5-4x}=\frac{7}{2}$ (ग) $\frac{3x+2}{5x+7}=\frac{2}{3}$

(घ) $\frac{3x+4}{4x+5}=\frac{1}{2}$ (ङ) $\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}=2+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}x$ (च) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{3}{4}$

(छ) $\frac{3x+3}{4x-4}=\frac{5}{4}$ (ज) $\frac{x-10}{x-12}=\frac{5}{6}$ (झ) $\frac{3-x}{x+4}=\frac{7}{9}$

4. हल गर :

(क) x को 10% = 35 (ख) 500 को $2\frac{1}{2}\% = x$ (ग) x को 13% = 6.5

(घ) x + x को 33% = 266 (ङ) x + x को 50%= 381

5. कक्षा 8 का 35 विद्यार्थीहरूमध्ये केटीहरूको सङ्ख्या केटाको सङ्ख्याभन्दा 7 ले बढी छ भने उक्त विद्यालयको कक्षा 8 का विद्यार्थी जनाउने समीकरण लेख । साथै कक्षा 8 का केटाको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

6. दुई ओटा सङ्ख्याको योगफल 20 छ । यदि एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याभन्दा 4 ले बढी छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाऊ ।

7. एउटा सङ्ख्याको र त्यसको को फरक 7 छ भने त्यो सङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाऊ ।

8. एउटा आयतको लम्बाइ चौडाइभन्दा 8 cm बढी छ । उक्त आयतको परिमिति 56 cm छ भने चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

9. दुई ओटा सङ्ख्याहरू 4:5 को अनुपातमा छन् । यदि उक्त दुई सङ्ख्याहरूको योगफल 981 भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाऊ ।

10. एउटा लठ्ठीको भाग पानी भित्र छ । यदि उक्त लठ्ठीको लम्बाइ 5.5 मिटर भए लठ्ठीको पानीभित्रको लम्बाइ कति रहेछ ?

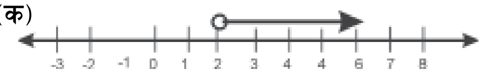
11. 5 वर्ष अगाडि बाबुको उमेर छोरीको उमेरको दोब्बर थियो । यदि उनीहरूको उमेरको योगफल 45 वर्ष थियो भने उनीहरूको हालको उमेर कति होला ?

12. 10 वर्ष अगाडि बाबुको उमेर छोराको उमेरको तिन गुणा थियो । उनीहरूको उमेरको फरक 20 वर्ष थियो भने छोराको अहिलेको उमेर पत्ता लगाऊ ।

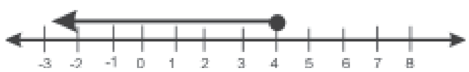
Curriculum Development Centre

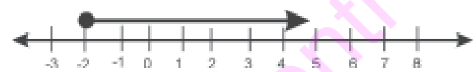
22.2 एक चलयुक्त रेखीय असमानता (Linear Inequalities with single variables)

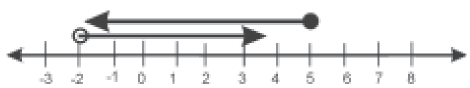
कक्षा 6 मा पढेका आधारमा तलका सङ्ख्या रेखाहरूको अध्ययन गर र ट्रिकोटोमी (trichotomy) हरू प्रयोग गरी लेख :

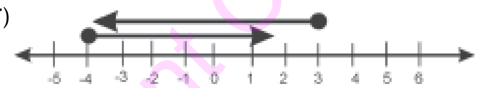
(क) 

(ख) 







(च) 

एक चलयुक्त असमानताको हल (Solution of Single Variable Inequalities)

a, b र c तिन ओटा वास्तविक सङ्ख्याहरू भए,

(क) a < b छ भने a+c<b+c हुन्छ । जस्तै : 2 < 4 भए 2+3 < 4+3 हुन्छ ।

(ख) a < b छ भने a - c < b - c हुन्छ । जस्तै : 2 < 5 भए 2-3 < 5-3 हुन्छ ।

$\frac{3}{4} x \frac{b1}{c2} > \frac{2}{3} x$

(ग) a<b र c>0 भए a.c < b.c र हुन्छ ।

(घ) a<b र c<0 भए a.c > b.c र हुन्छ ।

अर्थात, ऋणात्मक सङ्ख्याले गुणा गर्दा '>' भए '<' मा र '<' भए '>' मा परिवर्तन हुन्छ ।

उदाहरण 1

हल गर र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर :

(क) $3x<27$ (ख) $4x+3$ 23 (ग) $5x+2(3x-10)$ x (घ)

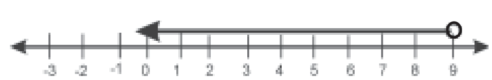
समाधान

(क) $3x<27$

अथवा, $\frac{3x}{3} < \frac{27}{3}$

अथवा, $x<9$

सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,



समूहमा व्यक्त गर्दा {8, 7, 6, 5, ...} हुन्छ ।

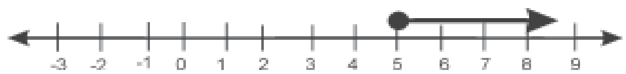
Curriculum Development Centre

(ख) $4x+3 \geq 23$

अथवा, $4x+3-3 \quad 23-3$

सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

अथवा, $4x \quad 20$



अथवा,

$x \geq 5$

समूहमा व्यक्त गर्दा {5, 6, 7, 8, ……..}

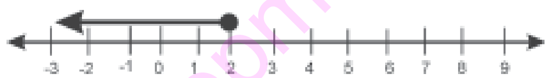
(ग) $5x+2(3x-10) \quad x$

अथवा, $5x+6x-20 \quad x$

अथवा, $11x \quad x+20$

सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

अथवा, $11x-x \quad 20$



अथवा, $10x \quad 20$

अथवा, $x \quad 2$

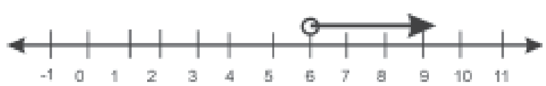
समूहमा व्यक्त गर्दा {2, 1, 0, -1, …..} हुन्छ ।

(घ)

अथवा, $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x > \frac{1}{2}$

सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

$9x - 5x > 6$



समूहमा व्यक्त गर्दा {7, 8, 9, ……} हुन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

$-5 \quad x < 2$ लाई समूहमा र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।

समाधान

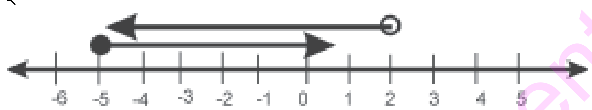
यहाँ $-5 \quad x < 2$

यसलाई दुई भागमा बाँड्दा $-5 \quad x$ र $x<2$ हुन्छ ।

अब, $5 \quad x$ लाई समूहमा व्यक्त गर्दा {-5, -4, -3, -2, ...} हुन्छ र

$x < 2$ लाई समूहमा व्यक्त गर्दा {1, 0, -1, -2, ...} हुन्छ ।

सङ्ख्यारेखामा व्यक्त गर्दा



उदाहरण 3

रोशनीलाई रु. 50 पर्ने एउटा रुमाल र प्रति गोटा रु. 12 पर्ने केही कापीहरू किन्नु छ । यदि उनीसँग जम्मा रु. 150 भए बढीमा कति ओटासम्म कापी किन्न सक्लिन् ?

$\frac{100}{12} = \frac{25}{3}$

समाधान

यहाँ, जम्मा किन्न सकिने कापी सङ्ख्या x मान्दा,

कापीको जम्मा मूल्य = $12x$ हुन्छ ।

जम्मा खर्च = $50+12x$ हुन्छ

उनीसँग भएको जम्मा रकम = रु. 150

प्रश्नानुसार, $50+12x \quad 150$ हुन्छ

अथवा, $50 + 12x - 50 < 150 - 50$

अथवा, $12x < 100$

अथवा, $x <$ ओटा

$= 8\frac{1}{3}$ ओटा

यहाँ x को मान भनेको कापीको सङ्ख्या हो जुन पूर्णाङ्कमा हुन्छ । तसर्थ रोशनीले बढीमा 8 ओटा कापी किन्न सक्छिन् ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 4

$y = 4x+5$ मा यदि x को मान 2 वा सोभन्दा बढी भएमा y को मान कति होला ?

समाधान

यहाँ $y = 4x+5$ र $x \geq 2$

अथवा, y   4.2+5

अथवा, y   8+5 = 13

$\therefore$ y   13 हुन्छ ।

अभ्यास 22.2

1. हल गर र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर :

(क) $x+5 \geq 7$ (ख) $3x+5 < 2$ (ग) $7x-2(x-3) < 16$

(घ) $2(x-2)-x<4$ (ङ) $3(x+6)<3+6x$ (च) $5+4(x-3) > 9$

(छ) (ज) (झ)

(ञ) (ट) (ठ) $0.9x \geq 0.8+0.1x$

(ड) $-5 \leq x < -2$ (ढ) $-2<x$ 4 (ण) 4 $x< 9$

(त) $-7<2x+5$ 1 (थ) -11 $3x$-2   -5

2. $y = 7x-9$ भएको समीकरणमा x 2 भएमा y को मान कति होला ?

3. $y = 4x + 5$ मा x को मान <-3 भए y को मान कति होला ?

4. $3x + 4y + 5 = 0$ समीकरण दिइएको छ । यदि

(क) x 5 भए y को मान कति होला ? (ख) $x > -5$ भए y को मान कति होला ?

(ग) y   1 भए x को मान कति होला ?

5. दोर्जेलाई रु. 25 पर्ने एउटा कापी र रु.8 पर्ने केही कलम किन्नु छ । यदि उनीसँग जम्मा रु. 150 छ भने उसले बढीमा कति ओटा कलम किन्न सक्ला ?

Curriculum Development Centre

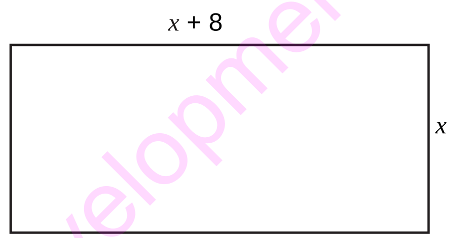
6. एउटा सङ्ख्याको तिन गुणामा 7 जोड्दा 13 भन्दा सानो हुन्छ भने उक्त सङ्ख्या कति होला ? सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर ।

7. एउटा सङ्ख्याको दुई गुणालाई 9 बाट घटाउँदा उक्त सङ्ख्याको एक तिहाइ र 3 को जोडभन्दा सानो वा बराबर हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाऊ र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर ।

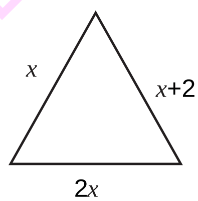
8. विदुलाले रु. 10 प्रति गिलासका केही गिलास चिया रु.45 प्रति प्याकेटका 3 प्याकेट बिस्कुट किन्दा उनीसँग भएको रु. 332 ले बढीमा कति गिलास चिया आउला ?

9. कुनै सङ्ख्या र 2 को योगफलको तिन गुणा, 3 र उक्त सङ्ख्याको फरकको दुई गुणाभन्दा सानो अथवा बराबर छ भने उक्त गणितीय वाक्यलाई असमानतामा लेखी हल गर र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर ।

10. यदि दिइएको आयतको परिमिति 44cm भन्दा बढी भए यसलाई असमानता बनाएर हल गर ।



11. दिइएको त्रिभुजको परिमिति 22cm भन्दा ठुलो र 30cm भन्दा सानो वा बराबर छ भने यसलाई असमानतामा व्यक्त गरी हल गर ।



Curriculum Development Centre

22.3 दुई चलयुक्त युगपतरेखीय समीकरणको रेखाचित्रद्वारा हल

(Graphic solution of two variable linear equations)

अमृत र आषिशलाई 4 ओटा बल आपसमा बाँड्नु छ । उनीहरूले कति कति पाउलान्, हेरौँ :

यहाँ, अमृतले पाउने बलको सङ्ख्या = x मानौँ

आषिशले पाउने बलको सङ्ख्या = y मानौँ

अब तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

अमृत (x)	4	3	2	1	0
आषिश (y)	0	1	2	3	4

माथिको तालिकामा अमृत र आषिशले पाउने जम्मा बल सबै अवस्थामा 4 छ । तसर्थ

x + y = 4…………………(i)

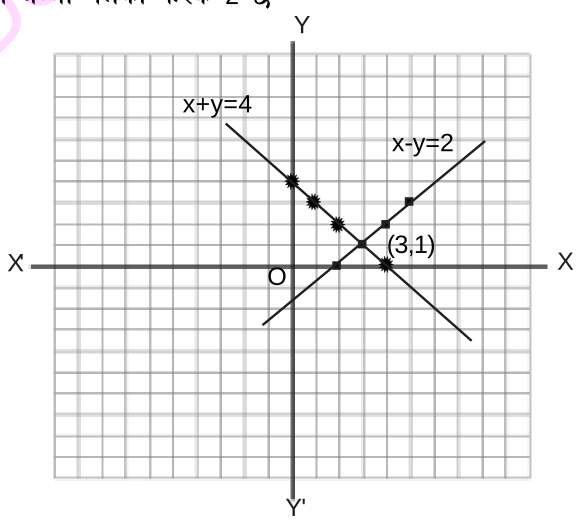
त्यस्तै, यदी अमृतसँग आषिशको भन्दा 2 ओटा बल बढी भए भने दुवैले कति कति बल प्राप्त गरे होलान्, यसलाई तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

अमृत (x)	2	3	4	5	6
आषिश (y)	0	1	2	3	4

तालिकामा हेर्दा अमृतको र आषिशको भागमा जम्मा बलको फरक 2 छ

तसर्थ x-y=2 …………………(ii) हुन्छ ।

अब माथिका दुई समीकरणलाई ग्राफ पेपरमा भरेर हेर्दा,



चित्रमा x + y = 4 र x - y = 2 समीकरणहरू विन्दु (3,1) अर्थात x = 3 र y =1 मा प्रतिच्छेदन भएका छन् । उक्त विन्दु (3.1) नै समीकरण (i) र (ii) को हल हो । किनकि (3,1) दुवै समीकरणमा मान्य हुन्छ (?)

कुनै दुई रेखीय समीकरणहरू लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा प्रतिच्छेदित हुन्छन् अथवा काटिन्छन् भने उक्त समीकरणहरूलाई युगपतरेखीय समीकरण (simultaneous equation) भनिन्छ ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 1

लेखाचित्रद्वारा हल गर :

$2x - y = 5$ र $x - y = 1$

समाधान

यहाँ, $2x - y = 5$ ………………..(i)

र $x - y = 1$……………………..(ii) मानौँ

समिकरण (i) बाट

$2x - y = 5$

अथवा, $y = 2x - 5$, तालिकामा हेर्दा

x	1	2	3	4
y	-3	-1	1	3

तसर्थ यसका बिन्दुहरू (1,-3), (2,-1) (3,1) र (4,3) भए ।

त्यस्तै समीकरण (ii) बाट हेर्दा,

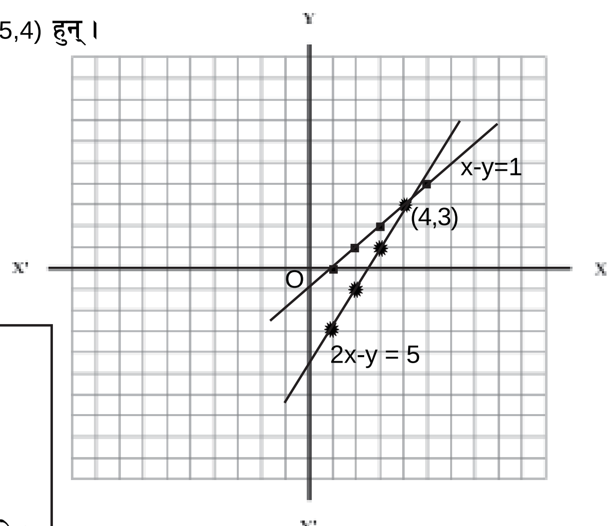
$x - y = 1$

अथवा $x = 1 + y$, y मा मान राख्ने र x को मान निकाल्ने ।

x	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	4

यसका बिन्दुहरू (1,0), (2,1), (3,2), (4,3) र (5,4) हुन् ।

अब लेखाचित्रमा बिन्दुहरू अङ्कन गर्ने ।



सँगैको लेखाचित्रमा समीकरण (i) र समीकरण (ii) बिन्दु (4,3) वा x=4 र y=3 मा काटिएका छन् । यो बिन्दु नै समीकरणको हल हो ।

जाँचेर हेर्दा,

बिन्दु (4,3) मा

2x-y=5

अथवा 2 x 4-3=5

8-3=5

5= 5

त्यस्तै,

x - y = 1

4 -3 = 1

1 = 1 मान्य भयो ।

Curriculum Development Centre

उदाहरण 2

दुई ओटा सङ्ख्याहरूको फरक 3 छ । ठुलो सङ्ख्याको दुई गुणा र सानो सङ्ख्याको तिन गुणा बराबर छ भने ती दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाऊ र रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

समाधान

यहाँ, सानो सङ्ख्या = x र ठुलो सङ्ख्या = y मानौँ

प्रश्नानुसार, y - x = 2 ………………….(i) र 3x = 2y.....................(ii)

(i) लाई लिँदा

y -x = 3

y = x + 3

x	0	1	2	3
y	3	4	5	6

माथिको तालिकाबाट बिन्दुहरू (0,3); (1,4); (2,5) र (3,6) प्राप्त भयो ।

समीकरण (ii) लाई लिँदा,

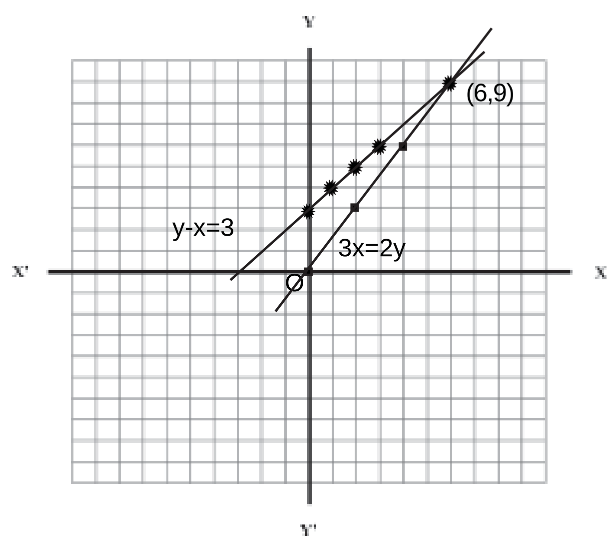
3x = 2y

अथवा $y = \frac{3}{2}x$

x	0	2	4	6
y	0	3	6	9

(x जोर सङ्ख्या लिँदा 2 ले नि:शेष भाग लाग्छ ।)

माथिको तालिकाबाट विन्दुहरू (0,0); (2,3) ;(4,6) (6,9) प्राप्त भयो ।



अब दुई ओटै समीकरणबाट प्राप्त बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा लेखाचित्रमा दुई ओटा समीकरणहरूका रेखाहरू बिन्दु (6,9) मा काटिएका छन् । तसर्थ x = 6 र y = 9 उक्त दुई समीकरणको हल हो ।

त्यसकारण ठुलो सङ्ख्या = 9 र सानो सङ्ख्या = 6 भयो ।

अभ्यास 22.3

1. **तलका जोडी समीकरणहरूलाई लेखाचित्रद्वारा हल गर र जाँचेर हेर :**

(क) $x+y=2$	$3x-y=10$	(ख) $3x+y=7$	$x=2y$
(ग) $x+y=13$	$2x=y+8$	(घ) $x+y=6$	$x-y=2$
(ङ) $x+y=8$	$x-y=4$	(च) $4x+y=2$	$3x-2y=7$
(छ) $2x+y=4$	$x+2y=2$	(ज) $3x+y=8$	$2x+y=7$
(झ) $4x+2y=2$	$x-3y=11$	(ञ) $2x-y=4$	$x+2y=7$
(ट) $2x+y=5$	$4x+3y=6$	(ठ) $x+y=6$	$x-y=0$

2. **तल दिइएका समस्याहरूलाई समीकरणमा व्यक्त गरी लेखाचित्रद्वारा हल गर :**

(क) दुई ओटा सङ्ख्याको योगफल 15 छ र फरक 5 छ ।

(ख) दुई ओटा सङ्ख्याको योगफल 12 छ र ठुलो सङ्ख्या सानो सङ्ख्याको तिन गुणा ठुलो छ ।

(ग) दुई सङ्ख्याको फरक 5 छ र सानो सङ्ख्याको 5 गुणा र ठुलो सङ्ख्याको 4 गुणा बराबर छ ।

(घ) तिन ओटा कापी र चार ओटा कलमको मूल्य रु. 200 पर्छ र 5 ओटा कापी र 2 ओटा कलमको मूल्य रु. 240 पर्छ भने एउटा कापी र एउटा कलमको मूल्य पत्ता लगाऊ ।

(ङ) बाबुको उमेर छोरीको उमेरको तेब्बरमा 3 कम छ । यदि बाबु र छोरीको उमेरबिचको फरक 37 वर्ष भए उनीहरूको उमेर पत्ता लगाऊ ।

(च) मञ्जुको अहिलेको उमेर चक्रेको भन्दा 5 वर्ष बढी छ । मञ्जुको 5 वर्षपछिको उमेर चक्रेको अहिलेको भन्दा दोब्बर हुन्छ भने उनीहरूको अहिलेको उमेर कति होला ?

(छ) विपनाभन्दा विपीन 4 वर्ष जेठा छन् । 2 वर्ष अगाडि विपीनको उमेर विपनाको भन्दा दुई गुणा बढी थियो भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाऊ ।

(ज) कुसुम र उनको बुबाको उमेरको फरक 20 वर्ष छ । यदि बुबाको उमेर कुसुमको भन्दा दुई गुणा र 4 ले बढी छ भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाऊ ।

Curriculum Development Centre

22.4 वर्ग समीकरण (Quadratic Equations)

तलका समीकरणहरू हेर र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर :

$x^2+2x+1=0$ ………………(i) $x^2-16=0$ …………………(ii)

$x^2-12x+20=0$ ………………(iii) $3x^2+4x=0$ …………………..(iv)

- माथिका समीकरणहरूमा x को डिग्री कति छ ?
- समीकरणहरूमा के फरक पाउँछौ ?
- माथिका समीकरणहरूमा कति कति ओटा चल छन् ?

दिइएका समीकरणहरूमा पहिलो, तेस्रो र चौथो पदमा x को डिग्री 1 र 2 दुवै छ भने दोस्रो समीकरणमा x को डिग्री 2 मात्र छ ।

डिग्री 2 भएमा समीकरणहरूलाई वर्ग समीकरण (quadratic equation) भनिन्छ ।

यदि वर्ग समीकरणमा एकचल 'x' को डिग्री 2 मात्र छ भने उक्त वर्ग समीकरणलाई शुद्ध वर्ग समीकरण (pure quadratic equation) भनिन्छ । जस्तै : $x^2-16=0$ शुद्ध वर्ग समीकरण हो ।

त्यस्तै डिग्री 2 र डिग्री 1 समेत भएमा पदहरू समावेश भएको वर्ग समीकरणलाई मिश्रित वर्ग समीकरण (mixed quadratic equation) भनिन्छ । जस्तै : $x^2+7x-8=0$ मिश्रित वर्ग समीकरण हो ।

खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरणको हल (Solving quadratic equations by factorization)

वर्ग समीकरणमा चल 'x' को मान पत्ता लगाउनुलाई वर्ग समीकरणको हल गर्नु भनिन्छ । वर्ग समीकरणको डिग्री 2 हुने हुँदा यसका मान पनि दुई ओटा हुन्छन् । वर्ग समीकरणमा x को मानलाई समीकरणका मूल वा मूलहरू (roots) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

हल गर : (क) $x^2+7x-8=0$ (ख) $16x^2-49=0$

समाधान

(क) $x^2+7x-8=0$

[8 x -1=-8]
[8-1=7]

अथवा, $x^2+8x-8=0$

अथवा, $x(x+8)-1(x+8)=0$

अथवा, $(x-1)(x+8)=0$

कि, $(x-1)=0$ भए $x=1$ र

वा, $x+8=0$, $x=-8$ हुन्छ ।

ab=0 मा a र b दुई ओटा गुणन खण्ड भए a=0 वा b=0 वा दुवै हुन्छ ।

तसर्थ x को मान 1 र -8 छन् ।

Curriculum Development Centre

(ख) $16x^2 - 49 = 0$

अथवा, $(4x)^2 - (7)^2 = 0$

अथवा, $(4x-7)(4x+7) = 0$ (?)

यदि, $4x - 7 = 0$ भए $4x = 7$ हुन्छ ।

र $x = -\frac{7}{4}$ हुन्छ

फेरि यदि $4x + 7 = 0$ भए $4x = -7$ हुन्छ ।

र $x = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$ हुन्छ ।

$\therefore x = \pm 1\frac{3}{4}$

अभ्यास 22.4

1. हल गर :

(क) $x^2 - 4x = 0$ (ख) $2x^2 - x = 0$ (ग) $3x + 9x^2 = 0$ (घ) $9x^2 - 4 = 0$

$\frac{xx^2+13}{74x-34} \; x = 136 = \frac{2}{3x} = 0$

(ङ) $5x + 9x^2 = 0$ (च) $4x^2 - 7x = 0$ (छ) $x^2 - 49 = 0$ (ज) $169x^2 - 196 = 0$

(झ) (ञ) $(x^3 - 4x) = 0$

2. हल गर :

(क) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (ख) $x^2 - x - 2 = 0$ (ग) $x^2 + x - 2 = 0$ (घ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(ङ) $x^2 - 10x - 24 = 0$ (च) $x^2 - 9x + 18 = 0$ (छ) $x^2 - 11x + 30 = 0$ (ज) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(झ) $x^2 + 8x + 16 = 0$ (ञ) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (ट) $x^2 + 10x + 25 = 0$ (ठ) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(ड) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (ढ) $2x^2 - x - 6 = 0$ (ण) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (त) $7x^2 + 13x - 2 = 0$

(थ) $x^2 + 9x - 22 = 0$ (द) $x^2 - 18x + 77 = 0$ (ध) $2x^2 + 11x + 12 = 0$ (न) $3x^2 - 11x - 20 = 0$

(प) $10x^2 + 19x + 6 = 0$ (फ) $12x^2 - 11x + 2 = 0$ (ब) (भ) $(x+1)^2 - 4 = 0$

(म) $(x+3)^2 - 16 = 0$ (य) $(x+6)^2 - 36 = 0$ (र) $(x-7)^2 - 64 = 0$ (ल) $100 - (x-5)^2 = 0$

Curriculum Development Centre

उत्तरमाला

अभ्यास 1.1

1. (क) आसन्न (ख) शीर्षभिमुख (ग) शीर्षभिमुख (घ) आसन्न (ङ) आसन्न

2. आसन्न कोणहरू : $\angle XOY$ र $\angle YOX'$; $\angle YOX'$ र $\angle X'OY'$; $\angle X'OY'$ र $\angle Y'OX$; $\angle Y'OX$ र $\angle XOY$

   शीर्षभिमुख कोणहरू :- $\angle XOY$ र $\angle X'OY'$, $\angle X'OY$ र $\angle Y'OX$

3. (क) 75° (ख) 80° (ग) 45°

4. (क) $x° = 45°$, $y = 135°$ (ख) $x° = y° = 80°$ (ग) $x° = 60°$, $y° = 70°$

5. (क) $x° = 135°$, $y° = 45°$, $z = 135°$ (ख) $x° = 50°$, $y° = 80°$, $z° = 80°$ (ग) $y° = z° = 45°$

अभ्यास 1.2

1. (क) $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ र $\angle 8$ (ख) $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ र $\angle 6$

2. (क) $x = 60°$, $y = 120°$ र $z = 120°$ (ख) $x = 100°$, $y = 100°$ र $z = 80°$

   (ग) 36° (घ) $x = 50°$, $y = 130°$ $z = 50°$ (ङ) $x = 47°$. $y = 133°$

   (च) $x = 75°$, $y = 75°$ $z = 75°$ (छ) $x = 20°$ (ज) $x = 120°$, $y = 60°$ $z = 60°$

3. (क) छैनन् (ख) छन् (ग) छैनन्

4. (क) $x = y = 49°$ (ख) $x = y = 80°$ $a = 80°$, $b = 100°$

   (ग) $x = 90°$, $y = 90°$ $z = 40°$ $a = 50°$ (घ) $x = 38°$, $z = 38°$, $y = 142°$

   (ङ) $x = 95°$ $y = 45°$ $z = 135°$, $a = 130°$ (च) $x = 90°$, $y = 50°$, $z = 40°$

   (छ) $x = 75°$, $y = 105°$, $z = 105°$, $a = 75°$ (ज) $x = 115°$, $y = 115°$ $z = 58°$, $a = 58°$

अभ्यास 2.1

1. शिक्षकलाई देखाउने

2. (क) 90° (ख) 45°,45° (ग) 68°,68° (घ) 70°, 70° (ङ) 60°, 60°, 60°

   (च) $x = 30°$, $y = 60°$ (छ) 20°, 40°, 120° (ज) 60°, 60°, 120° (झ) 120°, 75°

   (ञ) $x = 100°$, $y = 38°$, $z = 42°$ (ट) $x = 60°$, $y = 55°$ (ठ) $x = 45°$, $y = 45°$

   (ड) $x = 36°$; 36°, 67°, 77°, $y = 77°$, $z = 67°$

3. 50°, 95°, 85° 4. शिक्षकलाई देखाउने

Curriculum Development Centre

अभ्यास 2.2

शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 2.3

1. शिक्षकलाई देखाउने 2. शिक्षकलाई देखाउने

3. (क) 110° (ख) 5cm (ग) x = 90°, y = 90° (घ) x = 8cm, y = 6cm

(ङ) x= 4cm, y =3cm (च) x = y = z = 90°

4. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 2.4

शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 3.1

1. (क) छन् (ख) छैनन्

2. (क) को.भु.को (ख) भु.भु.भु (ग) स.क.भु (घ) भु.को.भु.

3. (क) PQ र LM, QR र MN, PR र LN, $\angle P$ र $\angle L$, $\angle Q$ र $\angle M$, $\angle R$ र $\angle N$

(ख) XY = AB ; YZ र BC, XZ र AC°, $\angle X$ र $\angle A$; $\angle Y$ र $\angle B$; $\angle Z = \angle C$

4. (क) x = 13°, y = 13° (ख) x = 20°, y = 112°

(ग) x = 1.8cm (घ) x = 1, y = 1.25cm

5.-6. शिक्षकलाई देखाउने 7. AC = PR

8. LN = YZ भए सकभु र MN = XY भए भु.को.भु.

अभ्यास 3.2

1. (क) शिक्षकलाई देखाउने

2. (क) x = 4, y = 5 (ख) x = 6cm, y = 15cm (ग) x = 18, y = 7 (घ) x = 3, y = 2

(3) 2.2 cm (4)(क) शिक्षकलाई देखाउने (ख) DE = 12cm ; 30°

(5) 3cm, 30° (6)(i) शिक्षकलाई देखाउने (ii) 6cm

अभ्यास 4.1

1.(क) 18.84 cm (ख) 15.7cm (ग) 28.26m (घ) 31.4in (ङ) 75.36m (च) 56.52 ft

(छ) 9.42k (ज) 47.1yd

Curriculum Development Centre

2. (क) 2 cm (ख) 3 in (ग) 5.5 m (घ) 10.5ft (ङ) 18cm (च) 60yd

(3) 528m (4) 628m (5) 50ft (6) 176m, 4 (7) 0.84 m (8) 14 in

अभ्यास 4.2

1. (क) 28..26 cm^2 (ख) 78.5 sq in (ग) 200.96sq.ft. (घ) 113.04 sqin (ङ) 254.34m^2

(च) 314km^2 (छ) 176.625 sq.mm (ज) 379.94cm^2 (झ)803.84 cm^2

(2) 153.86 cm^2 (3) (क) 94.985 cm^2 (ख).346.185 m^2 (ग) 28.26sqin.

(घ) 1017.36 m^2 (ङ) 11304 sq. ft (4) 63.585 cm^2

(5). (क) 84.78 cm^2 (ख).30.5 cm^2 (ग) 30.96sq ft. (घ) 168.56 cm^2

(6) 43.96 ft; 7 ft (7). 7 m; 43.96m (8) श्याम. 75.36 cm^2 (9) 176.625 cm^2

अभ्यास 5.1

1. (क) षड्मुखा (ख) त्रिभुजाकार प्रिज्म (ग) पञ्चभुजाधार पिरामिड (घ) सोली

(ङ) बेलना (च) घन (छ) टेट्राहेड्रन (ज) आयताधार पिरामिड

(झ) गोला

2. (क) $\Delta ABC, \Delta PQR$; आयत APQC; आयत BCQR ; आयत APRB;

(ख) वर्ग PQRS; Δ ΔOPQ, ΔOQR, ΔORS, ΔOSP

(ग) पञ्चभुजABCDE; ΔABF, ΔBCF , ΔCDF, ΔDEF, ΔEAF

अभ्यास 5.2

1. (क) टेट्राहेड्रन (ख) घन (ग) सोली (घ) बेलना (ङ) षड्भुखा

(च) घन 2.-3. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 6.1

1. (क) 5cm (ख) 50cm (ग) 75cm (घ) 10cm (ङ) 20 ft

(च) $\sqrt{3}$ cm (छ) 17cm (ज) $\sqrt{135}$ m (झ) 25cm

2. (क) होइन (ख) हो (ग) होइन (घ) हो (ङ) हो (च) होइन

(3) 10cm (4) $\sqrt{44}$ cm (5) $\sqrt{27}$ cm (6) 21 cm (7) 24cm

Curriculum Development Centre

8. (क) हो (ख) हो (ग) होइन (घ) हो (ङ) होइन (च) होइन

अभ्यास 6.2

1. (क) 13 एकाइ (ख) $\sqrt{50}$ एकाइ (ग) $\sqrt{32}$ एकाइ (घ) 6 एकाइ (ङ) $\sqrt{8}$ एकाइ
   (च) $\sqrt{34}$ एकाइ (छ) $\sqrt{40}$ एकाइ (ज) $\sqrt{53}$ एकाइ (झ) 2 एकाइ

2. 10 एकाइ (3) $\sqrt{109}$ एकाइ (4) शिक्षकलाई देखाउने (5) 5, 250km

6. शिक्षकलाई देखाउने (7) $\sqrt{32}, \sqrt{72}$ (8) 10 एकाइ, पर्छ

(9) $\sqrt{98}, \sqrt{98}$ (10) a = 0 (11) शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 7.1

1. (क) $18cm^2$ (ख) 1.96 वर्ग फिट (ग) $12cm^2$ (घ) $36cm^2$
   (ङ) $9\sqrt{3}$ वर्ग एकाइ (च) $22.5cm^2$ (छ) $36cm^2$ (ज) $99cm^2$
   (झ) $9.9\ cm^2$ (ञ) $44\ cm^2$ (ट) $44\ cm^2$ (ठ) $7.04cm^2$

2. (क) $79cm^2$ (ख) $50.7\ cm^2$ (ग) $42cm^2$

3. (क) 16cm (ख) 10cm (ग) 10cm

(4) 13038 वर्ग मिटर (5) 63 ओटा

6. (क) 28 वर्ग मिटर (ख) 66 वर्ग मिटर (ग) 5450 वर्ग मिटर
   (घ) 16 वर्ग मिटर (ङ) $12\frac{4}{7}$ वर्ग मिटर

अभ्यास 7.2

1. (क) $300cm^3$ (ख) $24cm^3$ (ग) $60,000cm^3$ (घ) $30cm^2$ (ङ) $630cm^3$

2. (क) $27cm^3$ (ख) $64cm^3$ (ग) $125cm^3$ (घ) $512cm^3$
   (ङ) 216 घन फिट (च) 15.625 घन इन्च

3. 27 ओटा (4) $1620\ m^3$ (5) 10 ओटा

6. (क) $90cm^3$ (ख) $93\ cm^3$ (ग) $117cm^3$ (7) 10cm (8) 9cm

9. (क) 28 (ख) 280 (10) $64,000\ cm^3$ (11) $2400cm^3$

(12) 6cm (13) शिक्षकलाई देखाउने (14) 150 ओटा

अभ्यास 8.1

1. शिक्षकलाई देखाउने

Curriculum Development Centre

2. (क) (1,-2) (ख) (-2,-3) (ग) (4, 5) (घ) (-6,-6) (ङ) (-5, 4)

(च) (-2, -5) (छ) (9, 8) (ज) (-3, 9) (झ) (-10,-12) (ञ) (7,-8)

3. (क) (-1,2) (ख) (2, 3) (ग) (-4,-5) (घ) (6, 6) (ङ) (5, -4)

(च) (2, 5) (छ) (-9, -8) (ज) (3,-9) (झ) (10, 12) (ञ) (-7, 8)

4. (-5,-6), 5 एकाइ   5- 7. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 8.2

1-2.शिक्षकलाई देखाउने

3. (क) (-7,-4),(7,4), (4,-7) (ख) (7,4), (-7,-4), (4,7)

(ग) (-9, 5), (9,-5), (-5,-9) (घ) (0,3), (0, -3), (-3,0)

(ङ) (8,-4), (-8,4), (4, 8) (च) (5, -2), (-5,-2), (-2, 5)

(छ) (10,10), (-10,-10),(-10,10) (ज) (-6,0), (6,0), (0, -6)

(झ) (0,0), (0,0), (0,0) (ञ) (9,-9), (9,9) , (9,9)

4 - 6. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 8.3

1. शिक्षकलाई देखाउने   (2) (7,-1)

3. (क) (1,12) (ख) (-6,9) (ग) (-5,5) (घ) (-8,8) (ङ) (-1,0) (च) (1,-4)

(छ) (-7,11) (ज) (-8, -3)

4 - 7. शिक्षकलाई देखाउने   (8). 7, एकाइ दायाँ

अभ्यास 9 .1

1. (क) 055° (ख)105° (ग)290° (घ) 270° 2. (क) 315° (ख)155°

(ग) 292.5° (घ) 067.5° 3. (क) 240° (ख)270° (ग) 285°

4. शिक्षकलाई देखाउने (5) 242° (6) 080° (7) रुलरको प्रयोग गरी नापेर हेर्ने

अभ्यास 9.2

1. (क) 5250 m (ख) 6500 mile (ग)750 m (2) 2.25 cm

3. (ख) 6 cm (4) 300m 5.(क) शिक्षकलाई देखाउने (ख) 300 m

Curriculum Development Centre

(ग) 110° 6. रुलरको प्रयोग गरी नापेर हेर्ने

अभ्यास 10.1

1. (क) {2,4,6,8,10,12,14} (ख) {4,8,10} (ग) {2,6} (घ) {12,14}

   (ङ) {2,6,12,14}

2. शिक्षकलाई देखाउने 3. {2,6,10,14,.....}; ϕ

4. शिक्षकलाई देखाउने

5. (क) {2,4,5,7,8} (ख) {3, 5, 7, 9} (ग) {2,4,6,8}

6. (क) Q-P (ख) $\overline{A \cup B}$ (ग) $(A \cup B) - C$

7 - 9. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 10.2

1. (क) {1,3,5,7} (ख) {2,4,6,8} (ग) {4,6,8} (घ) {3,4,5,6,7,8}

   (ङ) {2,4,5,7} (च) ϕ

2. (क) {3,6,9} (ख) {1,2,4,5,7,8,10} (ग) {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} (घ) ϕ

   (ङ) {3,6,9} (च) ϕ

3. (क) {o,u} (ख) {a,e} (ग) ϕ (घ) {a,e,o,u} (ङ) {a,e,i} (च) {i,o,u}

   (छ) {a,e,o,u} (ज) {i,o,u} (झ) {a,e,i} (ञ) ϕ

4. शिक्षकलाई देखाउने

5. (क) {काठमाडौँ, भक्तपुर, ललितपुर, नुवाकोट, धादिङ, रसुवा, सिन्धुपाल्चोक र काभ्रेपलान्चोक}

   (ख) {नुवाकोट, धादिङ्ग, रसुवा सिन्धुपाल्चोक र काभ्रेपलान्चोक}

   (ग) {काठमाण्डौँ, भक्तपुर, ललितपुर}

   (घ) U (ङ) ϕ (च) ϕ

6. (क) {1,2,3,4,....} (ख) {2,4,6,8,10,......} (ग){1,3,5,7,.....}

   (घ){2,4,6,8,....} (ङ){1,2,3,4,5,.....} (च) ϕ

7. (क){0,1,2,3,4,5} (ख){4,5,6,7,8} (ग){1,3,4,8,9}

   (घ){0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14} (ङ) {6,7,8,9,10,11,12,13,14}

   (च) {0,1,2,3,9,10,11,12,13,14} (छ){0,1,5,6,7,10,11,12,13,14}

Curriculum Development Centre

(ज) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}   (झ){4}   (ञ){10,11,12,13,14}

(ट){0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14}   (ठ){4,5}

(ड){0,1,2,3,6,7,8,9,10,11,12,13,14}   (ढ){0,1,2,3,6,7,9,10,11,12,13,14}

(ण){0,1,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14}   (त){0,1,2,3,}   (थ){5,6,7}   (द){8,9}

अभ्यास 10.3

1. (क) 90   (ख) 0   (ग) 10   (घ) 100   2.(क) 7   (ख) 9   (ग) 2
   (घ) 14   (ङ) 5   (च) 7   (छ) 8   (ज) 6

3. 25 जना   4.(क) 10   (ख) 60   (ग) 30   (5) 10,40

(6) 25%; 5%   (7) 10%,40%

अभ्यास 11.1

1. (क) 14_5 (ख) 23_5 (ग) 41_5 (घ) 101_5 (ङ) 140_5
   (च) 321_5 (छ) 1234_5 (ज)3104_5 (झ) 3442_5 (ञ) 14414_5

2. (क) 14   (ख) 26   (ग) 75   (घ) 586   (ङ) 122   (च) 263
   (छ) 551   (ज) 458   (झ) 954   (ञ) 259   (ट) 663   (ठ) 1492

अभ्यास 11.2

1. (क) द्विआधार   (ख) दशमलव   (ग) द्विआधार   (घ) दशमलव   (ङ) दशमलव
   (च) दशमलव   (छ) द्विआधार   (ज) दशमलव

2. (क) 100_2 (ख) 1001_2 (ग) 1100_2 (घ) 11001_2 (ङ) 100011_2
   (च) 1000001_2 (छ) 1011110_2 (ज) 1000011_2 (झ) 10111110_2 (ञ) 10010011_2
   (ट) 11011100_2 (ठ) 1000000000_2 (ड) 1000010010_2

3. (क) 12   (ख) 18   (ग) 30   (घ) 33   (ङ) 63   (च) 99
   (छ) 115   (ज)819   (झ) 686   (ञ) 264   (ट) 375
   (ठ) 1753   (4) 1011010011_2 (5) 257

अभ्यास 12.1

1.(क) 6   (ख) 29   (ग) 23   (घ) 32   (ङ) -25   (च) 14   (छ) 1005
   (ज) -121   (झ) 10   (ञ) 63   (ट) 18   (ठ) 32   (ड) 2

2. शिक्षकलाई देखाउने   (3) 10   (4) 35   (5) 31   (6) 0
   (7) 18   (8) 0   (9) 100   (10) 100

Curriculum Development Centre

अभ्यास 13.1

1. (क) 4.5×10^{1} (ख) 3.4×10^{3} (ग) 2.3×10^{-5} (घ) 1.01×10^{5} (ङ) 1.0×10^{-2}
   (च) 4.501×10^{1} (छ) 7.0×10^{6} (ज) 6.71×10^{-3} (झ) 6.256×10^{2} (ञ) 7.882×10^{-2}
   (ट) 1.18×10^{5} (ठ) 8.72×10^{4} (ड) 2.72×10^{-6} (ढ) 3.7×10^{-5} (णँ) 7.41717×10^{4}
   (त) 3.45678×10^{3}

2. (क) 23,000 (ख) 54 (ग) 1.76 (घ) 0.00176
   (ङ) 0.000074 (च) 0.0000001901 (छ) 1525000 (ज) 65,815,700
   (झ) 525,600,000 (ञ) 0.00000523 (ट) 0.0000000871
   (ठ) 0.00000000775763

(3) 1.2×10^{4} (4) 9.8×10^{-11} (5) 300,000,000m/s (6) 6.48×10^{6}

अभ्यास 13.2

1. (क) 5.47×10^{6} (ख) 7.15×10^{-2} (ग) 10.53×10^{6} (घ) 3.51×10^{2}
   (ङ) 7.71×10^{-5} (च) 8.4×10^{4}

2. (क) 8.6×10^{14} (ख) 9.0×10^{1} (ग) 1.20×10^{-2} (घ) 1.569×10^{2}
   (ङ) 0.4×10^{-5} (च) 6.0×10^{1} (छ) 7.0×10^{7} (ज) 4.0×10^{-10}
   (झ) 0.9×10^{1} (ञ) 2.0×10^{5}

3. (क) 2.0×10^{9} (ख) 7.0×10^{0} (ग) 2.0×10^{7} (घ) 1.5×10^{3}
   (4) 3.33×10^{4} (5) 1.35×10^{9}km (6) 6000 ओटा

अभ्यास 14.1

1. शिक्षकलाई देखाउने

2. (क) अनानुपातिक (ख) आनुपातिक (ग) अनानुपातिक (घ) आनुपातिक
   (ङ) अनानुपातिक (च) आनुपातिक (छ) आनुपातिक (ज) अनानुपातिक
   (झ) आनुपातिक (ञ) अनानुपातिक (ट) आनुपातिक (ठ) आनुपातिक

3. (क) (ख) $\frac{7}{9}$ (ग) $\frac{8}{33}$ (घ) $\frac{44}{333}$ (ङ) $\frac{3}{11}$ (च) $\frac{157}{99}$
   (छ) $\frac{365}{999}$ (ज) $\frac{158}{33}$ (झ) $\frac{445}{999}$ (ञ) $\frac{508}{333}$

Curriculum Development Centre

4-5.शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 14.2

1. (क) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (ख) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (ग) $\frac{14\sqrt{2}}{8}$ (घ) $3\sqrt{3}$ (ङ) $2\sqrt{11}$

   (च) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (छ) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ (ज) $\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$ (झ) $-3(1-\sqrt{2})$ (ञ) $2\sqrt{3}-3$

   (ट) $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ (ठ) $\sqrt{3}$

2. (क) $9\sqrt{5}$ (ख) 0 (ग) $9\sqrt{7}$ (घ) $13\sqrt{3}$ (ङ) $12\sqrt{5}$

   (च) $18\sqrt{7}$ (छ) $3\sqrt{5}$ (ज) $11+\sqrt{11}$ (झ) $3\sqrt{2}$ (ञ) $4\sqrt{7}$

   (ट) $4\sqrt{8}$ (ठ) $4\sqrt{17}$ (ड) $13\sqrt{6}$

3. (क) $11\sqrt{15}$ (ख) 196 (ग) $27\sqrt{30}$ (घ) $27\sqrt{30}$ (ङ) $60\sqrt{105}$ (च) -117

4. (क) $\frac{3\sqrt{2}+10}{2}$ (ख) $\frac{5\sqrt{21}+14\sqrt{2}}{7}$ (ग) $\frac{3\sqrt{5}+1}{5}$

   (घ) $\frac{37\sqrt{5}}{5}$ (ङ) $\frac{-23\sqrt{3}}{15}$

अभ्यास 15.1

1. (क) 5:1 (ख) 1:3 (ग) 1:2 (घ) 4:5 (ङ) 3:8 (च) 10:1

2. 800 जना (3) 16,000cm (4) -9,-12 (5) रु. 250 र रु. 350 (6) रु. 5400

7. रु. 64, रु. 72 र रु. 80 (8) रु. 10,000,000, रु. 25,000,000 र रु. 30,000,000

9. A = रु. 10,940 B = रु. 21,880 र C = रु. 65,640

अभ्यास 15.2

1. (क) छन् (ख) छैनन् (ग) छैनन् (घ) छन्

2. (क) 3 (ख) 7 (ग) 1 (घ) 14

3. (क) 2 (ख) 49 (ग) 55 (घ) 5

(4) 121 (5) 7 (6) रु. 480 र रु. 400 (7) 5 min (8) 96

(9) 90 (10) 15 (11) 15N (12) 24,48 र 60 (13) 450gm

Curriculum Development Centre

अभ्यास 15.3

1. (क) 75% (ख) 34% (ग) 62.5% (घ) 59% (ङ) 66.6%

2. (क) $\frac{9}{20}$ (ख) $\frac{7}{10}$ (ग) $\frac{1}{16}$ (घ) $\frac{91}{100}$ (ङ) $\frac{53}{100}$

3. (क) 25 (ख) 135 (ग) 22.5 (घ) 44

4. (क) 1500m (ख) 200 मिटर (ग) 50 दिन (घ) 600 विद्यार्थी

5. रु. 1440, रु. 10560 (6) 69 (7) रु. 2775 (8) 93.75% (9) 39993

(10) रु. 14450 (11) 7.5%

12. (क) 10% (ख) 16% (ग) $5\frac{11}{19}\%$ (घ) 10% (ङ) 12% (च) 16.66%

13. 50% (14) 7% (15) रु. 23076.90 (16) विपनाले

अभ्यास 16.1

1. (क) नाफा = रु 30 (ख) नोक्सान = रु 500 (ग) नाफा = रु 700 (घ) नोक्सान = रु. 10

2. (क) 10% नाफा (ख) 10% नोक्सानन (ग) 10% नाफा (घ) 0.1% नोक्सान

3. रु. 1200 (4) रु. 710 (5) 20% (6) रु. 16,500

7. 10% नाफा (8) रु. 53,820 (9) $7\frac{1}{3}\%$ नाफा (10) रु. 50,000

11. $6\frac{2}{3}\%$ (12) रु. 32,000 (13) नाफा नोक्सान केही पनि हुँदैन ।

अभ्यास 16.2

1. रु. 184.80 (2) रु. 2070 (3) रु. 8756, र 23460, रु. 1187.5, रु. 1395

4. रु. 15500 (5) 8%

6. (क) रु. 120 (ख) रु. 150 (ग) रु. 200 (घ) रु. 450

7. (क) 8% (ख) 10% (ग) 5% (घ) 10%

8. रु. 1250

9 (क) रु. 1960 (ख) रु. 392 (ग) रु. 1568 (घ) रु. 168

10. (क) रु. 1052.03 (ख) रु. 22628.25 (ग) रु 6608.24 (घ) रु 10322.55

11. रु. 1753.76 12. रु. 1247.52 13. रु. 4423.95

Curriculum Development Centre

अभ्यास 17

(1) 3 (2) 19 (3) 75 मिनेट (4) 8 घन्टा (5) 5 जना (6) 434gm

(7) 8 days (8). 50 जना (9). 20 km/hr (10) Rs.1720 (11) Rs. 20,000

अभ्यास 18.1

1. (क) रु. 45 (ख) रु. 1045 (ग) रु. 315 (घ) रु. 39.96

2. (क) 6 वर्ष (ख) 4 वर्ष (ग) 5 वर्ष (घ) 1 वर्ष 9 महिना

3. (क) 8% (ख) 3% (ग) $\frac{11}{2}\%$ (घ) $\frac{15}{2}\%$

4. (क) रु. 9990 (ख) रु. 1200 (ग) रु. 3300 (घ) रु. 1000

5. रु. 980 (6) रु. 2970 (7) रु. 2500 (8) $\frac{11}{2}\%$ (9) 8 वर्ष

10. रु. 10000 (11) रु. 432, 4 वर्ष

अभ्यास 18.2

1. (क) रु. 60,500 (ख) रु. 2462.40 (ग) रु. 26,750 (घ) रु. 63,825 (ङ) रु. 538,410

2. रु. 39725 3. रु. 55,500 4. रु. 1000 5. रु. 1900

6. रु. 6,050 ; रु. 6,655 7. रु. 47,600 8. रु. 76,995 9. रु. 14,904 10. रु. 260,000

अभ्यास 19.1

1. (क) 15 (ख) 92 (ग) 38 (घ) 109

2. (क) 14 (ख) 12.5 वर्ष (ग) रु 66.25 (घ) 17 (ङ) 6.2

अभ्यास 19.2

1. (क) 26 (ख) 47.5 (ग) 6.0 (घ) 110.5 kg (ङ) 245

2. (क) 45 (ख) 12 वर्ष (ग) 200 (घ) 500

3. 12, 12 जना

अभ्यास 19.3

1. (क) 3 (ख) 8 (ग) 34 (घ) 120 (ङ) 182

Curriculum Development Centre

2. (क) 35 (ख) रु 225 (ग) 30 (घ) 18

अभ्यास 19.4

1. (क) 20 (ख) 35 (ग) 12cm (घ) 1.5 ft

(2). 40 (3) 90 (4) 75, 45

अभ्यास 19.5

1,2,3 शिक्षकलाई देखाउने ।

4. (क) 72 (ख) 54 (ग) 138 (घ) 102

5. (क) रु 1,750 (ख) रु1,575 (ग) 10,500

अभ्यास 19.6

1,2 शिक्षकलाई देखाउने । 3.(क) मङ्सिर 4 मी.मी. (ख) भदौ 23 मी.मी. (ग) 19 मी.मी.

अभ्यास 20.1.1

1. (क) $3(2x+1)$ (ख) $x(x+4)$ (ग) $3(4a+b)$ (घ) $6(2p^2+q^2)$ (ङ) $7y(2x+1)$
(च) $x(1+x^2)$ (छ) $x(12x+y+z)$ (ज) $x(x^2+x+1)$ (झ) $2x^2(1-x+4x^2)$

2. (क) $(a+b)(x+y)$ (ख) $b(2+a)(2a-1)$ (ग) $3xy(x-1)$ (घ) $(x+3)(x+y)$
(ङ) $(a+b)(2b+3)$ (च) $(a-b)(a+1)$ (छ) $(a-3)(2a+5)$ (ज) $a(x-1)(2-x)$
(झ) $y(x+4)(x-y)$ (ञ) $3(x+y)(x+y)$ (ट) $(x+a)(2x+3a)$

अभ्यास 20.1.2

1. (क) $(x-2)(x+2)$ (ख) $(a-2b)(a+2b)$ (ग) $(3x-y)(3x+y)$ (घ) $5(x-2y)(x+2y)$

(ङ) $13(a-3b)(a+3b)$ (च) $(5-\frac{1}{3y})(5+\frac{1}{3y})$ (छ) $\left(11x-\frac{1}{y}\right)\left(11x+\frac{1}{y}\right)$ (ज) $2(p-\frac{5}{q})(p+\frac{5}{q})$

(झ) $2(6-b)(6+b)$ (ञ) $(11-5y)(11+5y)$ (ट) $15(\frac{1}{a}-2a)(\frac{1}{a}+2a)$ (ठ) $(9-8y)(9+8y)$

(ड) $xy(2x-9y)(2x+9y)$ (ढ) $(13-14z)(13+14z)$ (ण) $ab(b-3a)(b+3a)$

(त) $\left(\frac{7x}{11}-\frac{8y}{3}\right)\left(\frac{7x}{11}+\frac{8y}{3}\right)$ (थ) $z(x-y)(x+y)$ (द) $(x+4)x$ (ध) $\left(16-\frac{x}{2}\right)\left(16+\frac{x}{2}\right)$

(न) $\left(1-\frac{9p}{11q}\right)\left(1+\frac{9p}{11q}\right)$ 2. $(x-3)(x+3)$ 3. $(x-6)(x+6)$ 4. $\pi(R-r)(R+r)$ 5. $286cm^2$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 20.1.3

1. (क) $8x$ (ख) 4ay (ग) 12p (घ) 24ab (ङ) 70pq (च) 4 (छ) $240xy$ (ज) 12y (झ) 2

2. (क) $(a+6)^2$ (ख) $(y+7)^2$ (ग) $(p+11)^2$ (घ) $(2a+5)^2$ (ङ) $(3r+10^2)$
   (च) $(6x+7)^2$ (छ) $(x-4)^2$ (ज) $(a-9)^2$ (झ) $(p-13)^2$ (ञ) $(3a-5)^2$
   (ट) $(5y-6)^2$ (ठ) $(7r-5)^2$ (ड) $(2p+6q)^2$ (ढ) $(3a+7b)^2$ (ण) $\left(\frac{x}{4}+2y\right)^2$
   (त) $(5a-4b)^2$ (थ) $(7a-5r)^2$ (द) $\left(5x-\frac{y}{5}\right)^2$

अभ्यास 20.1.4

1. (क) $(3x+2)(x+1)$ (ख) $(a+6)(a+1)$ (ग) $(m-5)(m+1)$ (घ) $(x-13)(x-2)$
   (ङ) $(x+10)(x-3)$ (च) $(y-6)(x+5)$ (छ) $(p-11)(p+3)$ (ज) $(a+6)(a+8)$
   (झ) $(x+6)(x+4)$ (ञ) $(x+13)(x-2)$ (ट) $(x-12)(x-2)$ (ठ) $(x-5)(x+3)$
   (ड) $(x+5)(x-3)$ (ढ) $(x-4)(x-2)$ (ण) $(a-16)(a+3)$ (त) $a^2(a+8)(a+4)$
   (थ) $x(x+11)(x+1)$ `(द) $4x(x-3)(x+1)$

अभ्यास 20.1.5

1. (क) $(3x+1)(x+2)$ (ख) $(3x-1)(x-1)$ (ग) $(x-4)(7x-2)$ (घ) $(2a-3)(2a-1)$
   (ङ) $(5p-1)(3p-2)$ (च) $(2a-5)(6a-1)$ (छ) $(5x+1)(x-3)$ (ज) $(5x+1)(2x-1)$
   (झ) $(3p-2)(5p-1)$ (ञ) $(3b-5)(2b+2)$ (ट) $(21x+4)(x+1)$ (ठ) $(2a+5b)(6a-b)$
   (ड) $(4a+3b)^2$ (ढ) $(6x+7y)(x-y)$ (ण) $(3a+5b)(a-2b)$ (त) $(x-3)(x-1)$
   (थ) $(1+x)(28-x)$ (द) $6q(p+2)(p+3)$

अभ्यास 20.2

1. (क) x^3+3x^2+3x+1 (ख) $x^3-9x^2+27x-27$ (ग) $x^3+12x^2+48x+64$
   (घ) $8x^3-60x+150x-125$ (ङ) $64-144b+108b^2-27b^3$
   (च) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$ (छ) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$ (ज) $1+9y+27y^2+27y^3$

2. (क) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$ (ख) $x^6+3x^4y+3x^2y^2+y^3$
   (ग) $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$ (घ) $64a^3-48a^2b+12ab^2-b^3$

3. (क) $(2a+3b)^3$ (ख) $(4x+5y)^3$ (4) 396

Curriculum Development Centre

5. (क) $(a-2)(a^2+2a+4)$ (ख) $(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$ (ग) $(5p-6)(25p^2+30p+36)$

(घ) $(8+7b)(64-56b+49b^2)$

(6) 322 (7) 28 (8) 756 (9) 1692

10. (क) $-3yz(y+z)$ (ख) $2x(x^2+3a^2)$ (ग) $3pq(p-q)$

(घ) $x^3 + y^3$ (ङ) x^3-y^3 (च) $3ab(a+b)$

अभ्यास 20.3.1

1. (क) xy (ख) $3xy^2$ (ग) abc (घ) $x+2$ (ङ) $x-y$

(च) $p(p-q)$ (छ) $3a+b$ (ज) $x+y$ (झ) $x-6$ (ञ) $x-3$

(ट) $x+10$ (ठ) $a+3$ (ड) $x-1$ (ढ) $a-b$ (ण) $1-y^2$

2. (क) $x-a$ (ख) $x-y$ (ग) $a(a+b)$ (घ) $x+3$ (ङ) $a-1$

(च) $x+2$ (छ) $x-3$ (ज) $a-2$ (झ) $a+2$

अभ्यास 20.3.2

1. (क) $4x$ (ख) $6xy^2$ (ग) $10xy^2$ (घ) $6a^2b^2$ (ङ) $2a(a+2)$

(च) $3(x^2-1)$ (छ) $x(x+y)$ (ज) $x(x+2)^2$ (झ) $5(x^2-16)$ (ञ) $pq(p-q)$

$\frac{5(a+3)}{4}$

(ट) $6x^2(x^2-25)$ (ठ) $x(x^2-4)(x+5)$ (ड) $(x+2)(3x+1)(2x-1)$

(ढ) $(y-6)(y-3)(y-8)$ (ण) $(a-2b)(a+2b)^2$ (त) $(3x-4y)^2(x+y)$

2. (क) $24x^2y^2$ (ख) $x(x^2-4)$ (ग) $xy(x^2-y^2)$ (घ) $pq(p-q)^2(p+q)$ (ङ) $(a-1)^2(a+1)(a+2)$

(च) $(x+1)(x+2)^2(x-2)$ (छ) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (ज) $(2x-3y)^2(2x+3y)^2$

(झ) $x^2(2x+3)(3x-2)(x-1)$ (ञ) $x^2(x^2-4)(x+6)(x-7)$

अभ्यास 20.4.1

1. (क) 11 (ख) y (ग) ±2 (घ) 4 (ङ) ±4 (च) ±7

2. (क) $\frac{3}{4x}$ (ख) $\frac{x}{2y}$ (ग) $\frac{a+b}{a-b}$ (घ) (ङ) $\frac{(x-3)^2}{2}$

(च) $\frac{x+3}{x-3}$ (छ) $\frac{a+2}{a-4}$ (ज) $\frac{x+4}{x+2}$ (झ) $\frac{2x+3}{2x-3}$ (ञ) $\frac{x-3}{x+4}$

(ट) $\frac{x+2}{x+3}$ (ठ) $\frac{x-3}{x-1}$ (ड) $\frac{x+1}{x-5}$ (ढ) $\frac{yz}{x-4}$

Curriculum Development Centre

अभ्यास 20.4.2

1. (क) $\frac{3x}{7}$ (ख) $\frac{2x}{9}$ (ग) $\frac{13}{3x}$ (घ) $\frac{1}{x+2}$ (ङ) $\frac{2x+3}{2}$

   (च) $\frac{x}{a+1}$ (छ) $\frac{6-3y}{y-3}$ (ज) 3 (झ) 0

2. (क) (ख) $\frac{2x}{x^2+2}$ (ग) $\frac{1}{y-3}$ (घ) $\frac{ax^2+bx+c}{x+a}$ (ङ) $\frac{x-2}{x+2}$

   (च) y+2 (छ) 15-5p (ज) $(p-3)^2$ (झ) $3(x+y)$ (ञ) 1

   (ट) $\frac{m}{m+3}$ (ठ) $\frac{x}{x-1}$ (ड) x-2y (ढ) 3a+4b

अभ्यास 20.4.3

1. (क) $\frac{9-5x}{15}$ (ख) (ग) $\frac{5x^2}{12}$ (घ) $\frac{35x-22}{55}$ (ङ) $\frac{8x}{7}$

   (च) $\frac{3a+2b}{18}$ (छ) (ज) $\frac{3x^2+4y^2}{12}$ (झ) $\frac{2b-3}{ab}$

   (ञ) (ट) (ठ) $\frac{4x-4}{2x-x^2}$

2. (क) (ख) $\frac{2b}{a^2-b^2}$ (ग) $\frac{3p+2q}{p^2-4q^2}$ (घ)

   (ङ) $\frac{a^2-2ab-b^2}{a+b}$ (च) $\frac{7x-a}{x^2-a^2}$ (छ) (ज)

   (झ) $\frac{2x+7}{x-7}$ (ञ) (ट) (ठ)

   (ड) $\frac{x+4}{x^2-2x}$ (ढ) (ण) $\frac{x-1}{x(x+4)}$ (त) $\frac{a+3}{a-1}$

   (थ) (द) $\frac{x-4}{(x+2)(x-1)}$ (ध) $\frac{-2}{a^2-4}$

   (न) (प) $\frac{x}{x^2-1}$ (फ) $\frac{8a}{a^2-1}$

Curriculum Development Centre

(अभ्यास 20.4.4

1. (क) $\frac{2x^2}{y^2}$ (ख) $\frac{x}{y}$ (ग) $\frac{ac}{4b}$ (घ) $\frac{x(x-y)}{y(x+y)}$ (ङ) 2 (च)

2. (क) $\frac{x}{y}$ (ख) $\frac{5x}{8a}$ (ग) $\frac{2}{x}$ (घ) $\frac{ay}{bx^2}$ (ङ) $\frac{b(a+b)}{a}$ (च)

3. (क) (ख) 1 (ग) (घ) (ङ)

(च) (छ) $\frac{5}{x-2}$ (ज) $\frac{x-y}{x+y}$ (झ) (ञ)

4. (क) $x+y$ (ख) $\frac{x-2}{x-3}$ (ग) $\frac{2x(x+6)}{3(x-4)}$ (घ) $\frac{x-4}{x(x-1)}$ (ङ) $\frac{x-3}{3}$ (च) $\frac{9(x+1)}{x-2}$

(छ) $\frac{x+2}{y+2}$ (ज) $\frac{y+3}{y-3}$ (झ) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)(x+3)}$ (ञ) $\frac{a+1}{a+2}$

5. (क) (ख) $\frac{x^2+1}{x-1}$ (ग) $\frac{3}{x-1}$ (घ) 1 (ङ) 1

अभ्यास 21

1. (क) 8^7 (ख) x^{13} (ग) p^3q^2 (घ) $6x^5$ (ङ) a^6b^3 (च) $-12y^2$

2. (क) 9 (ख) 4^5 (ग) $4x^2$ (घ) $-4a^3$ (ङ) 5p

3. (क) 2^{12} (ख) 5^6 (ग) 5^4x^{12} (घ) 7^4p^{12} (ङ) x^4y^7 (च) $4^3 3^4 x^{24}$
(छ) $(ab)^{3c}$ (ज) x^2y^{-2} (झ) p^2

4. (क) 2 (ख) 5^6 (ग) 5 5. (क) a^{m+n+4} (ख) x (6) 160

अभ्यास 22.1

1. (क) 3 (ख) 17 (ग) 3 (घ) $4\frac{2}{5}$ (ङ) 16 (च) 41

(छ) $\frac{1}{8}$ (ज) 2 (झ) $9\frac{2}{5}$

Curriculum Development Centre

2. (क) 1 (ख) 3 (ग) $\frac{18}{25}$ (घ) -19 (ङ) -1 (च) -12

3. (क) -14 (ख) $1\frac{9}{20}$ (ग) -8 (घ) $-\frac{3}{2}$ (ङ) –8 (च) 6

(छ) 4 (ज) 0 (झ) $-\frac{1}{16}$

4. (क) 350 (ख) 12.5 (ग) 50 (घ) 200 (ङ) 254

5. 2x+ 7 = 35, 14 (6) 8, 12 (7) 12 (8) 10 cm (9) 436, 445

(10) 4.4 मीटर (11) 20 वर्ष, 35 वर्ष (12) 20 वर्ष

अभ्यास 22.2

1. (क) $x \geq 2$ (ख) $x < -1$ (ग) $x < 2$ (घ) $x < 8$ (ङ) $x > 5$

(च) $x > 4$ (छ) $x \leq -1$ (ज) $x \geq 5$ (झ) $x > -1$ (ञ) $x \leq \frac{7}{2}$

(ट) $x \leq 3$ (ठ) $x \geq 1$ (ड) देखि (ण) सम्म शिक्षकलाई देखाउने

(त) $-6 \leq x \leq -2$ (थ) $-3 \leq x < -1$ (2) $y \geq 5$ (3) $y < -7$

4. (क) $y \leq -5$ (ख) $y \geq 2\frac{1}{2}$ (ग) $x < -3$

5. 15 वटा (6) < 2 (7) $x > 2\frac{4}{7}$ (8) 19 गिलास

9. ≤ 0 (10) $x > 7$ (11) $5 < x < 7$

अभ्यास 22.3

1. (क) (3,-1) (ख) (2,1) (ग) (7,6) (घ) (4,2) (ङ) (6,2) (च) (1,-2)

(छ) (2,0) (ज) (1,5) (झ) (2,-3) (ञ) (3,2) (ट) (4.5,-4) (ठ) (3,3)

2. (क) (10,5) (ख) (3,9) (ग) (20,25) (घ) (रा.40, रा.20) (ङ) (20,57)

(च) (15 वर्ष, 10 वर्ष) (छ) (10 वर्ष, 6 वर्ष) (ज) (16 वर्ष, 36 वर्ष)

Curriculum Development Centre

अभ्यास 22.4

1. (क) 0,4 (ख) $0, \frac{1}{2}$ (ग) $\frac{1}{3}, 0$ (घ) $\pm\frac{2}{3}$ (ङ) $0, -\frac{5}{9}$ (च) $0, \frac{7}{4}$

(छ) ±7 (ज) $\pm\frac{14}{13}$ (झ) ±12 (ञ) 0, ±2

2. (क) -1 (ख) -1,2 (ग) 1,-2 (घ) -2 (ङ) 12,-2

(च) 3,6 (छ) 5, 6 (ज) -3,1 (झ) -4 (ञ) 4

(ट) -5 (ठ) 5,3 (ड) 2,4 (ढ) $2, \frac{-3}{2}$ (ण) -4,-3

(त) (थ) 2, -11 (द) 7,11 (ध) $-4, \frac{-3}{2}$ (न) $5, \frac{-4}{3}$

(प) (फ) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ (ब) $3, \frac{2}{3}$ (भ) 1,-3 (म) 1,-7

(य) 0,-12 (र) -1,15 (ल) 15,-5

$\frac{1}{7}, \frac{3}{2}, 2, \frac{-2}{5}$

Curriculum Development Centre